

人教版《二元一次方程组》的教材分析

谢竹月, 陈余喜

湖南科技大学, 湖南 湘潭

收稿日期: 2022年4月22日; 录用日期: 2022年6月3日; 发布日期: 2022年6月10日

摘要

二元一次方程组在整个初中数学课程中有着十分重要的地位。本文针对人教版七年级下册第八章的二元一次方程组, 从教材的总体、教学目标、教材内容、知识点布局、数学思想方法的应用等五个维度进行了分析, 建议教师在使用本教材时要注意实际问题的设置、分层练习以及渗透数学文化, 提高学生的综合能力。

关键词

二元一次方程组, 人教版教材, 数学思想

Textbook Analysis of the People's Education "Binary Linear Equation Group"

Zhuyue Xie, Shexi Chen

Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan

Received: Apr. 22nd, 2022; accepted: Jun. 3rd, 2022; published: Jun. 10th, 2022

Abstract

Binary linear equation group plays a very important role in the whole junior middle school mathematics curriculum. Aiming at the binary linear equations in Chapter 8 of the second volume of the seventh grade of the people's education press, this paper analyzes the five dimensions, including overall of teaching materials, the teaching objectives, the content of the teaching material, the layout of knowledge points and the application of mathematical ideas and methods. It is suggested that teachers should pay attention to the setting of practical problems, layered exercises and infiltration of mathematical culture when using this teaching material to improve students' comprehensive ability.

Keywords

Binary Linear Equation Group, PEP Edition Textbooks, Mathematical Thinking

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

二元一次方程组是刻画实际问题的重要数学模型, 在现实中具有广泛的应用。它促使学生去感知现实世界与数学之间的联系, 体会数学来源于生活, 并服务于生活。学会运用它解决实际问题, 分析问题中的各种等量关系, 适当设元, 建立相应的方程组。二元一次方程组也是中考数学的重要的考查知识点之一, 解二元一次方程组以及二元一次方程组所涉及的应用题是中考常出的大题。本文对人教版七年级下册第八章《二元一次方程组》的编写理念、内容安排、结构框架、例题习题等方面进行分析, 提出了几点教学建议, 希望对教师的教和学生的学有一定的帮助。

2. 教材总体分析

2.1. 地位与作用

在《义务教育数学课程标准(2022年版)》第四学段中, 方程组属于课程内容中的“数与代数”部分, 这一部分的主要内容包括“数与式”、“方程与不等式”、函数等内容。对于数与代数的要求是通过学习有理数、实数、代数式、方程、不等式、函数等概念, 描述现实问题中的数量关系和变化规律, 形成合适的运算思路解决问题, 形成抽象能力、模型观念, 进一步发展运算能力[1]。体会数学与生活的紧密联系, 增强应用意识, 提高运用代数知识解决问题的能力。从人教版教材的编排来看[2], 二元一次方程组起着桥梁的作用, 它是一元一次方程的延续和提高, 也是学习三元一次方程组的基础。通过二元一次方程组这个“桥梁”, 既拓展了学生的数学认知, 又促进了学生现有思维的有效碰撞, 也使得知识更加连续和紧密。通过类比一元一次方程, 学习二元一次方程组及其概念, 进一步体会方程与函数思想、化归思想、模型思想, 感受二元一次方程组在解决实际问题中的作用, 也为后面深入探究二元一次方程组与一次函数的关系夯实基础。通过对二元一次方程组的学习, 培养学生的观察、分析、比较、类比等思维能力、探索发现能力以及知识的应用能力。

2.2. 章节编排分析

第八章二元一次方程组具体章节编排顺序以及课时具体分配如表1所示(仅供参考):

Table 1. Class hour schedule

表 1. 课时分配表

章节内容	课时分配
8.1 二元一次方程组	1 课时
8.2 消元——解二元一次方程组	4 课时
8.3 实际问题与二元一次方程组	3 课时
*8.4 三元一次方程组的解法	2 课时
本章小结	2 课时

章节前从学生已有的知识经验入手, 也就是通过学生都熟知的篮球联赛入手, 图文直观新颖, 极大地激发学生对数学学习的好奇心。

正文有“思考”、“探究”、“练习”等栏目, 栏目中以问题或填空形式促使学生进行思考, 合作交流, 以此提高观察、分析的思维能力。

章节后的习题, 联系生活实际。选择的练习题是从学生的身边入手, 与生活实际紧密联系, 使学生感受到数学是来源于生活的。有农业生产问题, 产品加工问题, 比赛问题, 运输问题等等。由于教材中生活化素材较多, 学生会觉得很熟悉, 感觉到很亲切, 使学生对二元一次方程组知识更易理解。

阅读与思考栏目, 通过对《九章算术》的“方程”章了解, 展示了古人是通过算筹图来解决问题, 联系至今所学, 再次加强对方程组的应用、熟练程度以及传播数学文化。

数学活动包括活动一与活动二。活动一是在平面直角坐标系当中, 把二元一次方程组的解以及图像表示出来, 此举目的是使学生了解方程的几何表示, 为后面所要学习的函数做铺垫; 活动二是要学生通过方程组来表示吸烟人数与疾病人数之间的数量关系。数学活动的展开增添了数学课堂的趣味性, 也使学生学习数学知识更加连贯。

小结包括本章知识结构图、回顾与思考和复习题, 结构图可使学生对知识点更加清晰明了; 回顾与思考则是梳理本章所学的知识, 并对二元一次方程组进行复习, 使学生能做到融会贯通, 举一反三; 复习题的设置可以验证学生对二元一次方程组这章所学习的知识掌握的程度。

3. 教学目标分析

3.1. 知识与技能

能根据实际问题中的两种相关的数量关系列出二元一次方程组, 理解方程组的意义; 认识方程组解的定义, 经历估计方程组解的过程; 能根据二元一次方程组的特征, 选择代入消元法和加减消元法解二元一次方程组; 能解简单的三元一次方程组; 能根据具体问题的实际意义, 检验方程组的解是否合理, 体会数学的应用价值, 进一步提高学生分析问题、解决问题的能力[1]。

3.2. 过程与方法

体会方程组是刻画现实世界中含有多个未知数的问题的数学模型, 即对现实问题进行数学抽象、用数学语言表达问题、用数学知识与方法构建模型解决问题的过程; 感受“消元”思想, 掌握解二元一次方程组的代入和加减消元法, 探究将二元一次方程组转化为一元一次方程的过程, 根据二元一次方程组具体的情况具体分析选择恰当的解题方法。会用代入法和加减法解简单的三元一次方程组, 学生通过探究解三元一次方程组的过程, 进一步体会“消元”的基本思想, 使学生感受数学知识之间的相互联系, 初步养成建立数学模型解决问题的良好习惯。

3.3. 情感态度与价值观

通过对二元一次方程组的学习和探索, 学生的数学兴趣得以提高, 培养辩证唯物主义的世界观, 养成严谨求实的科学精神。

4. 教材内容分析

4.1. 重点与难点

重点: 掌握二元一次方程组的解法、消元思想、通过分析问题列出二元一次方程组来解决实际问题。

难点: 二元一次方程组解的意义, 从具体问题中抽象出数量关系建立相应的二元一次方程组。

4.2. 应用二元或三元一次方程组解决实际问题的步骤

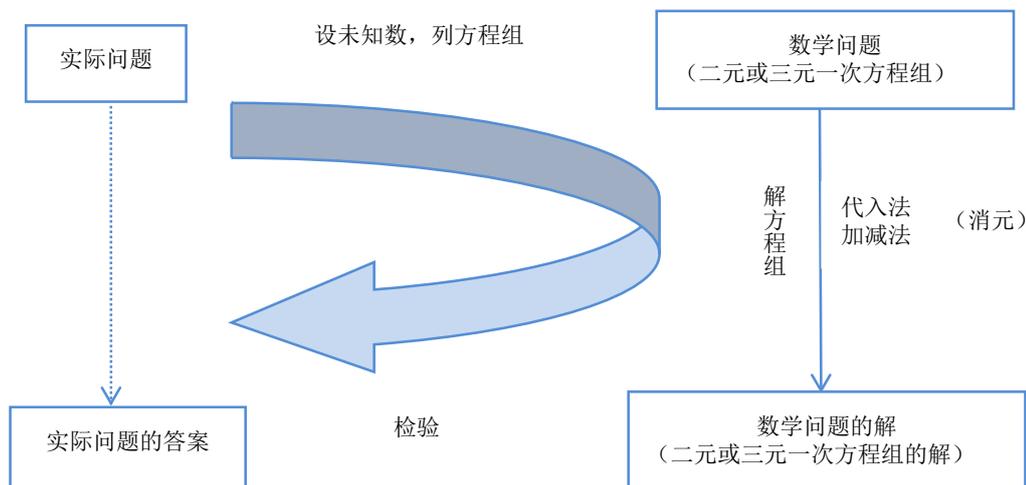


Figure 1. The appended drawings
图 1. 附图

《二元一次方程组》这章是在第八章，而第七章是《平面直角坐标系》，通过第七章的铺垫，本章数学活动的选取是用平面几何方法来研究数与代数问题，同时也为后面学习一次函数奠定了基础，这样帮助学生把学到的知识前后贯通，提高了学生的分析问题和解决问题的能力。而通过应用二元或三元一次方程组解决实际问题的步骤图，如图 1，可以看出，用坐标来描述方程组的解，表达了知识的连贯性和一致性，将知识链接的更紧密。

4.3. 知识点布局

4.3.1. 二元一次方程组以及方程组的解

例题 篮球联赛中，每场比赛都要分出胜负，每队胜 1 场得 2 分，负 1 场得 1 分。某队在 10 场比赛中得到 16 分，那么这个队胜负场数分别是多少？

在讨论二元一次方程组的过程中，利用提问的形式将二元一次方程组概念的生成过程展现出来：首先提出 2 个问题——问题包含了哪些必须同时满足的条件？设胜的场数是 x ，负的场数是 y ，你能用方程把这些条件表示出来吗？通过题目可知，题中包含两个同时满足的条件，即通过胜的场数 + 负的场数 = 总场数，胜场积分 + 负场积分 = 总积分，接着用方程 $x + y = 10$ ①， $2x + y = 16$ ②表示，然后顺势提出二元一次方程的概念：上面两个方程中，每个方程都含有两个未知数(x 和 y)，并且含有未知数的项的次数都是 1，像这样的方程叫做二元一次方程。接着，书上的旁白设置了具有启发性的问题，链接了新旧知识，既是对一元一次方程的复习与巩固，又为二元一次方程组的引出做好铺垫，极大地激发了学生的兴趣，即这两个方程有什么特点？与一元一次方程有什么不同？不禁让我们联系之前所学，如果利用一元一次方程怎么来解此题呢？这不难想到，设胜的场数为 x ，总场数是 10 场，则负的场数可设为 $(10 - x)$ ，总积分为 16，列出方程 $2x + (10 - x) = 16$ 。一元一次方程只含有一个未知数并且只有一个方程，而二元一次方程含有两个未知数，并且未知数 x 、 y 必须同时满足这两个方程，把这两个方程合在一起，写成 $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + y = 16 \end{cases}$ ，就组成了一个方程组，接着提出二元一次方程组的概念：方程组中有两个未知数，含有每个未知数的项的次数都是 1，并且一共有两个方程，像这样的方程组叫做二元一次方程组。通过对

比一元一次方程和二元一次方程组我们发现, 对于学生来说, 列二元一次方程组比列一元一次方程更加简单, 容易理解些。之后教材又提出了一个这样的问题——满足方程①, 且符合问题的实际意义的 x , y 的值有哪些呢? 满足方程②? 让学生填入表中, 让学生积极动手参与到课堂实践过程中来, 通过表中数据分析之后, 给出二元一次方程解的定义: 一般地, 使二元一次方程两边的值相等的两个未知数的值, 叫做二元一次方程的解。接着发现, $x=6$, $y=4$, 既满足方程①, 又满足方程②, 也就是两个方程的公共解, 这个解通常写作 $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$, 由此引出二元一次方程组的解的定义: 一般地, 二元一次方程组的两个方程的公共解, 叫做二元一次方程组的解。

解二元一次方程组, 需要通过转化为一元一次方程才能求解, 可以看到人教版教材注重提问、分析和引导, 注重知识之间的连续性, 将思维过程展示出来, 让学生主动参与进来, 学生充分理解之后再概括出概念。

4.3.2. “消元” 法解二元一次方程组

消元法分为代入消元法和加减消元法, 是解二元一次方程组的基本方法。代入消元法是把二元一次方程组中一个方程的一个未知数用含另一个未知数的式子表示出来, 再代入另一个方程, 消元, 进而求得方程组的解。加减消元法是把二元一次方程组中的两个方程的两边分别相加或相减, 消去其中一个未知数, 得到一个一元一次方程。具体情况通过本章的部分例题来进行分析。

例 1 用代入法解方程组 $\begin{cases} x-y=3 \\ 3x-8y=14 \end{cases}$

例 2 根据市场调查, 某种消毒液的大瓶装(500 g)和小瓶装(250 g)两种产品的销售数量(按瓶计算)比为 2:5。某厂每天生产这种消毒液 22.5 t, 这些消毒液应该分装大、小瓶两种产品各多少瓶?

例 3 用加减法解方程组 $\begin{cases} 3x+4y=16 \\ 5x-6y=14 \end{cases}$

例 4 2 台大收割机和 5 台小收割机同时工作共 2 h 收割小麦 3.6 hm², 3 台大收割机和 2 台小收割机同时工作 5 h 共收割小麦 8 hm²。1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割多少公顷?

[分析]例 1、例 3 题是在教师讲解代入法和加减法的概念之后的例题, 目的是让学生熟悉用消元法解二元一次方程组的过程, 掌握消元法解题的步骤。例 1 通过观察发现, 可以用未知数 x 表示含有另一个未知数 y 的式子, 即用代入消元法解方程组。例 3, 不能直接通过两个方程相加或相减消去其中一个未知数, 需要对方程进行变形, 使得两个方程中同一个未知数的系数相反或相等, 再进行消元, 在例 3 中, 通过加减消元法无论是消去 x 或者是消去 y , 结果是一样的。那么, 在解题过程中, 应该选择哪种消元法呢? 如果未知数前系数是 1, 如例 1, 代入法是首选, 学生很容易将一个未知数代入另一个解析式中运算, 将 2 个式子化为同一未知数, 再进行计算; 如果系数较大, 如例 3, 不方便用未知数来表示含有另一个未知数的式子, 则应该选择加减消元法, 将两个方程中的同一个未知数前的系数化为该系数的最小公倍数, 进行加减消元, 所以具体用哪种方法要看方程组中的两个方程的具体形式。

[分析]在学习了例 1、例 3 的基础上, 例 2、例 4 在题目的设置层次上更进一步, 通过实际问题, 加入之前所学知识让学生来进行分析数量关系, 建立方程组, 采用消元法来解题, 加深了学生对消元法的理解, 使学生更好的掌握消元法。

4.3.3. “消元” 解三元一次方程组

三元一次方程组是指方程组含有三个未知数, 每个方程中含有未知数的项的次数都是 1, 并且一共有三个方程。解三元一次方程组的基本步骤是: 对三元一次方程组进行代入或加减消元, 把“三元”转

化为“二元”，使解三元一次方程组转化为解二元一次方程组，在通过消元，转化为解一元一次方程。

4.4. 例题与习题配置

数学例题与习题是教科书的重要组成部分，也是数学教学中的重要环节，它对学生学习数学至关重要。本章有例题，练习和习题，习题由复习巩固、综合运用和拓广探索三部分有机组成。例题是帮助学生理解相关知识的典型习题，是把知识、技能、思想和方法联系起来的一条纽带[3]，练习是使学生掌握系统的数学基础知识，习题是供教学上作为练习来使用的问题[4]，复习巩固是使学生加深理解回顾知识，而综合运用是考察学生的数学综合能力，拓广探索是考察学生的探究能力，提升学生的思维能力。这些的有机结合才能使得不同的学生在数学上获得不同的发展。具体例题与习题配置如图2所示(仅供参考):

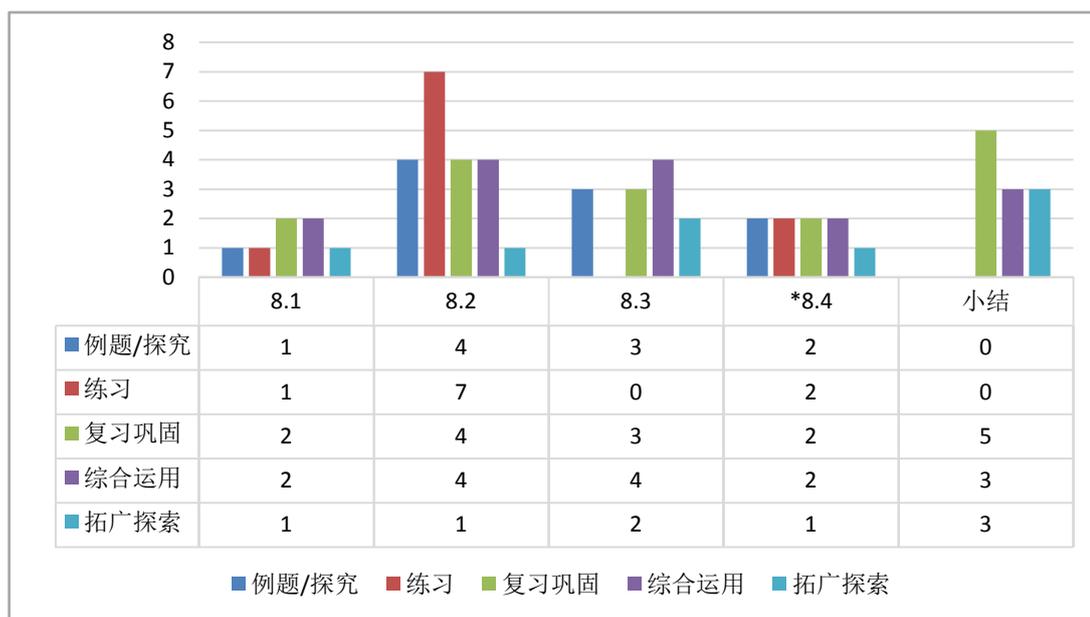


Figure 2. Distribution of exercises for binary system of first order equations

图2. 二元一次方程组习题分布

从图中可以看出，本章例题有6道，探究题4道，练习题10道，复习巩固16道，综合运用15道，拓广探索8道，8.1《二元一次方程组》这节中探究题设置比较简单，从学生们熟悉的篮球赛入手，目的是使学生了解以及理解二元一次方程组的概念，让学生学会分析数量关系，设未知数，列方程组，解方程组和检验结果，而8.2《消元——解二元一次方程组》这节中的例题、练习、复习巩固和综合运用是所有小节中占比最多的，这节主要是通过加减消元和代入消元法解二元一次方程组，侧重培养学生感受“消元”思想，并学会应用“消元”思想解决实际问题，也为解三元一次方程组奠定了理论基础。8.3《实际问题与二元一次方程组》这节3道探究题，分别是大牛小牛吃饲料问题、甲乙两种作物总产量比问题、产品加工销售款与原料费运输费问题，从这些探究题中可以看出，方程组是解决含有多个未知数问题的重要工具。在用方程组解决问题时，应抓住问题中的数量关系建立方程组，求解之后，应进一步验证解是否合理。而学习探究题，可使学生进一步了解，利用二元一次方程组解决实际问题的基本过程，培养学生用数学知识来解决问题的实际能力。*8.4《三元一次方程组的解法》这节有2道例题，第一道例题的设置目的是使学生理解三元一次方程的概念以及解法，第二道例题是想让学生提前感受二次函数，带入 x ， y 数值后使得二次函数转变成有关于 a ， b ， c 的三元一次方程组，再通过消元法解方程组。

5. 数学思想方法的应用

5.1. 方程与函数的思想

方程与函数思想是非常重要的思想之一。本章二元一次方程组中的方程思想即通过对实际问题中的已知量和未知量之间的数量关系进行分析, 恰当的设元建立二元一次方程组, 然后通过解方程组使问题得到解决的一种思想方法。本章中的函数思想是指一次函数的思想, 把问题中的数量关系用二元一次方程组形式表示出来, 应用一次函数知识进行分析和研究, 使问题得到解答。本章涉及到了二元一次方程组与一次函数的结合, 在人教版七年级下册数学活动第八章的数学活动活动 1, 第一问需要教师带领学生去探讨二元一次方程 $x - y = 0$ 的解与一次函数 $y = x$ 之间的关系, 我们可以把一次函数 $y = x$ 中的两个变量 x, y 看成未知数, 则这个解析式可以看成是一个关于 x, y 的二元一次方程, 而二元一次方程 $x - y = 0$ 的解可以是一次函数 $y = x$ 图像上的任意一点坐标。第二问进一步要求学生在同一平面直角坐标系中画出二元一次方程组 $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$ 中的两个二元一次方程的图像, 把方程 $2x + y = 4$ 、 $x - y = -1$ 变形为一次函数 $y = -2x + 4$ 、 $y = x + 1$, 把两个一次函数的图像画出, 则函数图像交点坐标即是方程组的解。

5.2. 化归思想

化归, 转化与归结, 化归思想是借助数学知识和方法, 将一个问题由难化易, 由繁化简, 由未知化已知。转化思想是数学问题解决的基本思路和途径之一。在解二元一次方程组时, 是通过加减消元和代入消元把二元一次方程组化归为一元一次方程求解。解三元一次方程组, 也是通过消元, 转化为二元一

次方程组求解, 例如, $\begin{cases} 3x + 4z = 7 \\ 2x + 3y + z = 9 \\ 5x - 9y + 7z = 8 \end{cases}$, 我们要将“三元”转化为“二元”, 则需要消元, 是消 x 、 y 、

z 中的哪一个呢? 我们发现方程 $3x + 4z = 7$ 中不含 y , 其余两个方程都含 y , 那我们可以通过后面两个方程消去 y , 得到只含有 x 、 z 的方程, 并与方程 $3x + 4z = 7$ 组成一个二元一次方程组来解此题。在解稍复杂的二元一次方程组中还应用了化归思想中的换元思想, 即把较复杂的方程问题转化为易于解决的基本问题, 例如解方程组

$\begin{cases} \frac{3}{x+4} + \frac{5}{2y-3} = 4 \\ \frac{1}{x+4} + \frac{10}{2y-3} = -1 \end{cases}$, 这个方程组虽然也是含有两个未知数, 未知数的项的次数为

1, 两个方程, 但和我们常见的二元一次方程组又是不同的, 该怎么解此题呢? 教师可引导学生, 用整体代换的思想进行换元, 把 $\frac{1}{x+4}$ 用字母 m 来表示, 把 $\frac{1}{2y-3}$ 用字母 n 来表示这样可得到二元一次方程组

$\begin{cases} 3m + 5n = 10 \\ m - 10n = 6 \end{cases}$, 回到学生熟悉的方程组, 就能很快的想到用代入消元法来解此题, 求出 m, n 值之后,

代入式子可得 x, y 值。

5.3. 数学模型思想

数学模型思想的建立, 是学生体会和理解数学与外部世界联系的基本途径, 是对现实问题进行数学抽象, 用数学符号建立方程等表示数学问题中的数量关系和变化规律, 设计“问题情境——建立模型——求解验证”活动, 运用数学知识解决问题。例如, 在本章 8.3《实际问题与二元一次方程组》这节复习巩固中的一题, 一支部队第一天行军 4 h, 第二天行军 5 h, 两天共行军 98 km, 且第一天比第二天少走 2

km。第一天和第二天行军的平均速度各是多少？分析：将实际问题转化为数学模型，题中涉及的数量有行军的平均速度、路程和时间，路程 = 时间 × 速度，它们之间的相等关系有，第一天行军平均速度 × 时间 + 第二天行军平均速度 × 时间 = 98，第二天行军平均速度 × 时间 - 第一天行军平均速度 × 时间 = 2，设第一天平均速度为 x km/h，第二天平均速度为 y km/h，根据题意，建立模型，列出方程组 $\begin{cases} 4x+5y=98 \\ 5y-4x=2 \end{cases}$ ，可用加减消元法解方程组，解得 $\begin{cases} x=12 \\ y=10 \end{cases}$ ，把解代入二元一次方程组检验，适合方程组，且满足题意。

6. 教材使用建议

6.1. 注重实际问题的设置，让学生感受模型化的过程

列二元一次方程组解决实际问题，实际问题的设置非常关键，可以从学生熟悉的问题入手，如鸡兔同笼问题，船在静水中的速度与水的流速问题，篮球赛中的胜负场数问题等，而利用我们之前所学用列算式的方法解决鸡兔同笼与船速水速问题，列一元一次方程解决胜负场数问题，让学生经历不同解法的过程，培养学生解题的灵活性，通过联系对比，提高解题的效率，用列算式的方法以及列一元一次方程衬托出列二元一次方程组的优越性。要使学生能够代入情境，分析问题中的数量关系，抓住问题中所反映出来的两个相等关系，并把它们表示成方程组的形式，让学生感受模型化的过程，提高学生应用数学知识解决实际问题的兴趣和能力。

6.2. 把握二元一次方程组，进行分层练习

把握教材主体，深入探究二元一次方程组，对不同学生进行分层练习，习题的复习巩固和综合运用是每个学生都应该掌握的，而拓广探索，如钢管截法问题，考查了二元一次方程组在实际问题中的应用以及二元一次方程组的解有多个；长方形转变成正方形且面积相等，求长方形的长与宽问题，设“一元”来解，则在解的过程中会涉及到完全平方公式，设“二元”来解，则会涉及到多项式的乘法，而这些是人教版八年级上册所要学习的；二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 代入 x ， y 的数值求 a ， b ， c 问题等，这些题目范围较广，练习难度大，考查学生解决问题的综合能力，适宜优等生练习，教师应采取分层次教学练习，让不同的学生得到不同发展。

6.3. 注重渗透数学文化，提高数学素养

数学的文化价值体现在宏观和微观两个方面[5]。从宏观角度看，数学对人类理性精神的形成和发展有着十分重要的作用，从微观角度看，数学对于人们养成良好的思维习惯有着十分重要的意义[5]。数学文化是学习数学的基础，把数学文化渗透到数学教学中，增加了课堂的趣味性，也有效的促进了课堂效率。例如，通过《九章算术》中的“方程”章，分析数量关系，用算筹列三元一次方程组，也用算筹做计算工具，先化成二元一次方程组，再化成一元一次方程，求得方程的解，这样既传播了数学历史文化又让学生学到了知识。而课后的阅读与思考材料，容易遭到大部分学生的忽视，其原因是它不是必学知识和必考知识。但阅读与思考材料对于学生的学习来说是非常重要的，主要是介绍数学家们和数学发展的一些历史，里面包含丰富的数学思想，让学生了解年轻时的数学家们，以及他们的勤奋努力、刻苦钻研的精神，激发学生的学习兴趣，端正学生的学习态度，提高学生的数学素养。

基金项目

湖南省学位与研究生教育改革研究项目(2020JGYB191)。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版) [S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [2] 编写组. 义务教育课程标准实验教科书数学七年级下册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2012.
- [3] 蔡上鹤. 谈谈初中数学教科书的例题[J]. 中学数学教学, 1991(1): 34-36.
- [4] 蔡上鹤. 谈谈初中数学教科书的习题[J]. 中学数学教学, 1991(2): 30-32.
- [5] 郑毓信, 王宪昌, 蔡仲. 数学文化[M]. 成都: 四川教育出版社, 1999.