

数学文化视域下《常微分方程》教学实践研究

漆勇方, 肖可成, 黄清兰

萍乡学院工程与管理学院, 江西 萍乡

收稿日期: 2025年3月9日; 录用日期: 2025年4月15日; 发布日期: 2025年4月24日

摘要

首先, 通过深入研读教材, 凭借对数学知识体系和教育理念的深刻理解, 在教材的第一章到第五章内容中精准找到了数学文化融入的切入点。其次, 为了让数学文化融入教学的理念更具实操性, 我们精心提供了具体的教学案例。最后, 为了验证数学文化融入教学的实际效果, 设计了严谨的实验。选取条件相近的两个班级, 分别作为实验组和对照组。实验组采用融入数学文化的创新教学方法, 对照组则沿用传统教学模式。在一个完整的教学周期结束后, 对两组学生的总成绩进行全面且深入的分析。结果表明: 实验组学生在学习过程中展现出更高的积极性和主动性, 课堂参与度明显提升, 课后主动探索知识的频率增加, 这充分说明融入数学文化能够有效激发学生的学习兴趣; 从成绩数据来看, 实验组的平均成绩显著高于对照组, 证明了数学文化的融入对提升教学效果有着不可忽视的促进作用。

关键词

数学文化, 常微分方程, 变量分离法, 常数变易法, 特征值法

Research on the Teaching Practice of “*Ordinary Differential Equations*” from the Perspective of Mathematical Culture

Yongfang Qi, Kecheng Xiao, Qinglan Huang

College of Engineering and Management, Pingxiang University, Pingxiang Jiangxi

Received: Mar. 9th, 2025; accepted: Apr. 15th, 2025; published: Apr. 24th, 2025

Abstract

First of all, through in-depth study of the teaching materials and relying on a profound understanding of the mathematics knowledge system and educational concepts, we accurately found the entry points for integrating mathematical culture into the content of Chapters 1 to 5. Secondly, in order

to make the concept of integrating mathematical culture into teaching more practical, we carefully provided specific teaching cases. Finally, in order to verify the actual effect of the teaching, we designed a rigorous experiment. Two classes with similar conditions were selected as the experimental group and the control group respectively. The experimental group adopted an innovative teaching method that integrates mathematical culture, while the control group continued to use the traditional teaching mode. After the completion of a complete teaching cycle, a comprehensive and in-depth analysis was conducted on the total scores of the students in the two groups. The results show that: the students in the experimental group showed higher enthusiasm and initiative in the learning process, with a significant increase in classroom participation and a higher frequency of actively exploring knowledge after class, which fully demonstrates that integrating mathematical culture can effectively stimulate students' interest in learning. From the perspective of the score data, the average score of the experimental group was significantly higher than that of the control group, proving that the integration of mathematical culture has a non-negligible promoting effect on improving teaching effectiveness.

Keywords

Mathematical Culture, Ordinary Differential Equation, Variable Separation Method, Constant Variation Method, Eigenvalue Method

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

将数学文化融入《常微分方程》课程不仅是教学方法的创新，更是深化学生对数学本质理解的必要途径。通过介绍微分方程发展史上的关键人物(如牛顿、莱布尼茨、欧拉、拉普拉斯)及其探索历程，学生能感受到数学并非静态的公式，而是人类智慧的动态积累。数学文化的融入，本质是将常微分方程还原为人类探索自然规律的生动实践。这种教学转型不仅让公式“活起来”，更能培养具有历史纵深感和跨学科创新力的新一代研究者。

2. 数学文化融入教学的重要作用

数学文化融入教学有着深厚的理论基础，主要包括建构主义学习理论、多元智能理论和数学教育哲学理论。建构主义学习理论强调学生的主动建构，认为知识不是被动接受的，而是学习者在一定情境下，借助他人帮助，利用必要学习资料，通过意义建构的方式获得[1]。数学文化融入教学，能为学生营造丰富情境。如讲述勾股定理的历史故事，学生在了解古人探索过程中，主动思考定理内涵，将新知识与原有认知结构关联，实现对勾股定理的深度理解与建构；多元智能理论由加德纳提出[2]，认为人类智能具有多元性，包括逻辑数学智能、语言智能、空间智能等。数学文化涉及数学史、数学思想、数学美学等多元内容，能满足不同智能倾向学生的学习需求；数学教育哲学理论认为，从哲学视角看，数学不仅是知识体系，更是一种文化活动[3]。数学文化融入教学符合这种观念，让学生认识到数学发展与人类社会、文化紧密相连。通过探究数学文化，学生理解数学概念、方法背后的思想根源，体会数学在不同文化背景下的表现形式，从而形成对数学全面、辩证的认识，提升数学素养和文化视野。

2.1. 作用机制

数学文化融入教学，能通过多种途径，从多个层面作用于教学过程，提升教学效果和学生素养。首

先, 数学文化融入教学, 能够激发学习动机。数学文化中丰富的故事和历史背景, 可引发学生对数学的好奇心。例如, 讲述祖冲之如何通过艰苦计算将圆周率精确到小数点后七位, 这种传奇经历能吸引学生注意力, 让他们对古人计算方法和现代数学知识产生探索欲望, 把被动学习转变为主动求知, 为后续学习提供内在动力。其次, 数学文化融入教学, 可以深化学生对知识的理解。借助数学文化介绍数学概念的起源与发展, 能帮助学生把握知识本质。如在讲解函数概念时, 融入函数在天文学、物理学中的应用历史, 学生能明白函数如何因实际问题而产生, 进而理解函数中变量关系的本质, 从机械记忆转变为理解性掌握。再次, 数学文化融入教学, 能够提升思维品质。数学文化蕴含多种思想方法, 像类比、归纳、演绎等。在学习立体几何时, 教师引入古希腊数学家对空间几何的研究, 学生能从中学习到从特殊到一般、从具体到抽象的思维方式, 不断锻炼逻辑思维和创新思维, 遇到复杂问题时, 能灵活运用这些思维方法分析和解决。最后, 数学文化融入教学, 能够塑造价值观与态度。数学文化传递的严谨、坚持、创新等精神, 会在潜移默化中影响学生价值观。数学家们如陈景润, 在艰苦条件下仍执着钻研“哥德巴赫猜想”, 这种精神激励学生在面对学习困难时坚持不懈, 培养他们严谨的治学态度和勇于创新的精神, 为学生未来发展奠定良好的思想基础。

2.2. 不同类型数学文化的作用

不同类型的数学文化为数学教学注入活力, 提升教学质量, 助力学生全面发展。首先, 数学史的融入, 能够激发学生兴趣, 培养正确的三观。数学史是一部充满探索与创新的故事集。在讲解勾股定理时, 介绍古代中国《周髀算经》中“勾三股四弦五”的记载, 以及古希腊毕达哥拉斯学派的发现历程, 能让抽象定理变得生动有趣, 激发学生的好奇心与求知欲。讲述阿基米德在罗马士兵入侵时, 仍专注研究数学直至生命最后一刻的故事, 学生能从中领悟数学家对真理的执着追求, 培养坚韧不拔的学习精神; 其次, 数学思想方法的融入, 能够提升学生数学思维, 增强解题能力。数学思想方法是数学的灵魂, 在函数教学中渗透数形结合思想, 通过绘制函数图像, 将抽象的函数关系直观呈现, 帮助学生理解函数性质, 提升形象思维与逻辑思维能力。在数列学习中运用归纳推理思想, 让学生从具体数列实例中总结通项公式, 培养其从特殊到一般的归纳能力, 使学生面对新数学问题时, 能运用恰当思想方法分析求解, 增强解题能力。最后, 数学美的融入, 能够陶冶学生情操, 启发学生创新意识。数学美包含简洁美、对称美、和谐美等。如欧拉公式“ $e^{i\pi} + 1 = 0$ ”, 用简洁形式将自然常数、虚数单位、圆周率、自然数 1 和 0 联系起来, 展现简洁美, 让学生感受数学的简洁魅力, 提升审美水平。在几何图形教学中, 展示正多边形、圆等具有对称美的图形, 引导学生设计对称图案, 启发学生的创新思维, 培养创造能力。

2.3. 数学文化融入《常微分方程》的重要作用

在高等教育的数学专业课程体系中, 《常微分方程》稳稳占据着核心课程的重要地位。这门课程绝非孤立存在于数学理论的学科, 而是在理工科的诸多前沿领域里扮演着极为关键的角色。从航空航天领域里飞行器轨道的精准计算, 到电子信息工程中信号传输与处理的模型构建, 再到生物医学中对生理系统动态变化的模拟分析, 常微分方程都发挥着无可替代的作用, 为这些领域的研究与发展提供了坚实的理论基础和强大的分析工具。

然而, 这门课程却让不少初学者犯了难。常微分方程中抽象概念如潮水般扎堆涌现, 像积分因子、特征方程等, 这些概念脱离了日常生活的直观经验, 难以被学生轻松理解和掌握。同时, 非线性难题更是频繁出现, 面对复杂的非线性方程, 传统的求解方法往往捉襟见肘, 这使得学生在解题过程中屡屡碰壁, 极大地打击了他们的学习积极性, 导致很多初学者望而却步, 学习热情不高。

此时, 数学文化宛如一剂“解题良方”。学生通过深入了解常微分方程这一学科的演进轨迹, 从早

期数学家们对简单微分方程的初步探索，到后续理论体系逐步完善的艰辛历程，能够将那些原本散落如珠的知识点巧妙地串联起来。他们不再孤立地看待每一个定理和公式，而是能洞察其背后的发展脉络，进而深化对课程全局的理解。在追溯学科发展的过程中，学生还能接触到不同时期数学家们的思想碰撞与突破，这有助于磨砺他们的批判性思维，学会从不同角度审视问题。而且，学科发展往往与其他学科相互交织，学生借此可以跨学科汲取营养，比如了解物理学中常微分方程的应用实例，拓宽自身的知识边界，最终构建起综合性的知识体系。

将数学文化融入《常微分方程》教学，恰能为这门枯燥晦涩的课程注入新的活力。通过引入数学家们在研究常微分方程时的趣闻轶事，激发学生的好奇心和探索欲；剖析数学思想在不同历史时期的传播与演变，帮助学生更好地理解常微分方程理论的形成背景；展示常微分方程与其他学科融合的成功案例，让学生看到这门课程的实际应用价值。如此一来，数学文化能有效化解常微分方程的学习难度，助力那些抽象概念“落地”，让学生更容易理解和接受，从而提升学习效果。

3. 数学文化融入《常微分方程》课程的切入点

在常微分方程的教学探索中，我们以王高雄、周之铭所著的《常微分方程》(第四版)为基石，同时秉持开放的学术态度，不局限于教材内容。我们广泛涉足学术科普典籍、专业史论著作以及前沿学术论坛，依据知识点的难易程度和学生兴趣的高低，分层梳理丰富的素材，力求为教学注入多元活力。在第一章绪论部分，我们不仅重现牛顿、莱布尼茨创立微积分的经典历史片段，还深入挖掘当时数学界对这一全新理论的质疑与思辨过程。这些内容的补充，能够帮助学生从多个角度去认识微积分的诞生，拓宽他们的学术视野，丰富其认知维度。第二章聚焦于一阶微分方程的初等解法，我们将目光投向莱布尼茨、拉格朗日和伯努利家族。通过深度挖掘家族内部学术传承的轶事，尤其是变量分离、积分因子等关键理论的重大发现历程，让学生更加直观地感受数学知识的发展脉络，体悟数学家们的探索精神。第三章解的存在定理章节，我们精心搜罗柯西等数学巨匠的原始论文片段，从多个维度全方位呈现科研道路上的艰难险阻以及数学家们所展现出的非凡智慧，让学生更深刻地理解理论背后的艰辛探索。第四章高阶微分方程，融入了欧拉在求解高阶微分方程时所付出的努力，展现他们如何在复杂的数学问题中寻找突破，为学生树立科研榜样。第五章微分方程组，则详细阐述朗斯基、朱塞佩·皮亚诺和拉普拉斯在这一领域的卓越贡献，让学生了解这些理论的诞生背景与重要意义。将这些在传统教材中未曾出现的科研故事融入课堂教学，能够有效激发学生的学习兴趣，活跃课堂氛围，促进课堂教学质量的显著提升，帮助学生更好地理解常微分方程这门学科的魅力与价值。

3.1. 第一章，绪论部分，包括常微分方程模型和常微分方程基本概念

常微分方程与微积分的出现密切相关。先简单介绍一下微积分发明权事件。牛顿和莱布尼茨关于微积分的争论是数学史上的重要事件，牛顿从17世纪60年代开始研究微积分，他从运动学角度出发，以“流数术”为核心，把变量看作是连续运动产生的，重点研究了导数和积分的关系，在力学和天文学等领域有广泛应用，但牛顿的研究成果当时未及时公开发表。莱布尼茨于17世纪70年代开始深入研究微积分，他从几何学角度入手，引入了微分和积分的符号，如 dx 、 $\int$ 等，这些符号简洁且实用，对微积分的传播和发展起到重要作用，他在1684年和1686年分别发表了关于微分和积分的论文。

起初，牛顿与莱布尼茨心照不宣，默认对方与自己一样，皆是凭借自身智慧独立发明了微积分。然而，这份难得的平和仅仅维持了短暂时光，很快便被打破。1699年，一位瑞士数学家提出莱布尼茨的微积分思想可能来源于牛顿，引发了双方的争论[4]-[6]。英国皇家学会倾向于牛顿，认为莱布尼茨是剽窃者；而欧洲大陆的数学家大多支持莱布尼茨，认为他是独立发现微积分。这场争论使英国和欧洲大陆的数学

家之间产生了裂痕，英国数学家因维护牛顿，长期坚持牛顿的流数术，拒绝使用莱布尼茨更先进的符号体系，导致英国在微积分发展上逐渐落后于欧洲大陆。但从客观上看，争论也促使更多数学家深入研究微积分的基础理论，推动了微积分严格化的进程。

在微分方程发展历程中，牛顿所采用的一种分类方法具有开创性意义，它被视作探寻常微分方程通解的起点。具体而言，该分类中的前两类本质上属于常微分方程的范畴，而第三类则为偏微分方程。针对后者，牛顿仅求得部分特殊积分。

尽管牛顿在其著作《流数法》里，清晰地阐述了反微分问题等同于积分问题，而这实际上就是求解微分方程的问题，并且他还成功求解了数量可观的微分方程。然而，他并未在文字表述上明确提出“微分方程”这一概念。1676年，莱布尼茨在写给牛顿的信件中，首次创造并使用了“微分方程”这一数学名词[7]。自1684年起，这个名词开始频繁出现在各类学术杂志上，基于此，完全可以说莱布尼茨是推动“微分方程”这一名词在数学领域得以广泛通用的先驱者。

3.2. 第二章，一阶微分方程的初等解法，包括变量分离法、常数变异法以及积分因子法

莱布尼茨对微分方程的求解满怀热忱，在早期微分方程求解理论的演进历程中，他的研究成果宛如一座灯塔，发挥着核心引领作用。自1670年起，莱布尼茨便屡次借助自己提出的微分三角形，巧妙攻克诸多曲线相关难题。此外，等时问题与悬链线问题的相继浮现，更是犹如催化剂一般，进一步驱使莱布尼茨全身心投入到微分方程求解方法的钻研与拓展之中。

在求解方法的探索道路上，变量分离法成为自应用无穷级数概念以来，取得的首个重大突破。为了推导出这一方法，莱布尼茨可谓绞尽脑汁[8]，耗费了大量的手稿进行反复推演。1690年，从意大利返回故乡后，他便一头扎进这项意义非凡的工作中。就在同年9月10日和9月11日，两份凝聚着他心血的手稿相继问世。在第一份手稿里，莱布尼茨详细记述了自己探寻常微分方程分离变量法的全过程，每一步推导、每一个思路转折都清晰呈现；而在第二份手稿中，他着重阐述了如何借助精妙的代换手段，将一阶齐次方程成功转化为可分离变量的方程，为这类方程的求解开辟了新路径。

因此，完全可以断言，变量分离方法在微分方程求解领域，无疑是具有里程碑意义的重大事件。这一方法的横空出世，宛如在微分方程的知识版图中矗立起一座坚实的灯塔，不仅为后续诸多求解方法奠定了基石——众多其他求解方法在实际运用时，往往追根溯源，最终仍需回归到变量分离这一基础操作，更是如同强劲的引擎，有力地推动了微分方程求解进程的快速发展。在变量分离法诞生的同期或不久之后，一阶齐次方程、一阶线性方程等的求解难题也相继被成功攻克。就在这样的学术盛景中，天才数学家雅各布凭借敏锐的洞察力，发现了一种与一阶线性方程形式相近的方程——伯努利微分方程。随后，他将该方程的求解设为一道极具挑战性的难题，并于同年发表在《教师学报》上，向学界广发“英雄帖”，诚邀各方能人志士共同探寻解答之法。次年的《教师学报》中，雅各布本人用变量分离法求解，该方程即以他的名字被命名为“伯努利方程”。

关于恰当微分方程，克莱洛做出了突出的贡献。克莱洛天赋异禀，年仅12岁便出版了关于曲线论的专著，展现出远超常人的数学天赋。18岁时，他又推出《关于双重曲率曲线的研究》，这部著作堪称空间解析与微分几何领域的开山之作，开启了该领域的探索先河。克莱洛的学术贡献不止于此，在数学技巧的改进、线积分论以及微分方程论方面，他同样成绩卓著。他率先得出微分方程为恰当微分方程的条件。此后，约翰发现，当方程左端并非某个函数的微分形式时，可以给方程乘上一个特定的因式，使得乘完之后的方程变为恰当方程，这个神奇的因式，就被称为积分因子。约翰率先发现了积分因子，为微分方程的求解开辟了新的路径。

从1766年至1777年，拉格朗日对参数变易法展开了系统性的拓展与深化，使其从相对简单的形式，

进阶为更为通用的版本。他敏锐地洞察到，这一方法在众多物理问题中有着极为广阔的应用前景。随后，拉格朗日凭借参数变易法，成功攻克了由三个二阶方程构成的方程组，展现出这一方法强大的解题效能。拉格朗日所完善的参数变易法，彻底解决了常系数线性方程的求解难题，这一成就堪称 18 世纪常微分方程求解领域的巅峰之作，它不仅是对传统求解方法的重大突破，更标志着常微分方程求解技术迈向了一个全新的高度。1775 年，拉格朗日再次展现出卓越的数学才能，将参数变易法巧妙地运用到 n 阶非齐次方程的求解中，并发表了通过常数变易法求非齐次线性方程特解的一般形式，为该领域的研究提供了关键的理论支撑。1775~1777 年期间，他进一步对参数变易法进行深度探索，将其发展到更为一般化的程度，极大地推动了变系数线性微分方程求解的研究进程，使得这一领域取得了突破性的进展。

3.3. 第三章，一阶微分方程的解的存在定理

19 世纪初，常微分方程的研究领域迎来了一次意义深远的重大转型：研究方向从传统的求通解，逐渐转变为致力于证明解的存在性。在这场具有划时代意义的转变过程中，柯西发挥了极为关键的作用，他的贡献犹如一座灯塔，照亮了微分方程研究的全新路径。

柯西在数学分析领域，尤其是微分方程范畴，留下了极为深刻且影响深远的印记。他是首位深入思考微分方程初值问题解的存在性的数学家，创造性地提出了“特殊带”概念，并大力发展了强函数方法。柯西敏锐地洞察到，在许多无法通过常规手段求出显式解的情况下，仍然能够从理论层面证明解的存在性。更为重要的是，他率先给出了微分方程解的存在性与唯一性的严格证明，这一成果为后续的研究奠定了坚实的理论基础。

在求通解和特解的先后次序这一关键问题上，柯西大胆突破了几个世纪以来数学家们的固有思维模式。他通过深入研究积分在物理和几何应用中所发挥的作用，深刻认识到微分方程中积分出现的任意常数和任意函数并非随意存在，而是应当被精准确定。基于此，柯西主张彻底改变传统的求解思路，将求特解以及深入探究特解的存在性置于研究的首要位置，使常数或函数的确定过程与积分求解紧密相连，不可分割。他曾阐述道：“每一个问题成为完全确定，这种情况不只能使问题的已知解简化，而且也允许动手解决新的问题。”正是这一极具前瞻性的观点，引发了著名的“柯西问题”，在数学界激起千层浪。

在柯西的引领与推动下，常微分方程的研究彻底告别了单纯的“求通解”时代，成功迈入了以“求解定解问题”为核心的全新发展阶段，为后续的数学研究开辟了更为广阔的天地。

常微分方程理论在长达百年的求解热潮中，始终在探寻着理论的完善之道，恰似在黑暗中寻找黎明曙光，而柯西的卓越工作，终于为这份漫长等待画上句号，成功填补了这一关键空白。

回溯至 19 世纪初，当时整个数学分析领域正经历着大刀阔斧的整体改革，在这样的大时代背景下，常微分方程的研究方向也终于迎来了具有里程碑意义的转型：从过往执着于求通解，逐渐转向致力于证明解的存在性。存在性定理的横空出世，犹如一颗璀璨星辰照亮数学天空，标志着常微分方程理论从萌芽走向根本形成，搭建起了坚实的理论框架。

自那以后，常微分方程理论挣脱束缚，迎来了蓬勃发展的黄金时期，在数学研究的广袤天地中不断开疆拓土，绽放出绚烂夺目的光彩，持续推动着数学领域的深度发展与创新突破。

3.4. 第四章，高阶微分方程，包括求解高阶微分方程的常数变易法、特征值法以及比较系数法等重要方法

微分方程理论里的特征方程，又被称作指标方程或辅助方程，其起源正是 n 阶常系数齐次方程求解的欧拉待定指数函数法。1739 年 9 月 15 日，欧拉在回信中首次提及“特征方程”，彼时他将其描述为有限的代数方程，简单来说，就是代数方程。值得注意的是，欧拉在这封信里并未说明他是如何得出这

个代数方程的。直到 1743 年，他在论文中再次提到这一概念，并正式将其命名为特征方程。

特征方程方法的引入，堪称神来之笔。它巧妙地将高阶微分方程的求解难题，转化为相对简单的代数方程求根问题。这一转变，大幅降低了求解的难度，让原本复杂棘手的问题变得更具可操作性。同时，也再一次有力地证明了代数方法在解决分析问题时所发挥的关键作用，展现了不同数学分支之间相互交融、相辅相成的魅力。

欧拉长期高强度地进行数学研究和写作，用眼过度。在 1735 年，他为了计算一个天文学问题(关于月球的运动)，连续工作了三天三夜，劳累的工作让他的右眼视力急剧下降，随后不久右眼就失明了。1743 年，欧拉给出了 n 阶常系数线性齐次方程的完整解法，这无疑是高阶常微分方程求解领域的重大突破，如同在未知的迷雾中开辟出一条崭新道路，引领着数学家们踏出了高阶微分方程求解的关键第一步。但不幸再次降临，在他的左眼本来就承受巨大压力的情况下，又患了白内障等疾病。随着病情的加重，1766 年他的左眼也完全失明了。尽管遭受双目失明的巨大打击，欧拉凭借着强大的记忆力和心算能力，在助手的帮助下，依然坚持数学研究和著书立说，并且成果依然丰硕。

3.5. 第五章，线性微分方程组

朗斯基于 1778 年出生在波兰。他的研究领域广泛，在数学分析、行列式理论等方面都有重要贡献。他最为人们熟知的成就是提出了朗斯基行列式，这一概念在判断函数组的线性相关性以及线性微分方程解的结构等方面有着关键作用，为相关数学理论的发展和应用奠定了坚实基础。朗斯基行列式主要用于判断一组函数是否线性无关，在研究微分方程组过程中具有重要应用。

意大利数学家朱塞佩·皮亚诺在 1888 年的著作《微分方程与定义几何》中首次明确提出矩阵指数的形式定义，并将其应用于线性微分方程组的求解。皮亚诺是首个系统地将矩阵指数与微分方程解结合起来的学者。因此，皮亚诺被明确视为矩阵指数求解线性微分方程组方法的创始人。

拉普拉斯是法国著名的数学家、天文学家和物理学家。拉普拉斯在数学领域贡献卓越，他提出的拉普拉斯变换在数学分析、工程等诸多领域有着广泛应用，为解决线性微分方程(组)等问题提供了重要方法。在天文学方面，他致力于天体力学研究，在《天体力学》中对太阳系的稳定性等问题进行了深入探讨，提出了著名的拉普拉斯星云假说，对太阳系起源的研究产生了深远影响。在物理学上，他也有诸多建树，如在概率论、位势理论等方面都有重要成果。他以其深刻的洞察力和严谨的数学推导，为现代科学的发展奠定了坚实基础，被誉为“法国的牛顿”，在科学史上留下了浓墨重彩的一笔。

4. 教学案例——欧拉特征值法求解微分方程教学设计

4.1. 教学目标

本次教学旨在让学生牢固掌握欧拉特征值法求解微分方程的原理与步骤，能够熟练运用该方法准确解答各类相关方程。通过深入剖析特征方程与微分方程解之间的内在联系，培养学生逻辑推理和数学运算能力。在教学中融入欧拉的生平故事、学术成就等数学文化内容，让学生感受大师的智慧与探索精神，体会数学文化的魅力，激发学生对数学的热爱，同时领悟数学知识在历史长河中的传承与发展。

4.2. 教学重难点

重点是欧拉特征值法求解常系数线性齐次微分方程的方法与步骤，理解特征根与通解的对应关系；难点是理解欧拉特征值法的原理，运用复数知识处理复特征根情况。

4.3. 教学方法

讲授法、讨论法、问题驱动法结合，融入数学文化故事激发学生学习兴趣。

4.4. 教学过程

(1) 课程导入：欧拉一生成果丰硕，在多个数学分支留下不可磨灭的印记。他 13 岁入读巴塞尔大学，17 岁成为巴塞尔大学第一位年轻的硕士，堪称天才。他在数论领域提出欧拉定理，建立起数论中整数与余数的关键联系；在几何方面，欧拉公式简洁而优美，深刻揭示了多面体的顶点数、棱数和面数之间的关系。欧拉还有个有趣的故事。欧拉小时候，有一次，父亲计划用 100 米篱笆围羊圈，原打算围成长 40 米，宽 25 米的长方形，但这样一来，100 米的篱笆不够，欧拉父亲不知所措。小欧拉开动脑筋，发现将羊圈围成边长是 25 米的正方形，不但篱笆够用，还能增大面积，使得每只羊的活动空间更大。欧拉凭借数学智慧帮父亲解决难题，展现出过人天赋，也让我们看到数学在生活中的奇妙应用。在研究物理问题时，欧拉大量运用微分方程，为解决实际问题提供了有力工具，而他提出的欧拉特征值法，更是求解微分方程的关键方法。

(2) 知识回顾：复习微分方程基本概念、一阶线性微分方程解法，为新课铺垫。

(3) 原理讲解：以二阶常系数线性齐次微分方程为例，推导欧拉特征值法原理，引入特征方程概念，阐述通过特征方程根确定微分方程解的思路。

(4) 方法步骤：总结求解步骤，包括写出特征方程、求解特征根、根据根的情况确定通解形式，举例说明不同类型特征根对应的通解。

(5) 例题讲解：讲解典型例题，示范解题过程，强调细节与易错点，让学生上台板演，及时纠错指导。

(6) 数学文化融入：18 世纪，欧拉在研究力学、天文学问题时，为求解复杂的常系数线性微分方程，开创性地提出了欧拉特征值法的雏形。他通过将微分方程转化为代数方程，巧妙利用特征根确定解的形式，为微分方程求解开辟了新路径。之后，拉格朗日、柯西等数学家不断完善和拓展，使其理论更严谨、应用更广泛，逐渐成为现代数学分析和工程计算的重要工具。数学文化像催化剂，推动数学发展。数学家们的交流、传承，不同文化背景下数学思想的碰撞融合，催生出新理论、新方法。它也塑造着我们的思维，鼓励从不同角度思考问题，培养逻辑推理与创新能力。

(7) 课堂练习：布置练习题，让学生巩固知识，教师巡视指导，了解学习情况。

(8) 课堂总结：回顾主要内容，强调重点，解答疑问，布置课后作业。

4.5. 教学反思

在微分方程课程的教学实践中，欧拉特征值法作为求解线性常系数齐次微分方程的关键内容，在教学实践中有诸多值得总结与反思之处。从教学内容来看，欧拉特征值法以指数函数假设解为切入点，通过推导得出特征方程，将微分方程求解转化为代数方程求解，这一思路体现了数学知识间的巧妙关联。在讲解时，从基础的实根情形入手，逐步深入到重根、复根情况，符合学生从易到难的认知规律。不过，在复根部分，欧拉公式的运用对学生的复数知识储备和数学抽象思维要求较高，部分学生理解起来较为吃力，后续应适当增加复数运算与三角函数关系的复习内容，帮助学生更好地掌握这一难点。在课堂互动中发现，部分学生在独立解题时，会出现特征方程建立错误、特征值求解失误等问题，说明在今后的教学中，应增加课堂练习时间，实时给予学生反馈和指导，及时纠正错误。

在后续教学中，我将进一步优化教学内容，合理安排知识点的讲解顺序，加强与学生的互动交流，及时了解学生的学习困难并给予针对性的帮助，同时引入更多实际应用案例，让学生体会微分方程在解决实际问题中的重要作用，提升学生的学习兴趣和应用能力。

5. 数学文化融入《常微分方程》课程教学效果

5.1. 实验设计

(1) 实验对象：选择本校数学与应用数学 24 级 111 位学生为实验组——A 组，本校数学与应用数学

23 级 62 位学生为对照组——B 组，两班基础水平无显著差异。

(2) 实验变量：自变量是数学文化融入教学，在 A 组教学中适时融入数学史、数学家故事、数学思想发展等内容；B 组采用传统教学方式。因变量是学生的学习成绩、学习兴趣和学习态度。

(3) 实验时间：一个学期，涵盖《常微分方程》主要教学内容。

5.2. 数据收集

收集 A 组学生 2024~2025 第一学期《常微分方程》期中、期末考试成绩，B 组学生 2023~2024 第一学期《常微分方程》期中、期末考试成绩。试卷难易程度差不多，内容涵盖了微分方程基本概念、求解、应用等知识点，题型包含选择题、填空题、计算题、证明题和应用题等。此外，借助学习通软件，我们还收集了两个组的学生在上课期间考勤、作业、课堂表现得分。

5.3. 数据统计分析

依据本校本专业人才培养方案，将考勤、作业、课堂表现得分当作平时分，并将平时成绩、期中考试成绩和期末考试成绩分别以 30%、20%和 50%的比例计入总成绩，借助统计软件得到每个学生的总成绩。在此基础上，利用 SPSS 软件计算两组学生的平均成绩，A 组平均成绩为 65.98 分，明显高于 B 组的 61.52 分。

5.4. 结论

结果表明，在实验组中，由于数学文化巧妙融入《常微分方程》课程教学，学生的学习热情被极大地激发出来。他们不再觉得课程只是单调乏味的公式推导，而是能从数学文化的丰富内涵中，深刻领略这门学科的独特魅力。与之形成鲜明对比的是，对照组学生在学习积极性和成绩表现上均稍显不足。基于此，我们可以确切地得出结论：将数学文化融入《常微分方程》课程，不仅能够有效激发学生的学习兴趣，还对提升教学效果有着显著的促进作用。

6. 总结

在《常微分方程》的教学过程中，系统且巧妙地融入数学文化，从课程导入到知识讲解，全方位渗透数学文化元素，能有效拨动学生的心弦，激发他们探索课程知识的兴趣，使其不再视学习为苦差，而是主动开启求知之旅。与此同时，这种融合也在潜移默化中重塑教学格局，从课堂氛围的营造到知识传递的效率，都得到全方位提升，显著促进教学效果朝着更优质的方向发展。

基金项目

江西省高等学校教学改革研究省级课题(JXJG-24-22-1)；萍乡学院一流课程(20220625)；萍乡学院科研反哺教学专项课题(2024D0502)。

参考文献

- [1] 杨莹, 王维琼, 杨丽娟. 基于建构主义学习理论的《高等数学》课程教学设计与实践——以“对弧长的曲线积分”为例[J]. 高等数学研究, 2025, 28(01): 102-104+119.
- [2] 罗菊珍. 多元智能理论在高校教育中的实践与评估[J]. 教育教学论坛, 2024(33): 119-122.
- [3] 刘金海, 代钦. “数学·哲学·教育：郑毓信先生的学术人生”[J]. 数学教育学报, 2024, 33(6): 95-97.
- [4] 陈学雷. 牛顿-莱布尼茨的微积分发明优先权之争(上)[J]. 科学, 2024, 76(4): 53-58+69.
- [5] 陈学雷. 牛顿-莱布尼茨的微积分发明优先权之争(中)[J]. 科学, 2024, 76(5): 50-55.
- [6] 陈学雷. 牛顿-莱布尼茨的微积分发明优先权之争(下)[J]. 科学, 2024, 76(6): 58-62+69.
- [7] 任瑞芳. 常微分方程理论的形成[D]: [博士学位论文]. 西安: 西北大学, 2008.
- [8] 朱能, 尹建东. 数学文化融入“常微分方程”教学的探索与实践[J]. 科教文汇, 2020(31): 54-56.