

MPCK视角下的余弦定理教学设计

罗 川

深圳市红岭教育集团大鹏华侨中学, 广东 深圳

收稿日期: 2025年11月5日; 录用日期: 2025年12月12日; 发布日期: 2025年12月23日

摘要

MPCK是由数学学科知识、一般教学法知识以及有关数学学习的知识融合而成,此理论框架能为数学教师的教学设计提供指导。文章对MPCK理论框架的概念进行了介绍,并从MPCK视角出发,简述了余弦定理的教学设计过程,最后从MPCK的视角提出数学教师进行教学设计时需注意的三个方面。希望对中学数学教师教学水平的提升有所助益。

关键词

MPCK, 余弦定理, 教学设计

The Teaching Design of Cosine Theorem from the Perspective of MPCK

Chuan Luo

Shenzhen Hongling Education Group Dapeng Overseas Chinese Middle School High School, Shenzhen
Guangdong

Received: November 5, 2025; accepted: December 12, 2025; published: December 23, 2025

Abstract

MPCK is a fusion of mathematics subject knowledge, general pedagogical knowledge and knowledge about mathematics learning. This theoretical framework can provide guidance for mathematics teachers' teaching design. This paper introduces the concept of MPCK theoretical framework, and briefly describes the teaching design process of cosine theorem from the perspective of MPCK. Finally, from the perspective of MPCK, it puts forward three aspects that mathematics teachers should pay attention to in teaching design. It is hoped that it will be helpful to improve the teaching level of middle school mathematics teachers.

Keywords

MPCK, Cosine Theorem, Teaching Design

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

高中数学知识往往抽象难理解,教师只具备数学学科知识是不足以设计并呈现出一节精彩的好课的。因此,高中数学教师在拥有扎实数学学科知识的同时,还需具备一般教学法知识及有关数学学习的知识。目前,不乏有从 MPCK 视角研究数学教学的文章,也不缺少有关余弦定理教学设计的文章,但未找到用 MPCK 视角来对余弦定理这节课进行教学设计的文章。本文从 MPCK 视角出发,阐述了应用此理论所开展的余弦定理的教学设计,为一线高中数学教师提供参考。

2. MPCK 的概念介绍

美国著名的教育家舒尔曼于 1986 年提出了教师专业知识结构理论,该理论的核心要素即为学科教学内容知识(Pedagogical Content Knowledge),简称 PCK [1]。黄毅英教授则在 PCK 的基础上提出 MPCK 的结构模型,他把数学教师从事专业教学所应具备的核心知识称为 MPCK (Mathematics Pedagogical Content Knowledge)。MPCK 是由数学学科知识(简称 MK)、一般教学法知识(简称 PK)以及有关数学学习的知识(简称 CK)三者融合而成[2]。MK 包含了数学学科内容知识、数学观念、数学思想方法以及数学史知识;PK 包括教育理论、教育观念、教学知识及课程知识;CK 则包含了学生学习的认知因素和非认知因素知识、学生发展的知识以及学习环境的知识[3]。

在实际的数学教学中,教师应综合应用 MK、PK 以及 CK,以便使数学从科学形态转化成教育形态的数学知识,以此促进学生对数学的理解,提高数学课堂的教学效率。

3. MPCK 视角下的余弦定理教学设计

本文从 MPCK 视角出发,简述余弦定理的教学设计过程。余弦定理选自人教 A 版(2019)高中数学必修第二册第六章第四节中《余弦定理、正弦定理》第一课时。该节内容既承接前面学习的向量知识,又为后面即将学习的正弦定理及综合应用做了铺垫。

教师需结合 MPCK 理论来进行教学设计。先从数学学科知识即 MK 的角度分析,《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》中对本节课的要求是:借助向量的运算,探索三角形边长与角度的关系,掌握余弦定理[4]。学生已学习过平面向量的概念、运算、基本定理及坐标表示,这为用向量法推导余弦定理打下了良好的基础。再从一般教学法知识即 PK 的角度分析,本节课教学可以从实际情境出发激起学生探究兴趣,采取讨论法进行教学,通过问题串引导学生小组讨论,推导出余弦定理,经历知识的生成过程。最后从有关数学学习的知识即 CK 的角度分析,高一学生由具体到抽象的认知能力及语言概括归纳能力相对欠缺。结合学生的最近发展区,设计适当的层层递进式的问题串,逐步引领学生经历探究、猜想、证明的过程并用数学语言准确总结出余弦定理,进而理解知识的本质。

3.1. 设计教学目标

根据上述分析可制定出本节课的教学目标:(1)能在实际问题情境中主动探索并发现余弦定理,掌握

用向量法推证余弦定理,能应用余弦定理解简单的三角形;(2)通过观察、推导、比较,由特殊到一般归纳出余弦定理,培养观察与逻辑思维能力,能够将生活问题抽象概括成数学问题,提高数学抽象、数学运算、数学建模等核心素养。

3.2. 设计实际问题情境

问题一 在生活中,老师曾遇到过这样一个问题,需要同学们帮忙解答。如图1,有一次老师从家出发去电影院看电影,但因道路临时施工需要绕道而行,这时候有两种方案摆在老师面前。方案一:与原道路成 90° 角,走600米到中转站 B_1 ,再走一段路到达电影院。或者选择方案二:与原道路成 60° 角,走500米到中转站 B_2 ,再走一段路到达电影院。请同学们思考,如果是你的话,在同等条件下,你会怎么选择?哪种方案更省时省力?

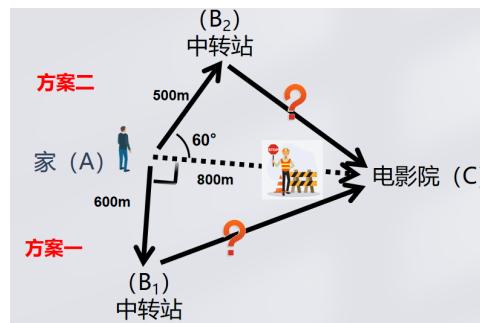


Figure 1. Actual problem situation

图1. 实际问题情境

问题二 如何将实际问题转化为数学问题?

问题三 在 $\triangle ABC$ 中,已知 b 边和 c 边及 $\angle A$,怎样用 b , c 和 $\angle A$ 来表示 a ?

问题四 在 $\triangle ABC$ 中,已知 b 边和 c 边及 $\angle A$,怎样用 b , c 和 $\angle A$ 来表示 a^2 ?

问题五 在 $\triangle ABC$ 中,已知 a 边和 c 边及 $\angle B$,怎样用 a , c 和 $\angle B$ 来表示 b^2 ?

在 $\triangle ABC$ 中,已知 a 边和 b 边及 $\angle C$,怎样用 a , b 和 $\angle C$ 来表示 c^2 ?

将实际问题转化为数学问题,并通过问题串的形式逐步引导学生深入分析。问题一中涉及的两种方案,方案一是特殊的直角三角形,已知直角三角形的两边求第三边的问题,学生根据初中所学勾股定理知识可以求解出第三边的长度,即 $a^2 = b^2 + c^2$ 。方案二则是生活中和数学问题中都常遇到的普通“非直角三角形”,通过问题二和问题三的引导,学生体会到其本质则是已知三角形两边及其夹角,求第三边的问题。两种方案的设计上暗含了从“特殊”方案到“一般”方案的过程,也为后面用向量法证明余弦定理时,从特殊的直角三角形出发做铺垫。接下来教师通过问题四引导学生联想到前面学习过的向量的数量积,并给学生五分钟时间进行小组讨论,探究:已知三角形中的 b 边和 c 边以及 $\angle A$,如何用向量法表示 a^2 。在师生共同努力下探究出 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 。接着教师通过问题五进行追问,如果将条件变换一下,已知三角形中的 a 边和 c 边以及 $\angle B$,如何表示 b^2 。已知三角形中的 a 边和 b 边以及 $\angle C$,如何表示 c^2 。通过类比,学生得出: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ 和 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 。得出余弦定理后,教师引导学生尝试用文字语言进行描述,以此锻炼学生的概括能力。接着教师引导学生自主思考已知三角形的三边怎样确定三角形角的问题,进而得到余弦定理的推论。接下来,教师可渗透数学史,介绍余弦定理最早可追溯到古希腊时期的几何学之父欧几里得,进一步助力学生理解余弦定理的本质。

从MK角度分析,情境导入的问题能激活学生已有的关于勾股定理知识的经验,教师又通过引导学生回忆向量的相关知识,为余弦定理的证明做了充分的铺垫。引入数学史,帮助学生理解余弦定理的来

龙去脉。

从 PK 角度分析, 教师采用多种教学方式, 由生活情景问题导入到学生小组讨论, 通过问题串引导, 为学生搭建旧知到新知过渡的桥梁。教师遵循启发性、循序渐进等教学原则, 由浅入深、由易到难地设置问题, 启发学生思考。

从 CK 角度分析, 学生经历用向量法证明余弦定理的过程, 体会向量法证明的简洁性, 抓住边角关系的本质联系。此过程也渗透了类比的数学思想, 同时促进学生数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养的发展。

在此过程中, 考虑到给出的实际问题情境是求数学问题中三角形一条边的边长, 而余弦定理给出的则是三角形一条边的平方的形式, 如何建立起由边长到边长的平方的联系, 引导学生自然而然地想到利用三角形一边的平方来表示与剩余两边的关系则是一大难点。从 PK 的角度出发, 考虑用怎样的教学方法为学生建立知识间的关联。于是在实际问题情境中给出了两种方案, 而方案一刚好是学生熟悉的直角三角形已知两边求第三边的问题, 学生能自然想到利用勾股定理 $a^2 = b^2 + c^2$ 来求 a 边, 对于方案二中求一般三角形的一边, 则考虑到 CK 中的认知因素, 学生通过对比联想到能否用 b , c 和 $\angle A$ 来表示 a^2 。这样就为 MK 中数学新知余弦定理的学习搭建了思维阶梯。

3.3. 解决实际问题

接下来运用余弦定理的知识解决情境导入的问题, 方案一中 $a^2 = b^2 + c^2 = 800^2 + 600^2 = 1000^2$, 由此求得 $a = 1000$ m, 则方案一需要走的路程为 $c + a = 600 + 1000 = 1600$ m, 再看方案二,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 800^2 + 500^2 - 2 \times 800 \times 500 \times \frac{1}{2} = 490000 \text{ m}, \therefore$$

$a = 700$ m, 方案二需要走的路程为 $c + a = 500 + 700 = 1200$ m, 所以方案二更省时省力。学生经历了从实际问题的提出到问题的分析再到问题的解决过程, 体会数学来源于生活, 应用于生活, 提升解决实际问题的能力。

3.4. 总结收获并布置分层作业

课堂最后先请学生从知识角度以及数学思想方法角度总结本节课的收获, 接着教师补充完善(如图 2 所示)。并设置分层作业。包括必做题和选做题(如图 3 所示)。

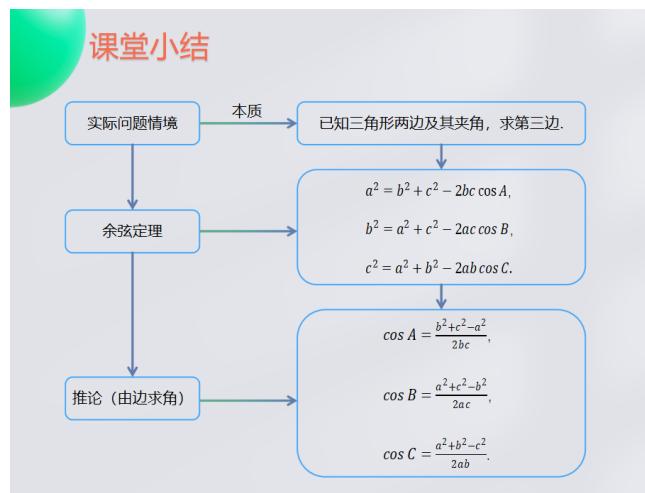


Figure 2. Classroom summary content
图 2. 课堂小结内容

分层作业

必做1：在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=5, b=2, C=60^\circ$, 求 c

必做2：在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=2, b=\sqrt{2}, c=\sqrt{3}+1$, 解这个三角形

选做1：向量法主要从数的角度证明余弦定理，你能否从形（几何）再作证明？
仍然以这个锐角三角形为例。

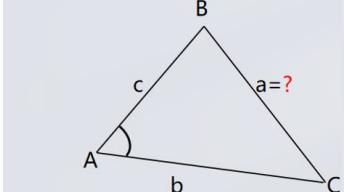


Figure 3. Hierarchical homework content
图 3. 分层作业内容

从 MK 角度分析，课堂总结进一步概括和归纳了本节课核心知识点，加深学生对余弦定理的理解，而分层作业的设置，能让学生在巩固所学知识的基础上，探寻不同的证明方法。从 PK 角度分析，通过学生发言总结，发现学生尚未解决的问题，提升学生语言表达归纳能力，亦可营造良好的课堂学习氛围。从 CK 角度分析，学生总结归纳本节课的知识内容，是夯实数学基础、培养数学核心素养的重要方法。课后分层作业的布置也可培养学生的发散思维能力。

4. 结束语

MPCK 视角下的余弦定理教学设计首先通过现实问题情境激发学生探究兴趣，通过自主探究、小组讨论等方式运用向量法证明余弦定理，再引入数学史加深余弦定理本质的认识，接着运用定理解决导入的实际问题，最后由学生归纳本节课的内容并布置分层作业。坚持以数学问题驱动教学，引导学生发现、分析、直至解决问题，逐步引领学生形成科学严谨的数学态度。

基于此，数学教师在进行教学设计时应注意以下几方面。第一，数学教师要重视课堂中的每个数学问题的设计。教师应深入研究教材，结合学生的思维水平和认知基础设计符合学情的数学问题，这是有效提高教师自身 MPCK 水平的重要方法。第二，重视情境的设计，在数学课堂中构建适合的情境，更好地突显数学知识的本质，提升教学质量。贯彻立德树人理念，将数学文化融入课堂教学，助力学生全面发展。第三，数学教师需不断打磨自身，在不断提升自身数学知识的同时，还应重视教学反思。深入理解数学知识、了解学生情况，对每节数学课进行再创造，结合学科及教法知识，主动构建自身 MPCK，不断提升专业能力。

参考文献

- [1] Shulman, L. (1987) Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, **57**, 1-23. <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- [2] 黄毅英, 许世红. 数学教学内容知识——结构特征与研发举例[J]. 数学教育学报, 2009, 18(1): 5-9.
- [3] 李渺, 宁连华. 数学教学内容知识(MPCK)的构成成分表现形式及其意义[J]. 数学教育学报, 2011, 20(2): 10-14.
- [4] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.