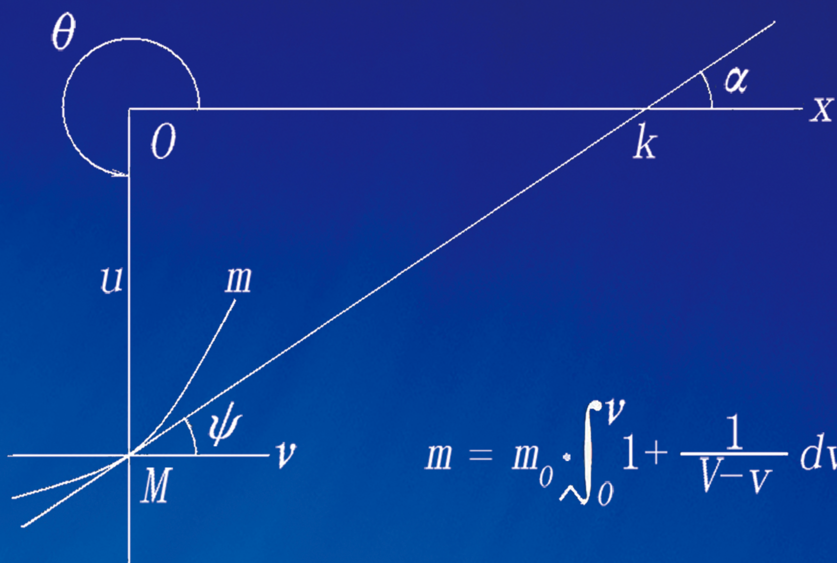
Hans 汉斯

微积开概念

—由类星体研究引发的概念

包学行 著



$$m = m_0 \cdot \int_0^v 1 + \frac{1}{V-v} \, dv$$

汉斯出版社

微积开概念

——由类星体研究引发的概念

Microjikai Concept

—Concepts Inspired by Quasar Research

包学行 著

Hans 汉斯

微积开概念——由类星体研究引发的概念
Microjikai Concept—Concepts Inspired by Quasar Research

出版发行：汉斯出版社
ISBN: 978-1-61896-792-3
版次：2021年5月第1版
Web: http://www.hanspub.org/
地址：5005 Paseo Segovia, Irvine, CA 92603-3334, USA

有任何疑问请发邮件至：
book@hanspub.org

电子版定价：开源免费
彩印版定价：225.00 元(预计 2021 年 5 月出版发行)

作者个人详细简历

早期：

作者**包学行**，1950年7月7日出生于浙江省温州市，父亲是位爱好数学、物理、天文、几何光学的眼科医师。作者在学龄前未进过幼儿园，是得到父亲的启蒙教育，用玩九连环的不同难度等级的组合状态的解出最小步数，启蒙数列的意识；用15巧板、立体积木等启蒙空间思维，作者在学龄前能写阿拉伯数字的空心字，小学时曾想象着反字笔划的边界在滑石上刻印章。

作者小学四年级时，父亲在自己绘制**对数视力表**时(现已是国家标准)，使用的不锈钢计算盘引起作者兴趣，父亲就教作者用计算盘算乘除法。当时作者很惊奇计算盘的功能，及其上面的非线性的刻度。后来作者就用父亲的绘图工具画剪大小二个纸板圆盘，用鞋眼扣钉成一个计算盘的胚胎。用实验法定出了1、2、5三点刻度，再用乘除法定其它点刻度，但总只能定出部分点刻度，无法制出具有全部目标刻度的计算盘。因这段经历作者初中学习对数时，特别认真，每课前都已自学了下一课。但却在1966年快到学对数换底公式前，爆发了文化大革命(简称：文革)，成为停课的初中三届生，作者也全心投入了文革。因此使作者当时脑中无对数可换底的概念。正是因为作者脑中无对数可换底的概念，也无高等数学微分方程的概念，使作者后来产生微积开概念。

职业、教育、爱好、自学 经历：

1964年，**初中学习至初二级的中途，文革开始参加文革，停学**

1966年，黑六类滚出学校，在家自学：无线电知识，及爱好制作矿石收音机、火花式发射电台，氖泡音频发生器(电子琴试验)等等

1968年，临时工、开岩、基建、描图、家教等

1969年，黑龙江生产建设兵团，农工，放牧员

1975年，作者产生微积开概念萌芽，并开始自学高等数学、天文学教程，大学物理，天体物理

1978年，温州医学院附属一院，医生，为读电子自动化专业转做电工，设备维修工

1980年，**考入温州业余科技大学(现为：温州职业技术学院)，电子自动化专业(半脱产，4年制)学习**

1981年，中国数学会运筹学会，会员

1982年，中国华东运筹学会，会员

1984年，**温州业余科技大学，电子自动化专业(半脱产， 4 年制)毕业**

1984年，温州医学院附属一院，设备维修技师

1987年，取得了压控液晶显示装置与双色围棋棋子2项专利

1993年，温州市住房改革办公室，电脑室，电脑维护技师

1995年，考取全国计算机等级考试(National Computer Rank Examination，简称NCRE)，三级A证书

1995年，温州市住房公积金管理中心，金融经济师

1996年，温州市房产管理局，档案室，电脑管理员兼程序员

为住房公平分配，不计个人得失，在没有专项经费的情况下，借用现成的5个独立的数据库数据，开发了五库联查软件。以各单位提交保存在软盘上txt格式的文本文件(姓名、身份证号)为输入，把软盘插在486电脑软驱上，半小时查出约3千人在5个住房数据库(普查、产权、公房、提租、房改)中个人住房情况，用一个下午在针打式打印机上打印出全部报表。

1997年，首年五库联查软件为各单位软盘提交数据进行查询服务；并对房管部门自管公房房改出售的购房人现有住房情况进行查询，以确定是否有住房超标情况。

1997年，温州市房产管理局，图书室，图书管理员，并自行开发了图书管理软件

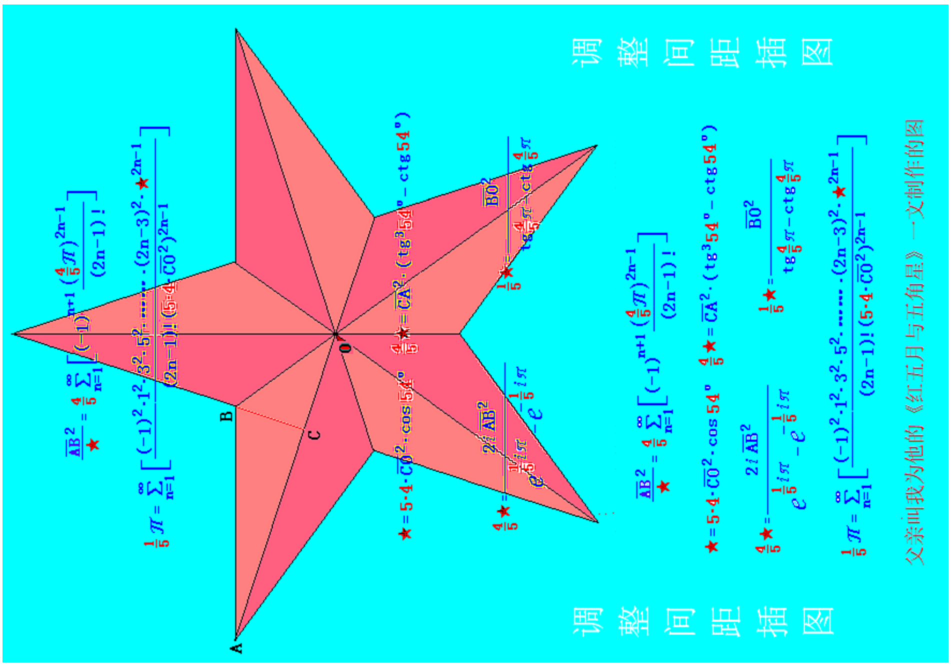
2003年，温州市住房公积金管理中心，综合档案室，档案管理员

期间开发了档案人机双可读档案条码程序，优化了档案管理。

在1992年至退休的在职期间，4次被评为先进工作者。

2010年，退休。开始了重新研究微积开与类星体的时期。

2014年，因研究类星体需要，申请加入了郭守敬望远镜LAMOST网络化虚拟工作平台。



微积开概念

包学行

关键字：**微对数；微开方程；利率；人口增长率；红移；引力红移；类星体**

内容提要

1. 微积开概念为作者在求解类星体问题中产生，本文介绍其产生背景，介绍了微积开的基本概念——微开、微对数、微根、定积开、微开方程、微对数方程、微根方程等，以及这些概念在物理、天体物理、动态几何、金融、人口统计等领域的意义与应用例子，在这些例子中微积开概念的优越性表现为联系问题的高效率。

2. 论述了对数量纲危机的解决办法。

3. 在相对论基础下严格地论证了引力红移应为(下式中 k 为自然数)

$$\begin{aligned} z_y &= -\frac{\Delta v}{v_0} = 1 - \exp\left(-\frac{GM}{c^2R}\right) \\ &= \left(\frac{GM}{c^2R}\right) - \frac{1}{2!}\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^3 - \frac{1}{4!}\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^4 \\ &\quad + \cdots\cdots + \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^k + \cdots\cdots; \end{aligned}$$

原广义相对论引力红移公式是弱引力下的一阶近似公式。

4. 按本文的理论求解验证类星体 SDSS DR7 等数据，作出的类星体赫罗图，在密集的类星体区域中却有一条鸿沟，鸿沟的参数应与鸿沟二侧的类星体参数相近，但类星体却不会落入鸿沟，且二岸类星体光谱特性有明显差异，验证支持了本文理论的正确性。值得天文学家深入分析。

Microjikai Concept

Bao Xuexing

Keyword：Micrologarithm; Microsquare Equation; Interest Rate; Population Growth Rate; Redshift; Gravitational Redshift; Quasars

Content Abstract

1. Anew concept of microjikai is created by author in solvingthe problem of quasars. This paper introduces its creating background, and the related new concepts—microsquare, micrologarithm, microroot, definitejikai, microsquare equation, micrologarithm equation, microroot equation etc.And the applications of these concepts in the fields of physics, astrophysics, dynamic geometry, finance, population statistics will show its advantage of high efficiency.

2. Discusses the solution it is solve dimensional crisis of logarithm.

3. Based on the theory of relativity, it can be strictly provedthat the gravitational redshift is that

$$
\begin{aligned}
z_y &= -\frac{\Delta v}{v_0} = 1 - \exp\left(-\frac{GM}{c^2R}\right) \\
&= \left(\frac{GM}{c^2R}\right) - \frac{1}{2!}\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^3 - \frac{1}{4!}\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^4 \\
&\quad + \cdots\cdots + \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^k + \cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

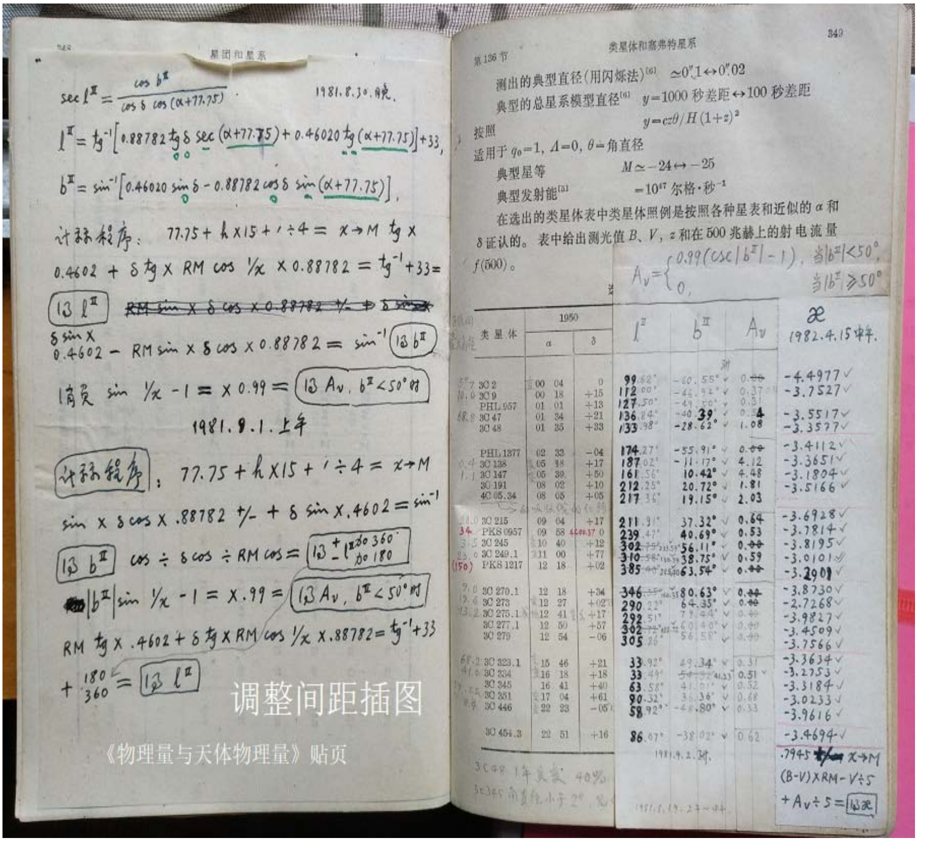
the original general relativity gravitational redshift formula is a first-order approximate formula under weak gravitational.

4. According to the theory of solving the verification of quasars SDSS

DR7 data, to make the quasar Hertzsprung Russell diagram, a gap can be found in the dense quasarregion. And the gap parameters should be similar to divide both sides of the quasar parameters, but the quasars do not fall into the gap, it is worth deep analysis of astronomers.

征询反馈意见

作者自1975年手写落笔本书首稿至今，已经历了45年。其中对类星体SDSS DR7的计算分析也已经历近8年，其中参数变化修正，反复重算多次。文件编辑经历WPS、WORD、PDF不同时期的多个版本，最后才定稿。希望读者对其中存在的差错提出宝贵意见至Email：592519806@qq.com。

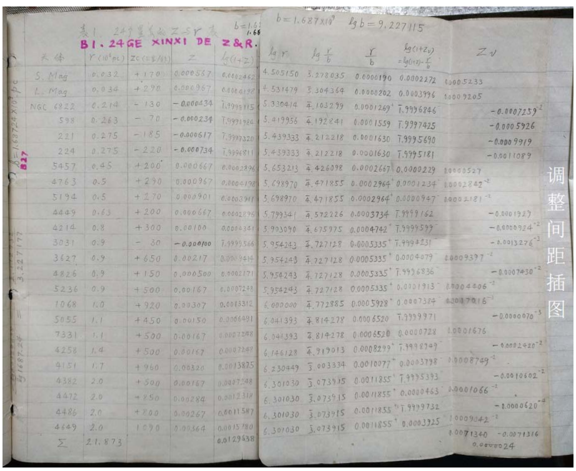


序言

微积开与微积分应属数学分析的二个不同分枝：微积分站在平直空间思考问题，而微积开站在非线性的对数空间思考问题。作为一个特例：星系光谱红移问题，用微积开概念解决是个初等数学问题，而用微积分解决，是一个要用微分方程解决的问题。

微积开概念作为一种新的数学概念，其生命力在于：对适用问题能起到联系问题的高效率。作为一个特例：作者在“类星体的本质(验证 1)”中建立的类星体方程组，所有求解的量都可求得解析表达式，这就为以后的计算提高了效率。所以很多早期的计算作者都是用查《10 位对数表》加笔算加法完成，并在格子纸上作图。

微积开概念的产生至今已有四十多年了，但是目前很少有人知道微积开概念的意义。因此，想通过本文把微积开概念介绍给大家。微积开概念的产生与我接触问题与学习知识的序列有关。微积开概念萌芽产生于我学习高等数学之前，绝大部分的微积开概念产生于我学习高等数学的过程中。如果在大学毕业后才接触同样的问题，也许我就不会产生微积开概念了。



目　录

第一章　微积开概念的产生

1.1. 微对数概念的萌芽

这是我学习高等数学之前的事。1975 年的一天，我看到了《物理学的未知世界》一书，其中一段关于类星体的描述吸引了我，当时我曾将此段摘录于我的笔记本上：

> 宇宙扩张红移规律使我们能够精确地计算出……，计算结果是，星系间的距离每增加 10^{24} 厘米，离散速度每秒钟就加快 55 公里。

当时我还未找到计算星系距离与红移量关系的哈勃定律计算式，因为很想马上算一算星系距离与红移量的关系，因此作如下推导：

我猜想：星光传播单位时间后，光子的能量有一非常微小的损耗率 b，也就是星光经传播单位时间后能量变化倍率(剩余率)为 $1-b$。若星系距离为 r，光速为 c，那么光子传播经历的时间为 r/c。若 E_0 为光子从光源发出时具有的能量，E 为被观测时光子的能量值，那么星系距离 r 与光子能量变化的关系为

$$\frac{E}{E_0}=(1-b)^{\frac{r}{c}}, \tag{1.1.1}$$

红移量的定义为[1]

$$Z=\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}=\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}, \tag{1.1.2}$$

红移量为 Z 的星光从发出至传播到地球其能量的变化倍率为

$$\frac{E}{E_0}=\frac{h\nu}{h\nu_0}=\frac{\nu}{\nu_0}=\frac{c/\lambda}{c/\lambda_0}=\frac{\lambda_0}{\lambda}=\frac{1}{\frac{\lambda}{\lambda_0}}=\frac{1}{\frac{\lambda_0+\Delta\lambda}{\lambda_0}}=\frac{1}{1+\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}}=\frac{1}{1+Z}, \tag{1.1.3}$$

上式中 h 为普郎克常数，v_0 与 λ_0 为光子从星体发出时的频率与波长，v 与 λ 为光子被观测时的频率与波长，$\Delta\lambda$ 为光子的波长变化量。

结合(1.1.1)式与(1.1.3)式，得

$$(1-b)^{\frac{r}{c}} = \frac{1}{1+Z}, \tag{1.1.4}$$

对上(1.1.4)式取以(1 − b)为底的对数，再乘以 c，得距离 r 与红移量 Z 的关系为

$$r = c\log_{(1-b)}\left(\frac{1}{1+Z}\right). \tag{1.1.5}$$

上式中的 b 为一个远小于 1 非常微小的数，因此这是一种微对数概念的萌芽。但当时我仅意识到这是一种普通的对数概念。

上述的推导是为了让大家了解(1.1.5)式的来历原理，如果脑中有了这种对数的概念，并已了解这些量的意义，是不必列出(1.1.1)式与(1.1.4)式就可直接写出(1.1.5)式的。我当时就是由对数概念直接写出(1.1.5)式的。

后来找到了哈勃定律计算式后，才知哈勃定律与我的上(1.1.5)式不一样。我当时还未学过对数换底公式，因此就将上(1.1.5)式原封不动地写信告诉了紫金山天文台。紫金山天文台恒星室回信告诉我，他们对此式非常感兴趣，因为他们已用大量的类星体数据对该式作了验证。

后来我也就此请教几位热心自然科学的朋友，他们说这个问题他们是用微分方程解的，你怎么用初等数学的对数方法解出了，他们用微分方程再解了一次这个问题，并用对数换底公式将我的公式换底后，并设

$$H = -\ln(1+b), \tag{1.1.6}$$

得二者结果吻合为(详见本文的附录 A 用微分方程解距离红移问题)：

$$r = -\frac{c}{\ln(1-b)}\ln(1+Z) = \frac{c}{H}\ln(1+Z). \tag{1.1.7}$$

此后我就开始自学高等数学。后来，我用幂级数展开(1.1.7)式，得[2]

$$r=\frac{c}{H}Z-\frac{c}{2H}Z^2+\frac{c}{3H}Z^3-\frac{c}{4H}Z^4+\cdots\cdots. \tag{1.1.8}$$

在 Z<<1 时，忽略高次项保留一次项后，(1.1.8)式可简化为哈勃定律，即

$$r=\frac{c}{H}Z. \tag{1.1.9}$$

忽略高次项会引起把星系类天体距离确定偏远，把各星系的间距确定偏高，误把维系系统稳定的星系质量确定偏高。

中国科技大学天体物理组的一篇关于类星体统计分析的论文中，他们得出的结论为：红移量与距离的关系是[3]

$$r\propto Z-0.19Z^2, \tag{1.1.10}$$

在 $Z>1$ 时与哈勃的线性关系有明显的偏差。

在比较了展开式(1.1.8)式的系数与(1.1.10)式系数的差异后，使我意识到类星体的红移量 Z 中不仅仅只包含与距离有关的红移量，而且还包含与引力有关的红移量，只有分离出引力红移后，才能得出正确的类星体距离。否则将会误将类星体质能定得不可理解，误出难以理解的暗物质来(当时称为维里质量大于光度物质)。

于是我就要寻找引力红移公式，但手头一时找不到，只好自己推导，结果在推导中产生了定积开(它不是定积分)概念。

正是产生微积开概念过程，使我找到了一种从类星体红移量 Z 中分离出距离红移量与引力红移量的方法。

1.2. 定积开概念的产生

为了自己推导天体的引力红移公式，我的思路是这样的：按相对论的

质能关系，具有能量 $h\nu$ 的光子应具有质量 $m=h\nu/c^2$，h 为普朗克常数，ν 为光子频率。那么一个质量为 m 的光子脱离质量为 M，尺度半径为 R 的天体的表面至∞远处必得作功消耗能量而引起光谱红移，对于恒星发出的光子脱离其引力时，引力红移是很小的，因此光子质量 m 的变化也很小，先近似地设 m 为常量，设 G为万有引力常数，$R \le r \le \infty$，r 为光子传播路径上光子与星体中心的距离，那么光子脱离恒星，因作功的消耗，光子的能量变化量为(下式中的负号为引力方向与光子运动方向相反而加)

$$\begin{aligned}\varDelta E = \varDelta \nu h &\approx \int_R^\infty -\frac{GMm}{r^2}dr \\ &= \int_R^\infty -\frac{GMh\nu}{r^2c^2}dr \\ &= -\frac{GMh\nu}{c^2}\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr \\ &= -\frac{GMh\nu}{c^2}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty \\ &= -h\nu\frac{GM}{Rc^2},\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

恒星的引力红移可使用广义相对论的习惯的定义表示为

$$\begin{aligned}z_y &= \frac{\nu_0-\nu'}{\nu_0} = \frac{-\left(\nu'-\nu_0\right)}{\nu_0} = \frac{-\varDelta\nu}{\nu_0} \\ &\approx \frac{-\varDelta\nu}{\nu} = \frac{-\varDelta\nu h}{\nu h} = \frac{-\varDelta E}{h\nu},\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

它与天文学的红移量 Z 定义式(1.1.2)不一样，因此，本文用小写字母 z 表示使用广义相对论习惯定义的红移，加足标 y 后 z_y 表示为引力红移。将(1.2.1)式代入，得近似式

$$z_y = \frac{-\varDelta\nu}{\nu_0} \approx \frac{-\varDelta\nu}{\nu} = -\frac{-h\nu\dfrac{GM}{Rc^2}}{h\nu} = \frac{GM}{Rc^2}, \tag{1.2.3}$$

(1.2.3)式与广义相对论的引力红移公式最终引用计算式是一致的[4]。这

使我意识到广义相对论的引力红移公式{即式(1.2.3)}仅是一条适用于弱引力红移的公式，因为我在推导(1.2.3)式时近似设光子的质量 m 为常量。当一个光子脱离强引力场时，光子的质量变化很大，不能把光子质量作常量处理，所以(1.2.3)式不适用于强引力红移的。

因此我就考虑要计算光子 m 在变化过程中对(1.2.1)式的积分。这本是一个用微分方程解的问题，但我当时还未自学到微分方程部分，用定积分又解不出了。我就用如下的方法解决了这个问题：

设 $m = h\nu/c^2$ 为光子的瞬时质量，ν 为光子在 r 处时的瞬时频率，那么光子在距星体中心 r 处再远离至 $r + dr$ 处，在这 dr 路程中引力对光子作功为

$$\begin{aligned} dE &= -\frac{GMm}{r^2}dr \\ &= -\frac{GM\frac{h\nu}{c^2}}{r^2}dr \\ &= -\frac{GMh\nu}{c^2r^2}dr, \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

上式中的负号为引力的方向与光子的运动方向相反而加，在 $r + dr$ 处剩余的能量为

$$E + dE = h\nu - \frac{GMh\nu}{c^2r^2}dr, \tag{1.2.5}$$

传播距离 r 得增量 dr 后，能量变化倍率(比率)为

$$\frac{E + dE}{E} = \frac{h\nu - \frac{GMh\nu}{c^2r^2}dr}{h\nu} = 1 - \frac{GM}{c^2r^2}dr, \tag{1.2.6}$$

设光子在星体表面的频率为 ν_0，星体半径为 R，那么光子脱离星体表面至∞处它的能量将变为

$$
\begin{aligned}
E' &= h\nu' \\
&= h\nu_0\left(1-\frac{GM}{c^2\left(R+dr_1\right)^2}dr\right)\left(1-\frac{GM}{c^2\left(R+dr_1+dr_2\right)^2}dr\right) \\
&\quad \left(1-\frac{GM}{c^2(R+dr_1+dr_2+dr_3)^2}dr\right)\left(1-\frac{GM}{c^2(R+dr_1+dr_2+dr_3+dr_4)^2}dr\right)\cdots\cdots,
\end{aligned}
\tag{1.2.7}
$$

上式中的足标表示变量在各时点上的值，用连乘积符号可把上式表示为

$$
E' = h\nu' = h\nu_0 \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \varDelta r_i \to 0}} \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{GM}{c^2 r_i^2}\varDelta r_i\right), \tag{1.2.8}
$$

$$
r_1 = R, r_n \to \infty, \varDelta r_i = r_{i+1} - r_i
$$

这就产生了一种和定积分有点类同的运算，定积分计算的是无穷多项的和，而(1.2.8)式计算的是无穷多个因子的积。我当时把这种运算叫做乘积分，并把上述(1.2.8)式记作

$$
E' = h\nu' = h\nu_0 \prod\!\!\!\!\!\!\int_R^{\infty} 1-\frac{GM}{c^2 r^2}dr. \tag{1.2.9}
$$

并证明了计算乘积分的通用公式为

$$
\prod\!\!\!\!\!\!\int_a^b 1+f\left(x\right)dx = \exp\int_a^b f\left(x\right)dx. \tag{1.2.10}
$$

因此求得(1.2.9)式的值为

$$
\begin{aligned}
E' = h\nu' &= h\nu_0 \prod\!\!\!\!\!\!\int_R^{\infty} 1-\frac{GM}{c^2 d^2}dr \\
&= h\nu_0 \exp\int_R^{\infty} -\frac{GM}{c^2 r^2}dr \\
&= h\nu_0 \exp\left[\frac{GM}{c^2 r}\right]_R^{\infty} \\
&= h\nu_0 \exp\left(-\frac{GM}{c^2 R}\right),
\end{aligned}
\tag{1.2.11}
$$

对上式两边除 $h\nu_0$，得

$$\frac{v'}{v_0}=\exp\left(-\frac{GM}{c^2R}\right), \tag{1.2.12}$$

那么引力红移为

$$z_y=\frac{v_0-v'}{v_0}=1-\frac{v'}{v_0}=1-\exp\left(-\frac{GM}{c^2R}\right), \tag{1.2.13}$$

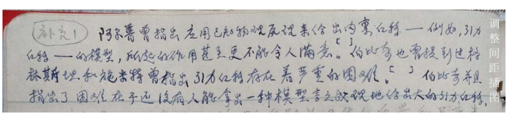
用(1.2.13)式，作为建立类星体方程组中的一条方程，分离了类星体的红移量中的引力分量后，得到类星体距离与星系距离为同一数量级，分析各项数据并进行验证，显示出其比大爆炸理论合理，详细请参阅“附录 B 类星体的本质(验证 1)”。近年又用类星体 SDSS DR7 数据作进一步的验证，进一步显示其比大爆炸理论合理，详细请参阅“附录 C 类星体的本质(验证 2)”。

将(1.2.13)式展开为幂级数，得[5]

$$\begin{aligned} z_y&=\frac{\Delta v}{v_0}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^k \\ &=\left(\frac{GM}{c^2R}\right)-\frac{1}{2!}\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^3-\frac{1}{4!}\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^4+\frac{1}{5!}\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^5+\cdots\cdots, \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

对于恒星，在 $GM/(c^2R)$很小时，忽略高次项，保留一次项即得到广义相对论的引力红移公式(1.2.3)。如太阳的引力红移用广义相对论的(1.2.3)式求得值为 $2.1215165067121\times10^{-6}$，而用微积开的引力红移公式(1.2.14)式求得值为 $2.1215142562703\times10^{-6}$，二者在前 5 位有效数值内无区别，第 6 位有效数起才有差别。

但对于类星体、脉冲星等强引力天体忽略高次项后，与实际情况会偏差很大，应用广义相对论的引力红移公式会很纠结；例如，黑洞理论中定义的“黑洞”应属于强引力天体，但却不能洽当地把广义相对论的引力红移公式应用于其中。


补充1 阿尔普曾指出应用已知物理原理来给出内禀红移——例如，引力红移——的模型，所起的作用甚至更不能令人满意。[ ] 伯比奇也曾提到过格林斯坦和施米特曾指出引力红移存在着严重的困难。[ ] 伯比奇并且指出了困难在于还没有人能拿出一种模型言之成理地给出大的引力红移。

为了把引力红移(1.2.13)式化为用天文习惯的红移量表示，作如下变换

$$
\begin{aligned}
z_y &= \frac{v_0 - v'}{v_0} = \frac{\frac{c}{\lambda_0} - \frac{c}{\lambda'}}{\frac{c}{\lambda_0}} = 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda'} = 1 - \frac{1}{\frac{\lambda'}{\lambda_0}} = 1 - \frac{1}{\frac{\lambda_0 + \lambda' - \lambda_0}{\lambda_0}} \\
&= 1 - \frac{1}{1 + \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_0}} = 1 - \frac{1}{1 + Z_y} = \frac{Z_y}{1 + Z_y} = 1 - \exp\left(-\frac{GM}{c^2 R}\right),
\end{aligned}
\tag{1.2.15}
$$

即

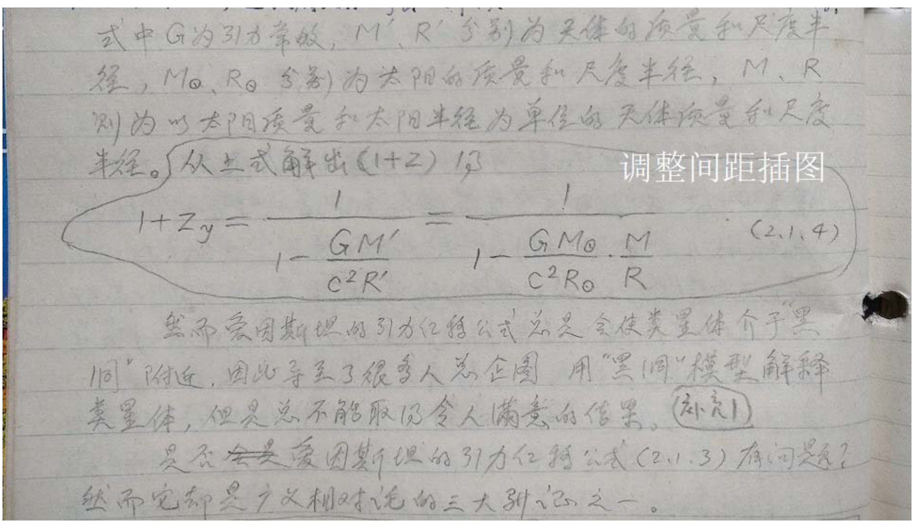
$$\frac{Z_y}{1+Z_y} = 1 - \exp\left(-\frac{GM}{c^2R}\right), \tag{1.2.16}$$

移项，得

$$\frac{1}{1+Z_y} = \exp\left(-\frac{GM}{c^2R}\right), \tag{1.2.17}$$

二边取对数，再乘−1，得

$$\ln(1+Z_y) = \frac{GM}{c^2R}. \tag{1.2.18}$$


式中G为引力常数，M′、R′分别为天体的质量和尺度半径，$M_\odot$、$R_\odot$分别为太阳的质量和尺度半径，M、R则为以太阳质量和太阳半径为单位的天体质量和尺度半径。从上式解出(1+Z)得

调整间距插图

$$1+Z_y=\frac{1}{1-\frac{GM'}{c^2R'}}=\frac{1}{1-\frac{GM_\odot}{c^2R_\odot}\cdot\frac{M}{R}} \quad (2.1.4)$$

然而爱因斯坦的引力红移公式总是会使类星体介于"黑洞"附近，因此导致了很多人总企图用"黑洞"模型解释类星体，但是总不能取得令人满意的结果。(补充)

是否~~会是~~爱因斯坦的引力红移公式(2.1.3)有问题？然而它却是广义相对论的三大验证之一。

1.3. 微开方程概念的产生

后来我分析了定积分与乘积分的关系，发现乘积分更确切应叫一个与定积分对应的名称定积开，并有四种不同类型的定积开；因为与微分对应有微开，与微商(导数)对应有微对数及微根二种，与不定积分对应有不定积开，与微分方程对应的微开方程有二种，一种为微对数方程，一种为微根方程。

我们都知道导数(微商)为常数的问题，如恒速运动的位移与时间的关系可用乘法计算，逆运算用除法；导数(微商)为非常数的问题，如变速运动位移与时间的关系可用定积分计算。

上述我求解的类星体的红移量与距离公式及引力红移量公式问题，对应地为：

微对数为常数的问题，如类星体的红移量与距离关系中，红移量与时间的关系可用乘方计算，逆运算用对数；微对数为非常数的问题，如引力红移公式可用定积开计算。归结如(表 1)。

表 1. 微商与微对数对应表

	常数	非常数
微商	$S = vt,\ v = S/t,\ t = S/v$	$S = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$
微对数	$\frac{1}{1+Z} = (1-b)^{\frac{r}{c}}$, $(1-b) = \left(\frac{1}{1+Z}\right)^{\frac{c}{r}}$, $r = c\log_{(1-b)}\left(\frac{1}{1+Z}\right)$.	$E' = hv' = hv_0 \mathop{\times\!\!\!\!\!\!\int}_R^{\infty} 1 - \frac{GM}{c^2r^2}\,dr$

我当时想类星体的红移量与距离公式及引力红移公式问题在微积分中是用微分方程解的问题，在微积开概念中都不用方程解，那么微积开概念

中的微开方程将可解什么问题呢？正在我百思不得其解的时候，一个巧遇使我得到了第一个线索。

因我的父亲数学较好，他退休后仍为《温州医学院学报》审稿，这天他正在审一篇有关统计的稿件，桌上正摊开一本参考书《卫生统计学》，翻在人口增长率的定义这一页上，我发现人口增长率的定义就与微对数相关。

于是我设想一个封闭域中的人口的演化与阻尼弹簧振子或 *RLC* 充放电电路应有对应关系。弹簧振子或 *RLC* 充放电电路的描述二阶微分方程为

$$my'' + Ky' + ky = f, \tag{1.3.1}$$

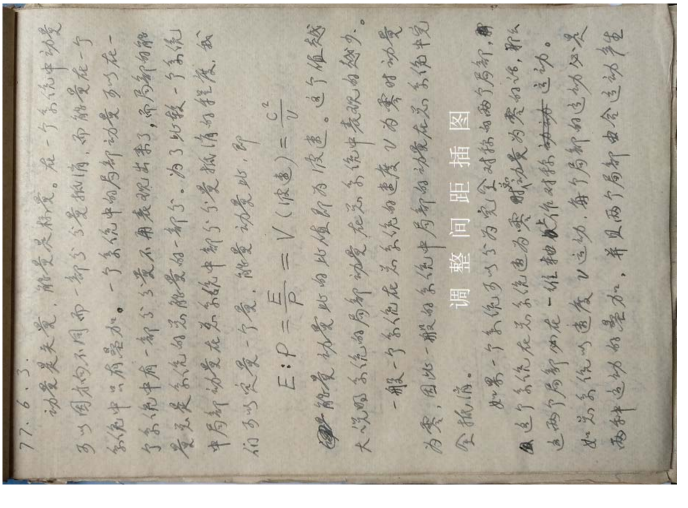
与

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = u, \tag{1.3.2}$$

而一个封闭域中的人口的演化可由二阶微根方程描述，即

$$\left(R^{2\wedge}\right)^{k_3} \cdot \left(R^{\wedge}\right)^{k_2} \cdot R^{\frac{1}{C}} = F_0. \tag{1.3.3}$$

(详见下文介绍)。



第二章　微积开的基本概念

2.1. 增率

增率是与增量对应的一种概念。

2.1.a. 增率的定义

设函数 $y = f(x) > 0$，它在 x 点的某邻域上有定义，在该邻域内当 x 得到增量 Δx 时，则增率为

$$\nabla y = \frac{f\left(x + \Delta x\right)}{f\left(x\right)}. \tag{2.1a1}$$

2.2. 微对数

微对数是与微商(导数)对应的一种概念。

2.2.a. 微对数的定义

设函数 $y = f(x) > 0$，它在点 x_0 处若极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \log_{1+\Delta x} \nabla y_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \log_{1+\Delta x} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right)}{f\left(x_0\right)}. \tag{2.2a1}$$

存在，则此极限就称作 $f(x)$在点 x_0 处的微对数，记作

$$\begin{aligned} y^{\vee}\Big|_{x=x_0} &= f^{\vee}\left(x_0\right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \log_{1+\Delta x} \nabla y_0 \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \log_{1+\Delta x} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right)}{f\left(x_0\right)}. \end{aligned} \tag{2.2a2}$$

如果每一个值 $x_0 \in D_1$ 都唯一确定一个值 $f^{\vee}(x_0)$，则 $f(x)$的微对数仍为定义在 D_1 域上的 x 的函数，记作

$$
\begin{aligned}
y^{\vee} = f^{\vee}(x) &= \lim_{\varDelta x \to 0} \log_{1+\varDelta x} \nabla y \\
&= \lim_{\varDelta x \to 0} \log_{1+\varDelta x} \frac{f(x+\varDelta x)}{f(x)}.
\end{aligned} \tag{2.2a3}
$$

叫做 $f(x)$的**微对数函数**，不过通常仍把 $f^{\vee}(x_0)$ 与 $f^{\vee}(x)$ 统称为**微对数**。

定理 1　设 $f'(x)$ 存在，且 $f(x) \neq 0$，则 $f^{\vee}(x)$ 存在，并有

$$
f^{\vee}(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{2.2a4}
$$

定理 1 证明　根据微对数的定义有 $f(x) > 0$，则

$$
\begin{aligned}
f^{\vee}(x) &= \lim_{\varDelta x \to 0} \log_{1+\varDelta x} \frac{f(x+\varDelta x)}{f(x)} \\
&= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\ln f(x+\varDelta x) - \ln f(x)}{\ln(1+\varDelta x)} \\
&= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\ln f(x+\varDelta x) - \ln f(x)}{\frac{\varDelta x}{\varDelta x}\ln(1+\varDelta x)} \\
&= \frac{\lim\limits_{\varDelta x \to 0} \frac{\ln f(x+\varDelta x) - \ln f(x)}{\varDelta x}}{\lim\limits_{\varDelta x \to 0} \frac{1}{\varDelta x}\ln(1+\varDelta x)} \\
&= \frac{\left[\ln f(x)\right]'}{\lim\limits_{\varDelta x \to 0} \ln\left[(1+\varDelta x)^{\frac{1}{\varDelta x}}\right]} = \frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{\ln \lim\limits_{\varDelta x \to 0}\left[(1+\varDelta x)^{\frac{1}{\varDelta x}}\right]} \\
&= \frac{f'(x)}{f(x)} \div \ln e \\
&= \frac{f'(x)}{f(x)}.
\end{aligned} \tag{2.2a5}
$$

因为 $f'(x)$ 存在，并 $f(x)\neq 0$，所以 $f^{\vee}(x)$ 存在。证毕。

2.2.b. 微对数在人口统计学中的意义

人口增长率 ZL 的定义为[6]

$$ZL=\frac{R(t+\varDelta t)-R(t)}{\frac{1}{2}\left[R(t)+R(t+\varDelta t)\right]}\div\varDelta t, \tag{2.2b1}$$

上式中规定 Δt 取一年，$R(t)$为在时间 t 时的人口数。

如果人口增长率是时间 t 的函数，要考虑瞬时人口增长率 SZL，则对(2.3.1)式求 $\Delta t\to 0$ 的极限，得瞬时人口增长率

$$\begin{aligned}
SZL&=\lim_{\varDelta t\to 0}\left\{\frac{R(t+\varDelta t)-R(t)}{\frac{1}{2}\left[R(t)+R(t+\varDelta t)\right]}\div\varDelta t\right\}\\
&=\lim_{\varDelta t\to 0}\left\{\frac{R(t+\varDelta t)-R(t)}{\frac{1}{2}\left[R(t)+R(t+\varDelta t)\right]}\div\varDelta t\right\}\\
&=\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\frac{R(t+\varDelta t)-R(t)}{\varDelta t}}{\frac{1}{2}\left[R(t)+R(t+\varDelta t)\right]}\\
&=\frac{\lim\limits_{\varDelta t\to 0}\frac{R(t+\varDelta t)-R(t)}{\varDelta t}}{\lim\limits_{\varDelta t\to 0}\frac{\left[R(t)+R(t+\varDelta t)\right]}{2}}\\
&=\frac{R'(t)}{R(t)}\\
&=R^{\vee}(t),
\end{aligned} \tag{2.2b2}$$

因此可知：微对数在人口统计学中的意义为瞬时人口增长率。

2.2.c. 微对数在原子物理中的意义

我们知道高速粒子的运动质量为[7]

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.2c1}$$

对上式求微对数，得

$$\begin{aligned} m^{\vee} &= m^{\vee}(v) = \frac{m'(v)}{m(v)} \\ &= \frac{\left[m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]'}{m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{m_0\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-2\frac{v}{c^2}\right)}{m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\frac{v}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\frac{v}{c^2}}{\frac{c^2-v^2}{c^2}} = \frac{v}{c^2-v^2} = \frac{1}{\frac{c^2}{v}-v} \\ &= \frac{1}{V-v}, \end{aligned} \tag{2.2c2}$$

上式中的

$$V = \frac{c^2}{v}, \tag{2.2c3}$$

为德布罗意波的波速。

从(2.2c2)式可知，粒子运动质量对运动速度的微对数为该粒子相关的德布罗意波的波速与该粒子运动速度差的倒数。这种关系隐含着粒子的一种什么特性呢？作者对原子物理知道得太少了，留给大家去思考吧。

2.2.d. 微对数在动态几何中的意义

在极坐标系中的轨迹 Mm 上(见图 1)的任一点 M 的矢径为 OM，轨迹 Mm 的极坐标方程为

$$r = r(\theta), \tag{2.2d1}$$

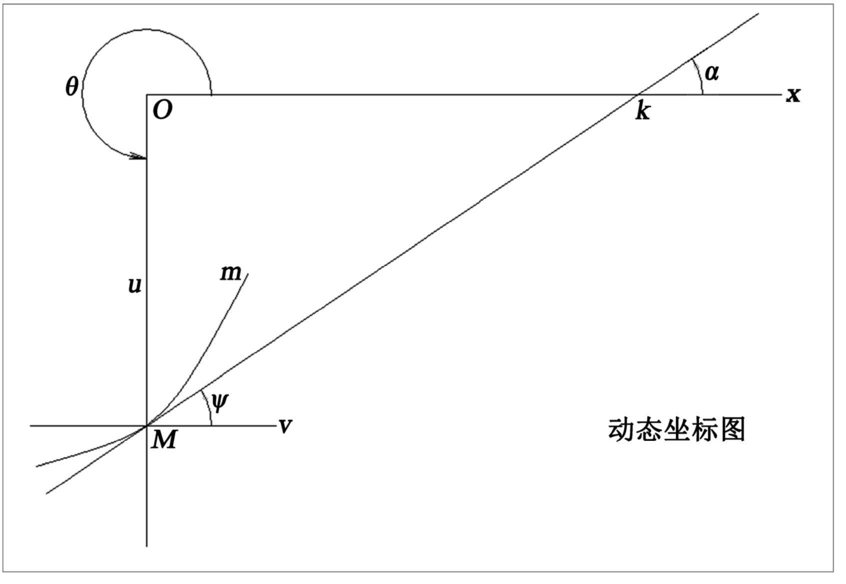


图 1. 动态坐标图

直角坐标系中的参数方程为

$$x = r(\theta)\cos\theta, \tag{2.2d2}$$

$$y = r(\theta)\sin\theta, \tag{2.2d3}$$

y 轴从原点 O 指向上方，(图 1)中未画出。这条轨迹在 M 点的切线 Mk 与 Ox 轴的夹角为 α，斜率为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{r'(\theta)\cdot\sin\theta+r(\theta)\cdot\cos\theta}{r'(\theta)\cdot\cos\theta-r(\theta)\cdot\sin\theta}\\&=\frac{r'(\theta)\cdot tg\theta+r(\theta)}{r'(\theta)-r(\theta)\cdot tg\theta},\end{aligned}\tag{2.2d4}$$

现有一个动态直角坐标系 vMu，M 为该动态直角坐标系的原点，该原点 M 永远位于轨迹 Mm 上，动态直角坐标系中的 u 轴永远指向直角坐标系 xOy 的原点 O。在动态直角坐标系 vMu 中轨迹 Mm 在 M 点(动态原点)的切线 Mk 与 Mv 轴的夹角为 ψ，在三角形 OMk 中有

$$(2\pi-\theta)+\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)+\alpha=\pi,\tag{2.2d5}$$

由上式解得

$$\psi=\frac{3\pi}{2}+\alpha-\theta,\tag{2.2d6}$$

那么，在该动态直角坐标系 vMu 中轨迹 Mm 在 M 点的斜率为

$$\begin{aligned}\frac{du}{dv}&=tg\psi=tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha-\theta\right)=tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\theta\right)\\&=-ctg(\alpha-\theta)=-\frac{1+ctg\alpha\cdot ctg\theta}{ctg\alpha-ctg\theta},\end{aligned}\tag{2.2d7}$$

因为

$$ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}},\tag{2.2d8}$$

将(2.2d4)式代入上(2.2d8)式，得

$$ctg\alpha=\frac{r'(\theta)-r(\theta)\cdot tg\theta}{r'(\theta)\cdot tg\theta+r(\theta)},\tag{2.2d9}$$

将(2.2d9)式代入(2.2d7)式，得

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dv} &= -\frac{1+ctg\alpha\cdot ctg\theta}{ctg\alpha - ctg\theta} \\
&= -\frac{1+\dfrac{r'(\theta)-r(\theta)\cdot tg\theta}{r'(\theta)\cdot tg\theta + r(\theta)}\cdot ctg\theta}{\dfrac{r'(\theta)-r(\theta)\cdot tg\theta}{r'(\theta)\cdot tg\theta + r(\theta)} - ctg\theta} \\
&= -\frac{\dfrac{r'(\theta)\cdot tg\theta + r(\theta) + r'(\theta)\cdot ctg\theta - r(\theta)\cdot tg\theta\cdot ctg\theta}{r'(\theta)\cdot tg\theta + r(\theta)}}{\dfrac{r'(\theta)-r(\theta)\cdot tg\theta - r'(\theta)\cdot tg\theta\cdot ctg\theta - r(\theta)\cdot ctg\theta}{r'(\theta)\cdot tg\theta + r(\theta)}} \\
&= -\frac{r'(\theta)\cdot tg\theta + r(\theta) + r'(\theta)\cdot ctg\theta - r(\theta)\cdot tg\theta\cdot ctg\theta}{r'(\theta)-r(\theta)\cdot tg\theta - r'(\theta)\cdot tg\theta\cdot ctg\theta - r(\theta)\cdot ctg\theta} \\
&= -\frac{r'(\theta)\cdot tg\theta + r(\theta) + r'(\theta)\cdot ctg\theta - r(\theta)}{r'(\theta)-r(\theta)\cdot tg\theta - r'(\theta) - r(\theta)\cdot ctg\theta} \\
&= -\frac{r'(\theta)\cdot tg\theta + r'(\theta)\cdot ctg\theta}{-r(\theta)\cdot tg\theta - r(\theta)\cdot ctg\theta} \\
&= -\frac{r'(\theta)\cdot tg\theta + r'(\theta)\cdot ctg\theta}{-r(\theta)\cdot tg\theta - r(\theta)\cdot ctg\theta} \\
&= \frac{r'(\theta)}{r(\theta)} = r^{\vee}(\theta),
\end{aligned}
\tag{2.2d10}
$$

由此可知极坐标中的轨迹方程(2.2d1)的微对数 $r^{\vee}(\theta)$即为动态坐标系 vMu 中该轨迹的斜率(微商)，即

$$
r^{\vee}(\theta) = \frac{du}{dv}\cdot \tag{2.2d11}
$$

2.2.e. 微对数在其它学科中的意义简述

此外推导一下即可明白：

微对数在银行计息中的意义与变化的利率相关；

微对数在放射性物质的衰变过程中的意义与变化的衰变系数相关；

微对数在缆绳绕木桩牵力变化中的意义与力的变化的衰变系数相关；

微对数在火箭动力学中的意义与燃料变化的消耗系数相关；

微对数在 RC 充放电电路中的意义与电路变化的 RC 时间参数相关，如果 R 与 C 都为常数的话，微对数为常数；

等等。

2.3. 微根

微根也是与微商(导数)对应的一种概念。

2.3.a. 微根的定义

设函数 $y = f(x) > 0$，它在点 x_0 处若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0} \sqrt[\Delta x]{\nabla y_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \sqrt[\Delta x]{\frac{f(x_0+\Delta x)}{f(x_0)}} \tag{2.3a1}$$

存在，则此极限就称作 $f(x)$在点 x_0 处的微根，记作

$$\begin{aligned} y^{\wedge}\big|_{x=x_0} = f^{\wedge}(x_0) &= \lim_{\Delta x\to 0} \sqrt[\Delta x]{\nabla y_0} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \sqrt[\Delta x]{\frac{f(x_0+\Delta x)}{f(x_0)}}. \end{aligned} \tag{2.3a2}$$

如果每一个值 $x_0 \in D_2$ 都唯一确定一个值 $f^{\wedge}(x_0)$，则 $f(x)$的微根仍为定义在 D_2 域上的 x 的函数，记作

$$\begin{aligned} y^{\wedge} = f^{\wedge}(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \sqrt[\Delta x]{\nabla y} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \sqrt[\Delta x]{\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}}, \end{aligned} \tag{2.3a3}$$

叫做 $f(x)$的**微根函数**，不过通常仍把 $f^{\wedge}(x_0)$ 与 $f^{\wedge}(x)$ 统称为**微根**。

定理 2　设 $f'(x)$ 存在，且 $f(x)\neq 0$，则 $f^{\wedge}(x)$ 存在，并有

$$f^{\wedge}(x)=\exp\frac{f'(x)}{f(x)}=\exp f^{\vee}(x). \tag{2.3a4}$$

定理 2 证明　根据微根的定义有 $f(x)>0$，则

$$\begin{aligned}
f^{\wedge}(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt[\Delta x]{\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}}\\
&=\exp\ln\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt[\Delta x]{\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}}\\
&=\exp\lim_{\Delta x\to 0}\ln\sqrt[\Delta x]{\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}}\\
&=\exp\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln f(x+\Delta x)-\ln f(x)}{\Delta x}\\
&=\exp\left[\ln f(x)\right]'\\
&=\exp\frac{f'(x)}{f(x)}=\exp f^{\vee}(x),
\end{aligned} \tag{2.3a5}$$

因为 $f'(x)$ 存在，并 $f(x)\neq 0$，所以 $f^{\wedge}(x)$ 存在。证毕。

2.3.b. 高阶微根的定义

当 x 变动时 $f^{\wedge}(x)$ 仍为 x 的函数，对 $f^{\wedge}(x)$ 再求一次微根 $\left[f^{\wedge}(x)\right]^{\wedge}$，如果存在的话就称为 $f(x)$的二阶微根，记为

$$f^{2\wedge}(x)=\left[f^{\wedge}(x)\right]^{\wedge}. \tag{2.3b1}$$

一般地，我们定义 n 阶的微根为$(n-1)$阶微根的微根，即

$$f^{n\wedge}(x)=\left[f^{(n-1)\wedge}(x)\right]^{\wedge}. \tag{2.3b2}$$

定理 3 如果函数 y 的 n 阶微根存在，则有

$$y^{n\wedge}=\exp\left[(\ln y)^{(n)}\right]. \tag{2.3b3}$$

定理 3 证明 $n=1$ 时，由定理 2 知

$$y^{\wedge}=\exp\frac{y'}{y}=\exp\left[(\ln y)'\right], \tag{2.3b4}$$

定理 3 成立。设 $n=k$ 时，定理 3 也成立，则有

$$y^{k\wedge}=\exp\left[(\ln y)^{(k)}\right]. \tag{2.3b5}$$

那么当 $n=k+1$ 时，则有

$$\begin{aligned} y^{(k+1)\wedge} &= \left[y^{(k)\wedge}\right]^{\wedge} \\ &= \exp\frac{\left[y^{(k)\wedge}\right]'}{y^{(k)\wedge}} \\ &= \exp\frac{\left\{\exp\left[(\ln y)^{(k)}\right]\right\}'}{\exp\left[(\ln y)^{(k)}\right]} \\ &= \exp\frac{\exp\left[(\ln y)^{(k)}\right]\cdot\left[(\ln y)^{(k)}\right]'}{\exp\left[(\ln y)^{(k)}\right]} \\ &= \exp\left[(\ln y)^{(k+1)}\right]. \end{aligned} \tag{2.3b6}$$

因此对于一切自然数 n 定理 3 都成立。证毕。

2.3.c. 微根在人口统计学中的意义

在 2.2.b 节中提到微对数 $R^{\vee}(t)$为人口增长率，而微根

$$R^{\wedge}(t)=\exp R^{\vee}(t), \tag{2.3c1}$$

微根 $R^{\wedge}(t)$与微对数 $R^{\vee}(t)$两者为正变相关，微根 $R^{\wedge}(t)$同样能反映人口增长的情况，因此给微根 $R^{\wedge}(t)$一个专门的名称叫做人口增根率。

在物理学中质点位置 $x(t)$的微商 $x'(t)$为质点的运动速度，为反应速度的变化，可再对微商 $x'(t)$再求一次微商，即二阶微商 $x''(t)$为质点的加速度。

对应地，在人口统计学中可对人口增根率 $R^{\wedge}(t)$再求一次微根，即二阶微根 $R^{2\wedge}(t)$来反应人口增根率的变化情况，并给二阶微根 $R^{2\wedge}(t)$一个专门的名称叫做**人口加根率**。

2.4. 微开

微开为与微分对应的概念。

2.4.a. 微开的定义

为了分析函数增率在瞬间的变化情况，对增率(2.1a1)式取

$$dx = \Delta x \to 0 \tag{2.4a1}$$

的极限，因 $f(x) > 0$，所以有

$$\begin{aligned}\nabla y &= \frac{f(x+\Delta x)}{f(x)} \\ &= \exp\ \ln\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)} \\ &= \exp\left[\ln f(x+\Delta x) - \ln f(x)\right],\end{aligned} \tag{2.4a2}$$

根据增量与微分的关系[8]，令 $u = \ln f(x)$，则

$$\begin{aligned}&\ln f(x+\Delta x) - \ln f(x) \\ &= \Delta u \\ &= u'\Delta x + O(\Delta x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\left[\ln f(x)\right]' \varDelta x+O(\varDelta x)\\
&=\frac{f'(x)}{f(x)}\varDelta x+O(\varDelta x) \qquad (2.4a3)\\
&=f^{\vee}(x)\varDelta x+O(\varDelta x),
\end{aligned}
$$

上式(2.4a3)中的 $O(\Delta x)$为高阶无限小，将(2.4a3)式代入(2.4a2)式，得

$$
\nabla y=\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}=\exp\left[f^{\vee}(x)\Delta x+O(\Delta x)\right], \qquad (2.4a4)
$$

当取 $dx=\Delta x\rightarrow 0$ 的极限，忽略高阶无限小 $O(\Delta x)$，得微开为

$$
\mathrm{d}_{\wedge} y=\exp\left[f^{\vee}(x)\varDelta x\right]=\exp\left[f^{\vee}(x)dx\right], \qquad (2.4a5)
$$

我们把上式(2.4a5)叫做微开的 exp 式。

此外，微开还可表示为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\wedge} y&=\exp\left[f^{\vee}(x)dx\right]\\
&=\left\{\left[1+f^{\vee}(x)dx\right]^{\frac{1}{f^{\vee}(x)dx}}\right\}^{f^{\vee}(x)dx} \qquad (2.4a6)\\
&=\left[1+f^{\vee}(x)dx\right]^{\frac{f^{\vee}(x)dx}{f^{\vee}(x)dx}}\\
&=1+f^{\vee}(x)dx,
\end{aligned}
$$

即

$$
\mathrm{d}_{\wedge} y=1+f^{\vee}(x)dx, \qquad (2.4a7)
$$

我们把上式(2.4a7)叫做微开的和底式。为什么叫做微开的和底式，把该式看作有一个指数 1，就不难理解了。

此外，微开还可表示为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\wedge} y &= \exp\left[f^{\vee}(x)dx\right] \\
&= \left[(1+dx)^{\frac{1}{dx}}\right]^{f^{\vee}(x)dx} \\
&= (1+dx)^{\frac{f^{\vee}(x)dx}{dx}} \\
&= (1+dx)^{f^{\vee}(x)},
\end{aligned}
\tag{2.4a8}
$$

即

$$
\mathrm{d}_{\wedge} y = (1+dx)^{f^{\vee}(x)}, \tag{2.4a9}
$$

我们把上式(2.4a9)叫做微开的指式。

此外，微开还可表示为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\wedge} y &= \exp\left[f^{\vee}(x)dx\right] \\
&= \left\{\exp\left[f^{\vee}(x)\right]\right\}^{dx} \\
&= \left[f^{\wedge}(x)\right]^{dx},
\end{aligned}
\tag{2.4a10}
$$

即

$$
\mathrm{d}_{\wedge} y = \left[f^{\wedge}(x)\right]^{dx}, \tag{2.4a11}
$$

我们把上式(2.4a11)叫做微开的底式。

此外，微开还可表示为其它形式，在此不详述了。

2.5. 定积开

定积开是与定积分对应的概念，定积开有底定积开、和底定积开、指定积开、和底-指定积开、底-指定积开等几种定积开。

2.5.a. 和底定积开的定义

设函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续且 $f(x) > 0$，用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots\cdots < x_n = b \tag{2.5a1}$$

把区间$[a, b]$分为 n 个小区间$[x_{i-1}, x_i]$其长度各是

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \left(i = 1,2,3,\cdots\cdots,n\right) \tag{2.5a2}$$

$max\Delta x$ 表示小区间$[x_{i-1}, x_i]$中最大的一个的长度。在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点 ξ_i，即

$$\xi_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right],\ \left(i = 1,2,3,\cdots\cdots,n\right) \tag{2.5a3}$$

作乘积

$$J_n = \prod_{i=1}^{n}\left[1 + f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\right], \tag{2.5a4}$$

当每一个小区间$[x_{i-1}, x_i]$都无限缩小时的极限

$$J = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x\to 0}} \prod_{i=1}^{n}\left[1 + f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\right] \tag{2.5a5}$$

存在，则把此极限 J 叫做函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上的和底定积开，记作

$$\sqrt[\int]{}_a^b 1 + f\left(x\right)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x\to 0}} \prod_{i=1}^{n}\left[1 + f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\right]. \tag{2.5a6}$$

上式中的函数 $f(x)$称为被积函数，$1 + f(x)dx$ 称为被积表达式，变量 x 称为积开变量，a 与 b 分别称为积开下限与积开上限，区间$[a, b]$称为积开区间。

2.5.b. 和底定积开的计算

和底定积开的计算可通过以下的定理 4、定理 5 转化为定积分计算。

定理 4　设函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续，且 $f(x) \neq 0$，那么函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上的和底定积开存在，和底定积开与定积分的关系为

$$\sqrt{\int}_a^b 1+f(x)dx=\exp\int_a^b f(x)dx. \tag{2.5b1}$$

定理 4 证明　因函数 $f(x)$在区间$[a,\ b]$上连续，那么根据闭区间连续函数有界性定理[9]，函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上有界。因 $f(x) \neq 0$，那么函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上不会过 x 轴，一种情况为 $f(x) > 0$，另一种情况为 $f(x) < 0$，不管哪一种情况，函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上的定积分都存在，因此有

$$\begin{aligned}
\sqrt{\int}_a^b 1+f(x)dx &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x\to 0}}\prod_{i=1}^{n}\left[1+f(\xi_i)\Delta x_i\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\lim_{\Delta x_i\to 0}\left[1+f(\xi_i)\Delta x_i\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\lim_{\Delta x_i\to 0}\left\{\left[1+f(\xi_i)\Delta x_i\right]^{\frac{f(\xi_i)\Delta x_i}{f(\xi_i)\Delta x_i}}\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(\lim_{\Delta x_i\to 0}\left\{\left[1+f(\xi_i)\Delta x_i\right]^{\frac{1}{f(\xi_i)\Delta x_i}}\right\}\right)^{\lim\limits_{\Delta x_i\to 0} f(\xi_i)\Delta x_i} \\
&= \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\exp\left[\lim_{\Delta x_i\to 0} f(\xi_i)\Delta x_i\right] \\
&= \exp\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\lim_{\Delta x_i\to 0} f(\xi_i)\Delta x_i\right] \\
&= \exp\left[\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right] \\
&= \exp\int_a^b f(x)dx.
\end{aligned} \tag{2.5b2}$$

证毕。

定理 5　设函数 $f(x)$在区间$[a,\ b]$上连续，那么函数 $f(x)$在区间$[a,\ b]$上的

和底定积开存在，和底定积开与定积分的关系为

$$\sqrt{\int}_a^b 1+f\left(x\right)=\exp\int_a^b f\left(x\right)dx. \tag{2.5b3}$$

定理 5 证明 设函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续，且 $f(x)\neq 0$，这是定理 4 已证明了的情况。现设函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上有 c_1，c_2，c_3，……，c_n 共 n 个过 0 点(与 x 轴的交点)，在这 n 过 0 点处和底定积开的被积表达式

$$1+f\left(x\right)dx=1+0dx=1, \tag{2.5b4}$$

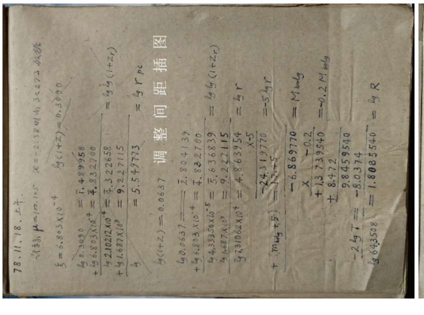
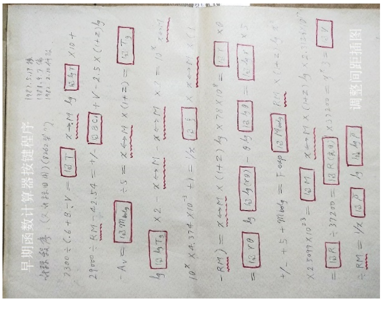
这些过 0 点对连乘积的值不产生作用。定积分的被积表达式

$$f\left(x\right)dx=0dx=0, \tag{2.5b5}$$

这些过 0 点对定积分的和值也不产生作用。因此可把区间$[a, b]$拆分 $n+1$ 个能满足定理 4 的子区间$[a, c1]$，$[c1，c2]$，$[c2，c3]$，……，$[cn, b]$，那么有

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\int}_a^b 1+f\left(x\right)dx\\
&=\left[\exp\int_a^{c_1} f\left(x\right)dx\right]\left[\exp\int_{c_1}^{c_2} f\left(x\right)dx\right]\left[\exp\int_{c_2}^{c_3} f\left(x\right)dx\right]\cdots\\
&\quad\cdots\left[\exp\int_{c_{n-1}}^{c_n} f\left(x\right)dx\right]\left[\exp\int_{c_n}^{b} f\left(x\right)dx\right]\\
&=\exp\left[\int_a^{c_1} f\left(x\right)dx+\int_{c_1}^{c_2} f\left(x\right)dx+\int_{c_2}^{c_3} f\left(x\right)dx+\cdots+\int_{c_n}^{b} f\left(x\right)dx\right]\\
&=\exp\int_a^b f\left(x\right)dx.
\end{aligned} \tag{2.5b6}$$

证毕。

2.5.c. 和底定积开的应用

2.5c1. 动态增利率存款本息的计算

设某 Shangzhao 银行推出一种服务于现代忙碌人群的动态增利率活期储蓄，利率为

$$k = K\left[1-\exp\left(-\frac{\tau}{T}\right)\right], \tag{2.5c1}$$

上(2.5c1)式中的 K 为上限利率，即 $k<K$，通常取 K 略低于当前最长期限定期储蓄利率，τ 为存款存储的时间段长度，T 为时间常数，通常取小于最长期限定期储蓄存期的三分之一，大于最长期限定期储蓄存期的五分之一。

因此某 Shangzhao 银行定的动态增利率储蓄的日利率定为

$$k = 0.000074\left[1-\exp\left(-\frac{\tau}{500}\right)\right], \tag{2.5c2}$$

上(2.5c1)式中的 τ 为以日为单位的存款时间段长度。设 $t = t_1$ 时存入的存款为 $C(t_1)$，任一时刻 t 存款将增值为

$$C = C(t), \tag{2.5c3}$$

存款存储时间段长度为

$$\tau = t - t_1, \tag{2.5c4}$$

由于利率 k 是一个变量，我们可取很小的一个时间间隔 dt 计算一次存款的增值变化增率，即微开：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_\wedge C &= 1 + kdt \\ &= 1 + 0.000074\left[1-\exp\left(-\frac{t-t_1}{500}\right)\right]dt, \end{aligned} \tag{2.5c5}$$

那么可用和底定积开计算得到 $t = t_2$ 时存款将增值为

$$C(t_2)=C(t_1)\int_{t_1}^{t_2}1+0.000074\left[1-\exp\left(-\frac{t}{500}\right)\right]dt. \tag{2.5c6}$$

设存入款 $C(t_1)=100$ 元，(表 2)列出存款时间 $\tau=t_2-t_1$ 与 $C(t_2)$的关系。

2.5c2. 人口预测计算

由统计得出某地区 2002 年的人口数 $R(2002)$为 10^6 人，2002 年初的人口增长率为 1.2×10^{-3}/年，设其人口增长率以 2×10^{-5}/年 ^{2} 的速率下降，即动态人口增长率为

$$k=1.2\times10^{-3}-2\times10^{-5}(t-2002), \tag{2.5c7}$$

求该地区至 2010 年的人口数 $R(2010)$。

解

$$\begin{aligned}
R(2010)&=R(2002)\surd\!\int_{2002}^{2010}1+kdt\\
&=10^6\surd\!\int_{2002}^{2010}1+\left(1.2\times10^{-3}-2\times10^{-5}t\right)dt\\
&=10^6\times\exp\surd\!\int_{2002}^{2010}\left(1.2\times10^{-3}-2\times10^{-5}t\right)dt\\
&=10^6\times\exp\left[1.2\times10^{-3}t-10^{-5}t^2\right]_{2002}^{2010}\\
&=10^6\times\exp\left(9.6\times10^{-3}t-6.4\times10^{-4}\right)\\
&=1.0103\times10^6(\text{人}).
\end{aligned} \tag{2.5c8}$$

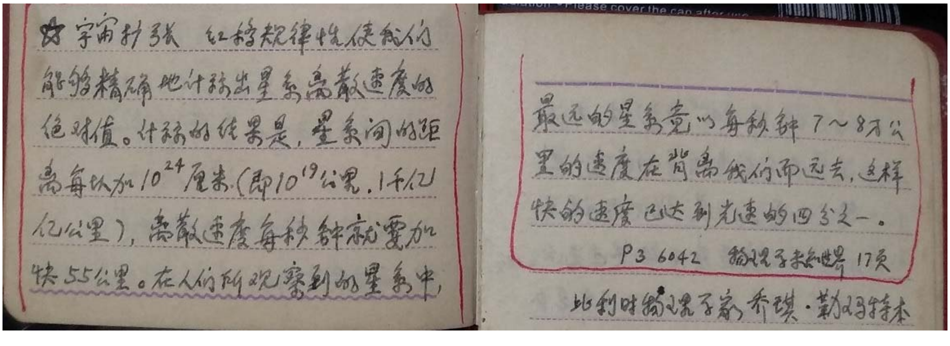


表 2. 动态利率储蓄与其它储蓄本息对照表

$\tau = t_2 - t_1$	$C(t_2)$	活期储蓄 利率 0.72	一年期储蓄 利率 1.98	三年期储蓄 利率 2.52	五年期储蓄 利率 2.79
1 个月	100.01	100.06	100.06	100.06	100.06
3 个月	100.06	100.18	100.18	100.18	100.18
6 个月	100.22	100.36	100.36	100.36	100.36
1 年	100.79	100.72	101.98	100.72	100.72
2 年	102.59	101.45	104.00	101.45	101.45
3 年	104.94	102.18	106.06	107.75	102.18
4 年	107.58	102.91	108.16	108.53	102.91
5 年	110.41	103.65	110.30	109.31	114.75
6 年	113.37	104.40	112.48	116.11	115.58
7 年	116.45	105.15	114.71	116.94	116.41
8 年	119.62	105.91	116.98	117.78	117.25
9 年	122.89	106.67	119.30	125.11	118.09
10 年	126.25	107.44	121.66	126.01	131.68
11 年	129.71	108.21	124.07	126.91	132.62
12 年	133.26	108.99	126.53	134.80	133.58
13 年	136.91	109.78	129.03	135.77	134.54
14 年	140.66	110.57	131.59	136.75	135.51
15 年	144.51	111.36	134.19	145.25	151.10
16 年	148.46	112.16	136.85	146.30	152.19
17 年	152.53	112.97	139.56	147.35	153.28
18 年	156.70	113.78	142.32	156.51	154.39
19 年	160.99	114.60	145.14	157.64	155.50
20 年	165.40	115.43	148.01	158.78	173.39

2.5.d. 底-指定积开的定义

设函数 $f(x)$ 与 $\psi(x)$ 都在区间 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) > 0$，$\psi(x) > 0$，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots\cdots < x_n = b \tag{2.5d1}$$

把区间 $[a, b]$ 分为 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 其长度各是

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad (i = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n) \tag{2.5d2}$$

$\max\Delta x$ 表示小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中最大的一个的长度。在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i，即

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad (i = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n) \tag{2.5d3}$$

作乘积

$$J_n = \prod_{i=1}^{n} [f(\xi_i)]^{\psi(\xi_i)\Delta x_i}, \tag{2.5d4}$$

当每一个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 都无限缩小时的极限

$$J = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x\to 0}} \prod_{i=1}^{n} [f(\xi_i)]^{\psi(\xi_i)\Delta x_i} \tag{2.5d5}$$

存在，则把此极限 J 叫做函数 $f(x)$ 与 $\psi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的底-指定积开，记作

$$\sqrt[b]{\int_a} f(x)^{\psi(x)dx} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x\to 0}} \prod_{i=1}^{n} [f(\xi_i)]^{\psi(\xi_i)\Delta x_i} \tag{2.5d6}$$

上式中的函数 $f(x)$ 与 $\psi(x)$ 统称为被积函数，$f(x)$ 特称为被积底函数，$\psi(x)$ 特称为被积指函数。

若在区间 $[a, b]$ 上 $\psi(x) = 1$，则(2.5d6)式变化为

$$\sqrt[b]{\int_a} f(x)^{dx} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x\to 0}} \prod_{i=1}^{n} [f(\xi_i)]^{\Delta x_i}. \tag{2.5d7}$$

特称这种定积开为底定积开。

2.5.e. 底-指定积开的计算

底-指定积开可通过下面的定理 6 转化为定积分计算。

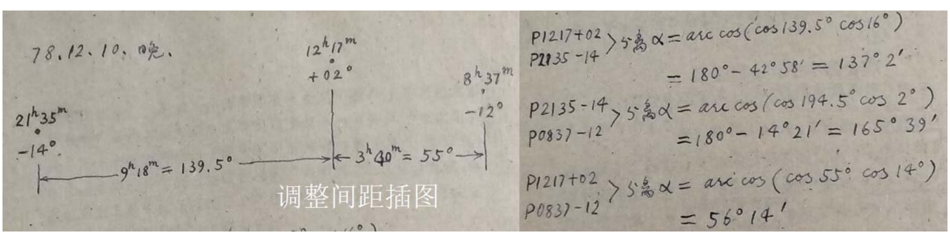
定理 6 设函数 $f(x)$与 $\psi(x)$都在区间$[a, b]$上连续，$f(x) > 0$，则

$$\sqrt[\psi(x)dx]{\int_a^b} f(x) = \exp\int_a^b \psi(x)\ln f(x)dx \tag{2.5e1}$$

定理 6 的证明 因函数 $f(x)$与 $\psi(x)$都在区间$[a, b]$上连续，那么根据闭区间连续函数有界性定理，函数 $f(x)$与 $\psi(x)$都在区间$[a, b]$上有界，且 $f(x) > 0$，因此有

$$\begin{aligned}
\sqrt[\psi(x)dx]{\int_a^b} f(x) &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x\to 0}} \prod_{i=1}^{n}\left[f\left(\xi_i\right)\right]^{\psi(\xi_i)\Delta x_i} \\
&= \exp\ln \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x\to 0}} \prod_{i=1}^{n}\left[f\left(\xi_i\right)\right]^{\psi(\xi_i)\Delta x_i} \\
&= \exp \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n}\ln\left\{\left[f\left(\xi_i\right)\right]^{\psi(\xi_i)\Delta x_i}\right\} \\
&= \exp \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n}\left[\psi\left(\xi_i\right)\Delta x_i\right]\left\{\ln\left[f\left(\xi_i\right)\right]\right\} \\
&= \exp \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n}\psi\left(\xi_i\right)\ln\left[f\left(\xi_i\right)\right]\Delta x_i \\
&= \exp\int_a^b \psi(x)\ln f(x)dx.
\end{aligned} \tag{2.5e2}$$

证毕。



2.5.f. 底定积开的应用

2.5f1. 波动利率的大额存款本息计算

现在的利率计算是以日为计息的最小时间段，这引起一些不合理的情况。

例如：A 客户早上八点到某银行存款 1000 万元，到次日下午五点取回这笔存款，可得到利息 197.26 元。而 B 客户在下午五点到某银行存款 1000 万元，到次日上午八点取回这笔存款，也可得到利息 197.26 元。显然 A 客户的存款对银行的供献比 B 客户大多了，但他们得到的利息却是一样的，这就形成了不合理情况。

为了克服上述的不合理情况，设某 Shangzhao 银行推出一种波动利率的大额存款储蓄，其利率是波动变化利率函数如下表达式

$$k(t)=\left[8.888+8\left(\sin\frac{\pi(t-6)}{12}+\frac{1}{9}\sin\frac{\pi(t-6)}{4}\right)\right]\times10^{-7}, \qquad (2.5f1)$$

上(2.5f1)式中 $k(t)$的单位为：小时$^{-1}$，即小时利率，t 为以小时为计量单位的时间，利率函数图示如(图 2)。

通常如果存款 C 存了三个时间段 τ_1、τ_2、τ_3 的利率分别为 k_1、k_2、k_3 则存款的复利的本息可由下式计算

$$\text{存款的本息}=C(1+k_1)^{\tau_1}(1+k_2)^{\tau_2}(1+k_3)^{\tau_3}. \qquad (2.5f2)$$

因此，波动利率的大额存款储蓄的本息为

$$\begin{aligned}C(t_2)&=C(t_1)\sqrt[\int]{}_{t_1}^{t_2}\left[1+k(t)\right]^{dt}\\&=C(t_1)\sqrt[\int]{}_{t_1}^{t_2}\left\{1+\left[8.888+8\left(\sin\frac{\pi(t-6)}{12}+\frac{1}{9}\sin\frac{\pi(t-6)}{4}\right)\right]\times10^{-7}\right\}^{dt}.\end{aligned} \qquad (2.5f3)$$

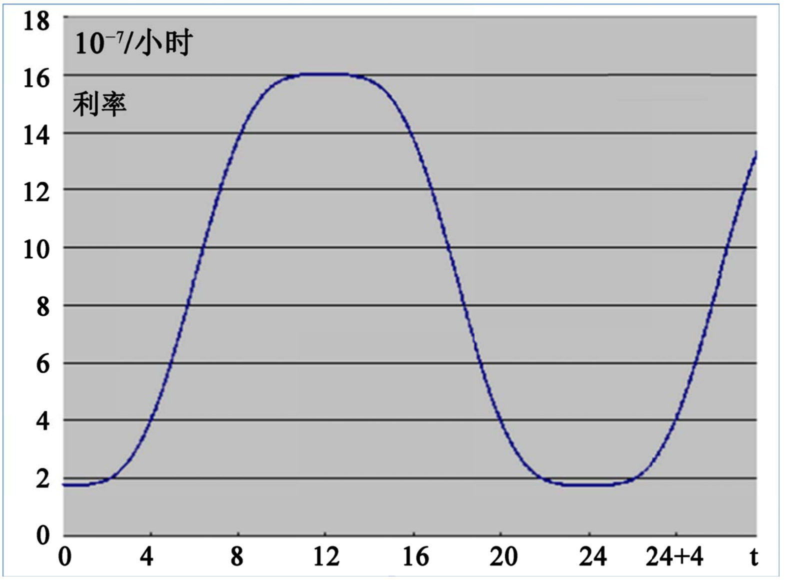


图 2. 波动利率曲线

由(2.5f3)式计算上述的 A 客户第二天得到的本息应为

$$10000000 \sqrt{\int_{8}^{(24+17)}} \left(1+\left[8.888+8\left(\sin\frac{\pi(t-6)}{12}+\frac{1}{9}\sin\frac{\pi(t-6)}{4}\right)\right]\times 10^{-7}\right)^{dt} \qquad (2.5f4)$$

$$=10000286.27,$$

B 客户第二天得到的本息应为

$$10000000 \sqrt{\int_{17}^{(24+8)}} \left(1+\left[8.888+8\left(\sin\frac{\pi(t-6)}{12}+\frac{1}{9}\sin\frac{\pi(t-6)}{4}\right)\right]\times 10^{-7}\right)^{dt} \qquad (2.5f5)$$

$$=10000092.44,$$

这样的计息，因 A 客户存的时间段比 B 客户长，A 客户可比 B 客户多得 193.83(元)的利息。如果要调高或调低波动利率的话只要调整(2.5f1)式中的系数 10^{-7} 即可，例如调整为 1.042×10^{-7}，或动态增利率等。

当波动利率与动态增利率结合使用，称为动态利率。

2.5.g. 底-指定积开的应用

2.5g1. 底-指定积开与几何平均值关系

连续函数的几何平均值定义为：

$$G(f)=\exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,dx\right], \tag{2.5g1}$$

这种定义是用计算式来定义。几何平均值比较追根性的定义应为：

$$\begin{aligned} G(f) &= \sqrt[(b-a)]{\surd\!\!\int_a^b f(x)^{dx}} = \left[\surd\!\!\int_a^b f(x)^{dx}\right]^{\frac{1}{b-a}} \\ &= \exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,dx\right], \end{aligned} \tag{2.5g2}$$

其含义为对函数的微开在被积区间的积开值，由积开区间宽度去均方。

几何平均值也可用底-指定积开定义为

$$G(f)=\surd\!\!\int_a^b f(x)^{\frac{1}{b-a}dx}, \tag{2.5g3}$$

更一般的加权几何平均值也可用底-指定积开定义为

$$G(f)=\int_a^b f(x)^{\psi(x)dx}, \tag{2.5g4}$$

上式中的 $\psi(x)$称为权重函数，它应满足

$$\int_a^b \psi(x)\,dx=1. \tag{2.5g5}$$

以上介绍了和底定积开、底-指定积开与底定积开。除上述几种定积开外，还有其它形式的定积开，在此不详述了。

2.6. 微开方程

微开方程是与微分方程对应的概念，与微分方程对应的微开方程有二种，一种叫微对数方程，一种叫微根方程。

2.6.a. 微对数方程的定义

凡表示未知函数和未知函数的微对数以及自变量之间关系的方程称为微对数方程。

以下介绍几种可求解的微对数方程及其通解，限于篇幅求解的过程就不介绍了。

2.6.b. 可分离变量的微对数方程

可分离变量的微对数方程型如

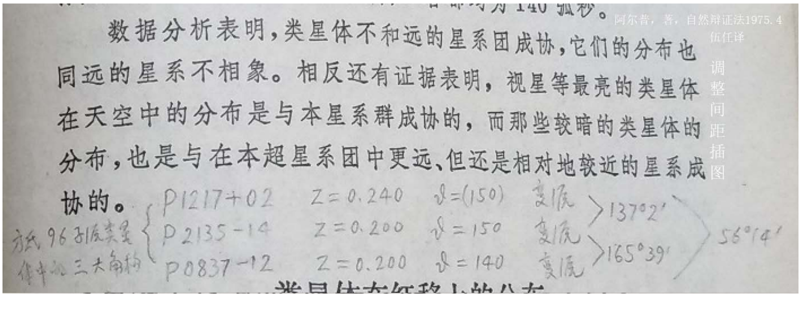
$$y^{\vee} = f(x)\cdot g(y), \tag{2.6b1}$$

或写作

$$\log_{(1+dx)} \mathrm{d}_{\wedge} y = f(x)\cdot g(y), \tag{2.6b2}$$

微对数方程(2.6b1)或(2.6b2)的隐函数解为：

$$\int \frac{dy}{y\cdot g(y)} = \int f(x)dx. \tag{2.6b3}$$


数据分析表明，类星体不和远的星系团成协，它们的分布也同远的星系不相象。相反还有证据表明，视星等最亮的类星体在天空中的分布是与本星系群成协的，而那些较暗的类星体的分布，也是与在本超星系团中更远、但还是相对地较近的星系成协的。

P1217+02　Z=0.240　ϑ=(150)
P2135-14　Z=0.200　ϑ=150
P0837-12　Z=0.200　ϑ=140

137°2′　165°39′　56°14′

2.6.c. 一阶非齐次微对数方程

一阶非齐次微对数方程型如

$$y^{\vee}+Py=Q, \tag{2.6c1}$$

上方程(2.6c1)中的 P、Q 为 x 的函数，其通解为：

$$y=\frac{1}{\int Pdx+e^{-\int Qdx}\cdot\int\left(-Q\cdot e^{\int Qdx}\cdot\int Pdx\right)dx+C\cdot e^{-\int Qdx}}, \tag{2.6c2}$$

上(2.6c2)中的 e 为自然对数的底，C 为任意常数。

2.6.d. 微根方程的定义

凡表示未知函数和未知函数的微根以及自变量之间关系的方程称为微根方程。

2.6.e. n 阶 log 线性微根方程的求解

n 阶 log 线性微根方程的一般形式为

$$\left[y^{n\wedge}\right]^{p_n}\cdot\left[y^{(n-1)\wedge}\right]^{p_{n-1}}\cdot\left[y^{(n-2)\wedge}\right]^{p_{n-2}}\cdots\cdots\left[y^{2\wedge}\right]^{p_2}\cdot\left[y^{\wedge}\right]^{p_1}=f, \tag{2.6e1}$$

上方程(2.6d1)中 p_n、p_{n-1}、p_{n-2}、……、p_2、p_1、f 都为 x 的函数；当 $f\equiv 1$ 时称该方程为齐次方程，当 p_n、p_{n-1}、p_{n-2}、……、p_2、p_1 都为常数时称该方程为常指数微根方程。因为对该方程两边取对数，可得到关于 $\log[y^{k\wedge}]$ 的线性方程($k=n, n-1, n-2,$ ……, $2, 1$)，所以称该方程为 log 线性微根方程。与微根方程(2.6d1)对应的微分方程为

$$p_n y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+p_{n-2}y^{(n-2)}+\cdots\cdots+p_2 y''+p_1 y'=\ln f, \tag{2.6e2}$$

定理 7 如果 $\overline{y}$ 是变系数 n 阶线性非齐次微分方程(2.6e2)的通解，则 $\exp\overline{y}$ 是变指数 n 阶 log 线性非齐次微根方程(2.6e1)的通解。

定理 7 证明 将定理 3 的(2.3b3)式代入(2.6e1)式，得

$$\begin{aligned}&\left\{\exp\left[(\ln y)^{(n)}\right]\right\}^{p_n}\cdot\left\{\exp\left[(\ln y)^{(n-1)}\right]\right\}^{p_{n-1}}\cdot\left\{\exp\left[(\ln y)^{(n-2)\wedge}\right]\right\}^{p_{n-2}}\cdots\\&\cdots\left\{\exp\left[(\ln y)''\right]\right\}^{p_2}\cdot\left\{\exp\left[(\ln y)'\right]\right\}^{p_1}=f,\end{aligned}\tag{2.6e3}$$

对上方程(2.6e3)二边取对数，得

$$\begin{aligned}&p_n(\ln y)^{(n)}+p_{n-1}(\ln y)^{(n-1)}+p_{n-2}(\ln y)^{(n-2)}+\cdots\\&\cdots+p_2(\ln y)''+\cdot p_1(\ln y)'=\ln f,\end{aligned}\tag{2.6e4}$$

令

$$\overline{y}=\ln y,\tag{2.6e5}$$

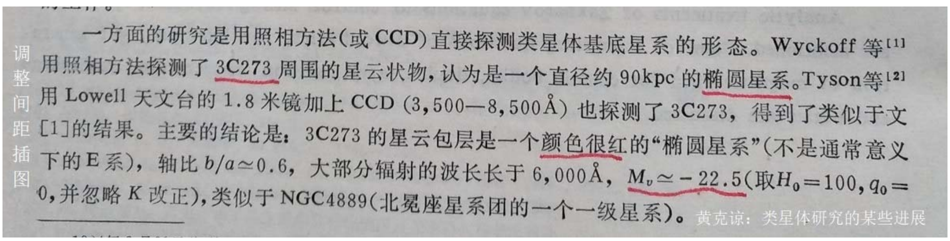
代入上方程(2.6e4)，得

$$p_n\overline{y}^{(n)}+p_{n-1}\overline{y}^{(n-1)}+p_{n-2}\overline{y}^{(n-2)}+\cdots+p_2\overline{y}''+\cdot p_1\overline{y}'=\ln f,\tag{2.6e6}$$

设 $\overline{y}$ 已是方程(2.6e6)的通解，则根据 $\overline{y}$ 与 y 的关系则得变系数 n 阶线性非齐次微分方程(2.6e2)的通解为

$$y=\exp\overline{y},\tag{2.6e7}$$

而方程(2.6e6)经 y 与 $\overline{y}$ 的换元后即为变系数 n 阶线性非齐次微分方程(2.6e2)，所以定理 7 成立。证毕。



一方面的研究是用照相方法(或 CCD)直接探测类星体基底星系的形态。Wyckoff 等[1]用照相方法探测了 3C273 周围的星云状物，认为是一个直径约 90kpc 的椭圆星系。Tyson等[2]用 Lowell 天文台的 1.8 米镜加上 CCD (3,500—8,500Å) 也探测了 3C273，得到了类似于文[1]的结果。主要的结论是：3C273 的星云包层是一个颜色很红的“椭圆星系”(不是通常意义下的 E 系)，轴比 $b/a\simeq0.6$，大部分辐射的波长长于 6,000Å，$M_v\simeq-22.5$(取$H_0=100$, $q_0=0$,并忽略 K 改正)，类似于 NGC4889(北冕座星系团的一个一级星系)。

2.6.f. 微根方程的应用

2.6f1. 人口统计中概念与物理概念的对应

在 2.3.c 微根在人口统计学中的意义一节中已提到：

微对数 $R^{\vee}(t)$在人口统计学中的意义为人口增长率，微根 $R^{\wedge}(t)$与微对数 $R^{\vee}(t)$是正变相关的，所以微根 $R^{\wedge}(t)$同样能反应人口变化情况，因此给人口数 $R(t)$对时间的微根 $R^{\wedge}(t)$一个专门的名称叫人口增根率。人口增根率 $R^{\wedge}(t)$也会随时间变化，为反应人口增根率 $R^{\wedge}(t)$变化的情况，可对人口增根率 $R^{\wedge}(t)$再作一次对时间的微根求得二阶微根 $R^{2\wedge}(t)$，并把二阶微根 $R^{2\wedge}(t)$称为人口加根率。

人口数 $R(t)$与物理学中的位置 $x(t)$或电荷 $q(t)$相对应。

人口增根率 $R^{\wedge}(t)$与物理学中的速度 $x'(t)$或电流 $q'(t)$相对应。

人口加根率 $R^{2\wedge}(t)$与物理学中的加速度 $x''(t)$或电流变化 $q''(t)$相对应。

2.6f2. 生态平衡“力”

我们假设跟物理学中的力对应，生态平衡中也存在一种“力”，它有如下的特征：

1) 这种“力”只有增长与抑制两个不同方向。

2) 设定“力”F 的方向后，取值于$(1, +\infty)$区间表示“力”的“绝对”大小；若求得值 $F \in (1, +\infty)$，则说明该力与设定方向一致，若求得值 $F \in (0, 1)$，则说明该“力”与设定方向相反，该“力”的“绝对”大小为求得值的倒数。

3) 设定合成“力”F 的方向后，若分“力”F_{11}、F_{12}、F_{13}、……、F_{1n} 的设定方向与 F 一致，而分“力”F_{21}、F_{22}、F_{23}、……、F_{2n} 的设定方向与 F 相反，那么合成“力”为

$$F = \frac{F_{11} \cdot F_{12} \cdot F_{13} \cdot \cdots\cdots \cdot F_{1n}}{F_{21} \cdot F_{22} \cdot F_{23} \cdot \cdots\cdots \cdot F_{2n}}, \tag{2.6f1}$$

若上(2.6f1)式中

$$F = 1, \tag{2.6f2}$$

表示各分“力”相互抵消已取得平衡，二组分“力”相互抵消已取得平衡也可表示为

$$F_{11} \cdot F_{12} \cdot F_{13} \cdot \cdots\cdots \cdot F_{1n} = F_{21} \cdot F_{22} \cdot F_{23} \cdot \cdots\cdots \cdot F_{2n}. \tag{2.6f3}$$

2.6f3. 人口演化微根方程

在人类的人口演化中，可把影响人口变化的几个因素抽象为几个指数：

1) 环境指数　生态环境容量 C 有限将抑制人口的增展，定义环境指数(为简化问题起见仅考虑环境为封闭域)

$$k_1 = \frac{1}{C}, \tag{2.6f4}$$

因为人口越多产生的抑制“力”就越大，所以环境产生的拒容“力”为

$$F_1 = \left[R(t)\right]^{k_1} = \left[R(t)\right]^{\frac{1}{C}}. \tag{2.6f5}$$

2) 社会作用指数　把计划生育等一些因素抽象为一个社会作用指数 k_2，因为计划生育最敏感的是人口增长率或人口增根率，所以社会作用对人口增长的抑制“力”为

$$F_2 = \left[R^\wedge(t)\right]^{k_2}. \tag{2.6f6}$$

3) 思想保守指数　计划生育作用对城市人口与农村人口就不一样，这表现为城市人口与农村人口素质的差异，把这种情况抽象为一个人群的思想保守指数 k_3，保守素质总希望保持原人口增长率或人口增根率 $R^\wedge(t)$不变，

因此产生对人口增根率 $R^{\wedge}(t)$的变化 $R^{2\wedge}(t)$逆反作用，其在抑制人口的作用的“力”为

$$F_3 = \left[R^{2\wedge}\left(t\right)\right]^{k_3}. \tag{2.6f7}$$

上述的三种“力”的设定方向都为抑制。

4) 育龄指数与自然增展“力” 通常生物在很少受到抑制因素作用时，出生率总是远高于死亡率的。人类自然生育有关的因素，主要与育龄人口有关，将其抽象为育龄指数 k_0，设 t_u 为平均育龄，因育龄人口出生时的人群人口数 $R\left(t-t_u\right)$ 与人口增根率 $R^{\wedge}\left(t-t_u\right)$ 有关，所以由此产生的促使人口增长的“力”称为自然增展“力”，即

$$F_0 = \left[R\left(t-t_u\right)\cdot R^{\wedge}\left(t-t_u\right)\right]^{k_0}. \tag{2.6f8}$$

当上述四种“力”平衡时，根据“力”平衡条件有

$$F_3 \cdot F_2 \cdot F_1 = F_0, \tag{2.6f9}$$

将(2.6f5)式、(2.6f6)式、(2.6f7)式、(2.6f8)式代入上式，得人口演化的微根方程为

$$\left[R^{2\wedge}\left(t\right)\right]^{k_3} \cdot \left[R^{\wedge}\left(t\right)\right]^{k_2} \cdot \left[R\left(t\right)\right]^{k_1} = F_0, \tag{2.6f10}$$

或

$$\left[R^{2\wedge}\left(t\right)\right]^{k_3} \cdot \left[R^{\wedge}\left(t\right)\right]^{k_2} \cdot \left[R\left(t\right)\right]^{\frac{1}{C}} = F_0. \tag{2.6f11}$$

这个人口演化微根方程跟微分方程(1.3.1)与(1.3.2)有一种对应的对称性，大家自己比较一下就能发现。

第三章　量纲危机及其解决

有很多读者认为微积开是一种新概念，其在纯数学上的推导也没有错误,但在应用在实际问题上量纲有矛盾。主要归结如下 3.1 与 3.2 二点问题：

3.1. 微对数的底数是否带量纲

微对数

$$y^{\vee} = f^{\vee}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \log_{1+\Delta x} \frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}. \tag{3.1}$$

通常在很多实际问题中 Δx 是一个有量纲的量，而对数计算应是无量纲的。

3.2. 微对数概念的萌芽中的量纲

在微对数概念的萌芽问题中，b 的量纲是 1/秒，是有量纲的量，用在对数式

$$r = c\log_{(1-b)}\left(\frac{1}{1+Z}\right). \tag{3.2}$$

而目前要求对数计算应是无量纲的。

上述这 2 个量纲问题困扰我很长时间，一个在数学上无错的问题，怎么会在量纲上存在问题呢？

3.3. 银行存款问题

对上述这 2 个问题可归结举一个大家都比较熟悉的例子，银行存款问

题。

设存款的利率 $k = 0.032$/年，存入本金 $Y_1 = 1$ 万元，要使取得本息 $Y_2 = 2$ 万元需要存期 T 为多长时间？用对数表达即

$$T = \log_{(1+k)}\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) = \log_{(1+0.032)}\left(\frac{2}{1}\right) \approx 22(\text{年}). \tag{3.3}$$

k(1/年)、Y_1(元)、Y_2(元)、T(年)都是有量纲的量，底数(1 + 0.032)中的 1 与 k 应当同量纲为(1/年)，那么底数(1 + 0.032)量纲为(1/年)，这与底数无量纲矛盾。所以目前都是对数计算先无量纲计算，计算结果再还回量纲。这种处理是否很别扭？

这是因为人们从习惯的线性空间量纲转入不熟悉对数空间时量纲产生矛盾的量纲回避解决法。

3.4. 量纲问题的解决

上述的银行存款问题是求如下方程的未知数 T

$$Y_2 = Y_1(1+k)^T, \tag{3.4.1}$$

从方程(3.4.1)中可解得

$$\begin{aligned}(1+k) &= \left[\frac{Y_2(\text{元})}{Y_1(\text{元})}\right]^{\frac{1}{T(\text{年})}} \\ &= \left[\frac{Y_2(\text{元})}{Y_1(\text{元})}\right]^{\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{(\text{年})}} = \left[\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)^{\frac{1}{T}}\right]^{\frac{1}{(\text{年})}},\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

可见(1 + k)有一个 1/年作指数的量纲。带这样量纲的话，代入方程(3.4.1)也正确

$$\begin{aligned}Y_2(\text{元})&=Y_1(\text{元})\left[\left(1+k\right)^{\frac{1}{(\text{年})}}\right]^{T(\text{年})}\\&=Y_1(\text{元})\left[\left(1+k\right)^{\frac{1}{T}}\right]^{\frac{1}{(\text{年})}\cdot(\text{年})}=Y_1\left(1+k\right)^{\frac{1}{T}}(\text{元}),\end{aligned}\tag{3.4.3}$$

带这样量纲的话，代入方程(3.4.1)解的对数表达式(3.3)也可正确量纲分析

$$\begin{aligned}T(\text{年})&=\log_{\left[(1+k)^{\frac{1}{(\text{年})}}\right]}\left[\frac{Y_2(\text{元})}{Y_1(\text{元})}\right]\\&=\log_{\left[(1+k)^{\frac{1}{(\text{年})}}\right]}\left[\frac{Y_2}{Y_1}\right]=\frac{\ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)}{\ln\left((1+k)^{\frac{1}{(\text{年})}}\right)}\\&=\frac{\ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)}{\frac{1}{(\text{年})}\ln(1+k)}=\frac{\ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)}{\ln(1+k)}(\text{年}),\end{aligned}\tag{3.4.4}$$

但又产生另一个问题，k 的量纲是(1/年)，怎么(1 + k)的量纲变为指数的(1/年)了？怎么协调这种跳变呢？

k 是利率，量纲是(1/年)，(1 + k)中的 1 应与 k 同量纲也是(1/年)，并把这个(1/年)称为基数。那么，存款单位时间增率可定义为：

$$\begin{aligned}\text{存款单位时间增率}&=\left(\frac{\text{基数}+\text{利率}}{\text{基数}}\right)^{\frac{1}{\text{单位时间}}}\\&=\left(\frac{\frac{1}{\text{单位时间}}+\frac{k}{\text{单位时间}}}{\frac{1}{\text{单位时间}}}\right)^{\frac{1}{\text{单位时间}}}=(1+k)^{\frac{1}{\text{单位时间}}},\end{aligned}\tag{3.4.5}$$

$(1+k)$为什么会消失分母量纲，在以上的定义中可找到答案了。

3.5. 微对数概念萌芽问题中的量纲

微对数概念萌芽的问题中的量纲分析即为

$$r(\text{光年/年})=c(\text{光年/年})\log_{\left[(1-b)^{\frac{1}{(\text{年})}}\right]}\left(\frac{1}{1+Z}\right)$$

$$=c(\text{光年/年})\frac{\ln\left(\frac{1}{1+Z}\right)}{\ln\left[(1-b)^{\frac{1}{(\text{年})}}\right]}=c(\text{光年/年})\frac{\ln\left(\frac{1}{1+Z}\right)}{\frac{1}{(\text{年})}\ln(1-b)} \quad (3.5.1)$$

$$=c\frac{\ln\left(\frac{1}{1+Z}\right)}{\ln(1-b)}\frac{(\text{光年/年})}{\frac{1}{(\text{年})}}=c\frac{\ln\left(\frac{1}{1+Z}\right)}{\ln(1-b)}(\text{光年}).$$

或者

$$r(\text{米})=c(\text{米/秒})\log_{\left[(1-b)^{\frac{1}{(\text{秒})}}\right]}\left(\frac{1}{1+Z}\right)$$

$$=c(\text{米/秒})\frac{\ln\left(\frac{1}{1+Z}\right)}{\ln\left[(1-b)^{\frac{1}{(\text{秒})}}\right]}=c(\text{米/秒})\frac{\ln\left(\frac{1}{1+Z}\right)}{\frac{1}{(\text{秒})}\ln(1-b)} \quad (3.5.2)$$

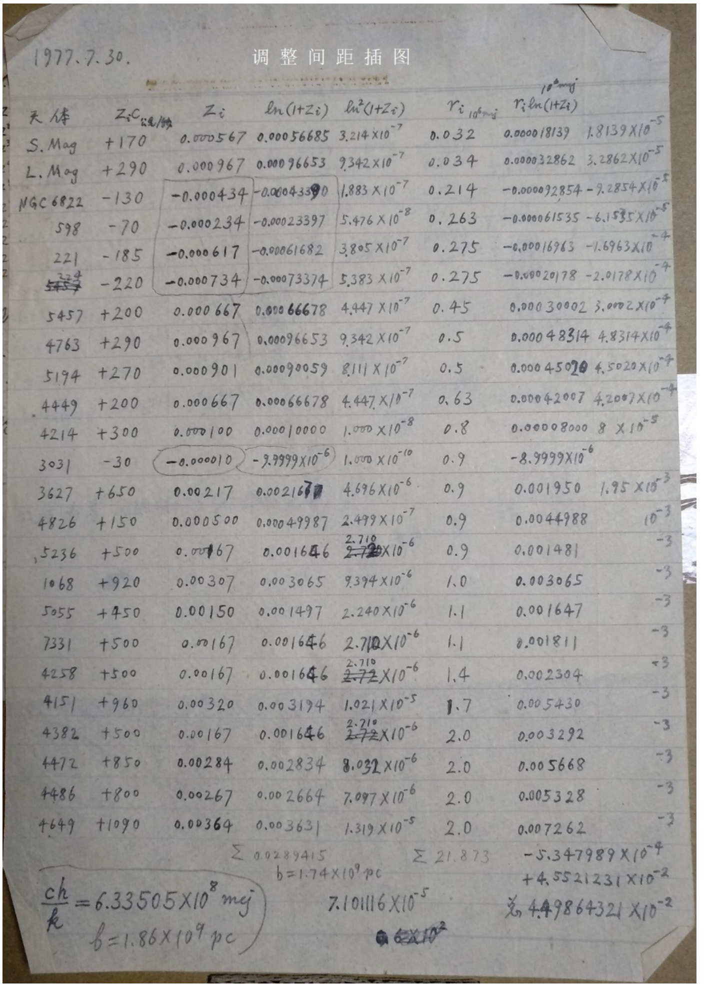
$$=c\frac{\ln\left(\frac{1}{1+Z}\right)}{\ln(1-b)}\frac{(\text{米/秒})}{\frac{1}{(\text{秒})}}=c\frac{\ln\left(\frac{1}{1+Z}\right)}{\ln(1-b)}(\text{米}).$$

3.6. 微对数的量纲

微对数定义式的量纲分析也应类同，只要定义微对数

$$
\begin{aligned}
y^{\vee} = f^{\vee}(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \log_{1+\Delta x} \frac{f(x+\Delta x)}{f(x)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \log_{\left(\frac{1+\Delta x}{1}\right)} \frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

量纲问题就可解决了，把上式中底数中的1称为基数，它与Δx同量纲。



1977.7.30.

调整间距插图

天体	Z_iC 公里/秒	Z_i	$\ln(1+Z_i)$	$\ln^2(1+Z_i)$	r_i 10^6mej	$r_i\ln(1+Z_i)$ 10^6mej	
S.Mag	+170	0.000567	0.00056685	3.214×10^{-7}	0.032	0.00018139	1.8139×10^{-5}
L.Mag	+290	0.000967	0.00096653	9.342×10^{-7}	0.034	0.000032862	3.2862×10^{-5}
NGC 6822	−130	−0.000434	−0.00043390	1.883×10^{-7}	0.214	−0.000092854	-9.2854×10^{-5}
598	−70	−0.000234	−0.00023397	5.476×10^{-8}	0.263	−0.000061535	-6.1535×10^{-5}
221	−185	−0.000617	−0.00061682	3.805×10^{-7}	0.275	−0.00016963	-1.6963×10^{-4}
224 ~~5457~~	−220	−0.000734	−0.00073374	5.383×10^{-7}	0.275	−0.00020178	-2.0178×10^{-4}
5457	+200	0.000667	0.00066678	4.447×10^{-7}	0.45	0.00030002	3.0002×10^{-4}
4763	+290	0.000967	0.00096653	9.342×10^{-7}	0.5	0.00048314	4.8314×10^{-4}
5194	+270	0.000901	0.00090059	8.111×10^{-7}	0.5	0.00045020	4.5020×10^{-4}
4449	+200	0.000667	0.00066678	4.447×10^{-7}	0.63	0.00042007	4.2007×10^{-4}
4214	+300	0.000100	0.00010000	1.000×10^{-8}	0.8	0.00008000	8×10^{-5}
3031	−30	−0.000010	-9.9999×10^{-6}	1.000×10^{-10}	0.9	-8.9999×10^{-6}	
3627	+650	0.00217	0.002167	4.696×10^{-6}	0.9	0.001950	1.95×10^{-3}
4826	+150	0.000500	0.00049987	2.499×10^{-7}	0.9	0.00044988	10^{-3}
5236	+500	0.00167	0.001646	2.710 ~~2.72~~ $\times10^{-6}$	0.9	0.001481	−3
1068	+920	0.00307	0.003065	9.394×10^{-6}	1.0	0.003065	−3
5055	+450	0.00150	0.001497	2.240×10^{-6}	1.1	0.001647	−3
7331	+500	0.00167	0.001646	2.710×10^{-6}	1.1	0.001811	−3
4258	+500	0.00167	0.001646	2.710 ~~2.72~~ $\times10^{-6}$	1.4	0.002304	−3
4151	+960	0.00320	0.003194	1.021×10^{-5}	1.7	0.005430	−3
4382	+500	0.00167	0.001646	2.710 ~~2.72~~ $\times10^{-6}$	2.0	0.003292	−3
4472	+850	0.00284	0.002834	8.032×10^{-6}	2.0	0.005668	−3
4486	+800	0.00267	0.002664	7.097×10^{-6}	2.0	0.005328	−3
4649	+1090	0.00364	0.003631	1.319×10^{-5}	2.0	0.007262	−3
			Σ 0.0289415		Σ 21.873	-5.347989×10^{-4}	
						$+4.5521231\times10^{-2}$	

$b=1.74\times10^{9}$ pc

$\frac{ch}{k}=6.33505\times10^{8}$ mej

$b=1.86\times10^{9}$ pc

7.101116×10^{-5}

~~6×10^{2}~~

和 4.49864321×10^{-2}

第四章　需继续深入的问题

微积开有很多值得继续深入的问题：

1) 因作者接触的实际问题的面有限，微积开的应用面很需要广大读者联系自己接触的实际问题，发现其新应用场合。

2) n 阶的微对数方程是否存在求解方法？

3) 多重积开、曲线积开、曲面积开的应用面在哪？

4) 对应于微积分中的傅里叶变换的微积开"傅里叶变换"是否有特殊的应用意义？对应于微积分中的拉普拉斯变换的微积开"拉普拉斯变换"是否也有特殊的应用意义？以及其它的对应变换问题。

5) 如果把微积开看成是(应变量)对数空间中的一种"微积分"，那么任一单调函数构成的(应变量)变换空间都可有该空间中的"微积分"，把它称为**微积函**，那么微积函的应用面又在哪呢？

6) 以及更一般的形式：任一单调函数构成的(自变量)变换空间都可有该空间中的"斯底尔吉斯微积分"[10]，把该概念扩张到微积函，任一单调函数构成的(自变量)变换空间都可有该空间中的"**斯底尔吉斯微积函**"，那么斯底尔吉斯微积函的应用面又在哪呢？

结束语：

微积开概念作为一种新的数学概念，与微积分的区别为：微积分是站在平直空间的立场去解决问题，而微积开是站在对数空间的立场去解决问题。其生命力在于：对适用问题的联系实际问题高效率。

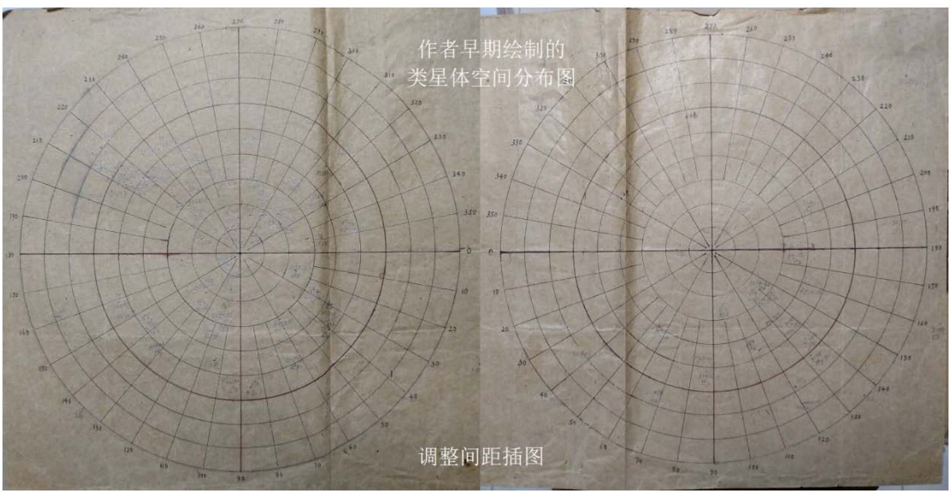
正如用 ab 与 $\exp(\ln a + \ln b)$ 都可用于求解边长为 a 与 b 的矩形面积。

但 ab 具有联系实际问题“边长为 a 与 b 的矩形面积”的高效率，笔算 ab 的积却效率差；而 $\exp(\ln a+\ln b)$ 联系实际问题效率差，查对数表加笔算加法求 $\exp(\ln a+\ln b)$ 相对于笔算 ab 的积的效率要高得多。因此在笔算时代，解决该实际问题总是先用 ab 联系实际问题“边长为 a 与 b 的矩形面积”，再用公式 $ab=\exp(\ln a+\ln b)$ 将计算转化为查对数表与加法笔算。

本文中的微积开概念就如同上述的 ab 那样有联系实际问题的高效率，本文中的7个定理就如同上述的“公式 $ab=\exp(\ln a+\ln b)$ ”那样来解决计算的高效率：把微积开变换为微积分计算。

有些读者因看到本文中的 7 个将微积开变换为微积分计算的定理后，认为微积开不是新概念，只不过是微积分的一种变量代换。其实那是大错特错了，这就如同见到公式 $ab=\exp(\ln a+\ln b)$ 后认为“乘法相对于加法不是一种新概念，只不过是加法的一种变换 $\exp(\ln a+\ln b)$ ”是一样的错误。

关于微积开肯定还有很多争议或值得讨论的问题，欢迎大家与本文作者交流讨论，作者的 Email：bsese@qq.com；或 bao@wz.zj.cn。



参考文献：

[1] E.H.阿弗雷特主编，李致森等译，天体物理学前沿，科学出版社，1982 年 7 月版，第 518 页。

[2] 复旦大学数学系编，数学分析(下册)，上海科学技术出版社，1960 年 5 月版，第 656 页。

[3] 周又元等，有射电子源结构类星体的统计分析，天文学报，1976 年第 17 卷第 2 期，第 134 页。

[4] 向义和编，大学物理导论(上册)，清华大学出版社，1999 年 2 月版，第 320 页。

[5] 复旦大学数学系编，数学分析(下册)，上海科学技术出版社，1960 年 5 月版，第 659 页。

[6] 中国医学科学院卫生研究所编，卫生统计学，人民卫生出版社，1987 年版，第 387 页。

[7] 向义和编，大学物理导论(上册)，清华大学出版社，1999 年 2 月版，第 304 页。

[8] 复旦大学数学系编，数学分析(上册)，上海科学技术出版社，1960 年 5 月版，第 178 页。

[9] 复旦大学数学系编，数学分析(上册)，上海科学技术出版社，1960 年 5 月版，第 126 页。

[10] 沈永欢等编，实用数学手册，科学出版社，1992 年 8 月版，第 211 页。

心的红移——类星体浪漫游

科幻推理小说

心的红移--类星体浪漫游

包学行 文

歌得吧贺 插图

微星哥 哈罗图制作

目录 与 内容摘要

2 调整间距插图

附录A　用微分方程解距离红移问题

如果星光传播中光子的能量有一非常小的损耗率，设光子瞬时损耗率为 H，在任一时刻 t，光子的能量为 E，设光速为 c，E_0 为光子从光源发出($t=0$)时具有的能量，E_1 为被观测($t=t_1$)时光子的能量值。那么有

$$\frac{dE}{dt}=-HE, \tag{A1}$$

上式中的负号因定义 H 为损耗率而加，对上式(A1)分离变量，得

$$\frac{dE}{E}=-Hdt, \tag{A2}$$

两边积分，得

$$\ln E=-Ht+C, \tag{A3}$$

上式中 C 为任意常数，将初始条件代入上式，得

$$C=\ln E_0, \tag{A4}$$

上式(A4)代入式(A3)，得

$$\ln E=-Ht+\ln E_0, \tag{A5}$$

移项，得

$$Ht=\ln E_0-\ln E, \tag{A6}$$

将边界条件代入，得

$$Ht_1=\ln E_0-\ln E_1, \tag{A7}$$

距离与传播时间的关系为

$$\frac{r}{c}=t_1-t_0=t_1-0=t_1, \tag{A8}$$

将距离与时间的关系(A8)代入式(A7)，得

$$\frac{Hr}{c}=\ln E_0-\ln E_1, \tag{A9}$$

由上式解得

$$r=\frac{c}{H}\ln\frac{E_0}{E_1}, \tag{A10}$$

因为

$$\begin{aligned}\frac{E_0}{E_1}&=\frac{h\nu_0}{h\nu_1}=\frac{\nu_0}{\nu_1}=\frac{c/\lambda_0}{c/\lambda_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\\&=\frac{\lambda_0+\varDelta\lambda}{\lambda_0}=1+\frac{\varDelta\lambda}{\lambda_0}=1+Z,\end{aligned} \tag{A11}$$

将上两式(A11)关系代入(A10)，得

$$r=\frac{c}{H}\ln(1+Z), \tag{A12}$$

由式(A5)解得

$$E=E_0\exp(-Ht), \tag{A13}$$

式(A12)中的 H 为光子的瞬时损耗率，单位时间损耗率应计算 $\varDelta t=1$ 时的 $\varDelta E/E$，由此可推得它与单位时间损耗率的关系为

$$\begin{aligned}b&=\frac{E_0\exp(-Ht)-E_0\exp[-H(t+1)]}{E_0\exp(-Ht)}=1-\frac{\exp[-H(t+1)]}{\exp(-Ht)}\\&=1-\exp[-H(t+1)-(-Ht)]=1-\exp[-H],\end{aligned} \tag{A14}$$

由上式解得

$$H=-\ln(1-b), \tag{A15}$$

将上式代入(A12)式，得

$$r = -\frac{c}{\ln(1-b)}\ln(1+Z), \tag{A16}$$

上式(A16)这个结果与主文中式(1.1.7)一致。

因为光子能量的单位时间损耗率很小，即 $b << 1$，因此有

$$\begin{aligned} H &= -\ln(1-b) \\ &= b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} - \cdots\cdots \\ &\approx b, \end{aligned} \tag{A17}$$

这里可能有读者会认为：H 为哈勃常数量纲为(公里/秒/百万秒差距)与 b 的量纲为(1/秒)二者量纲都不一样，且 H 的数值也不小约为(75 公里/秒/百万秒差距)，怎么会有 $H \approx b$ 呢？让我们仔细地分析一下：

1 公里 $= 10^3$ 米，

1 百万秒差距 $= 3.08568 \times 10^{16}$ 米，

$$\begin{aligned} H &= 75\,\text{公里/秒/百万秒差距} \\ &= 75\times10^3\,\text{米/秒}\Big/\left(3.08568\times10^{16}\,\text{米}\right) \\ &= 2.43058\times10^{-18}\Big/\text{秒}. \end{aligned}$$

H 的确是很小的数，是一个量纲也为(1/秒)的量。H 与 b 的偏差在 10^{-36}/秒的量级。

因此，将上式(A17)代入(A12)式，得

$$r = \frac{c}{H}\ln(1+Z) \approx \frac{c}{b}\ln(1+Z). \tag{A18}$$

附录B　类星体的本质(验证1)

包学行

目　录

B1. 类星体的特殊量

由于类星体存在很大的红移，其很多观测量都要作红移影响的修正，说明如下：

1. 观测色温度观测到的类星体光谱色指数 B-V 是已受到红移影响的，由 B-V 得出的温度为观测色温度 T_Z，由下式计算[1]

$$T_Z = \frac{7300K}{B - V + 0.60}, \tag{B1.1}$$

上式中的 K 为绝对温度单位；

2. 表面温度类星体的表面温度 T 考虑要作红移影响的修正，由下式近似计算，即

$$T = (1+Z)T_Z = \frac{(1+Z)7300K}{B - V + 0.60}, \tag{B1.2}$$

因为设 T 对应峰值波长分别为 λ_0，红移后的 T_Z 对应峰值波长分别为 λ，而峰值波长与温度成反比关系，有

$$Z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}, \tag{B1.3}$$

$$\lambda_0 = \frac{k}{T}, \tag{B1.4}$$

$$\lambda = \frac{k}{T_Z}, \tag{B1.5}$$

上三式中 k 为峰值波长与温度成反比的比例系数，从(B1.1)，(B1.3)，(B1.4)，(B1.5)式可解得(B1.2)式；

3. 红移热星等改正红移热星等改正(总是负值)为[2]

$$BC_1 = 42.54 - 10\lg T_Z - \frac{29000K}{T_Z}, \tag{B1.6}$$

这是未作红移影响修正的；

4. 热星等改正热星等改正(总是负值)为[2]

$$BC_2 = 42.54 - 10\lg T - \frac{29000K}{T}, \tag{B1.7}$$

这是已作红移影响修正的；

5. 改正绝对热星等类星体改正绝对热星等定义为不仅距离移到了 10 秒差距，并消除了引力红移影响后，整个热幅射所达到的星等，绝对热星等其值应为

$$M_{bol\,g} = m_{bol\,g} + 5 - 5\lg r_0, \tag{B1.8}$$

上式中 r_0 为类星体的以秒差距为单位的距离数，是一个无量纲的值。这是由于绝对星等定义中是以 10 秒差距为标准距离与实际距离 r 比得到上计算式的，为了使用有量纲的距离 r，引入一个常数

$$r_1 = 1pc = 1\text{秒差距}, \tag{B1.9}$$

将(B1.8)式改写为

$$M_{bol\,g} = m_{bol\,g} + 5 - 5\lg\frac{r}{r_1}, \tag{B1.10}$$

6. 改正热视星等上式中的 m_{bolg} 为改正热视星等，即

$$m_{bol\,g} = m_{bol} - 2.5\lg(1+Z), \tag{B1.11}$$

7. 热视星等上式中的 m_{bol} 为热视星等，即

$$m_{bol} = V + BC_1, \tag{B1.12}$$

8. BC_2 类星体的其他一些量如绝对视星等、改正视星等的计算须用到 BC_2，这里就不详述了。

B2. 类星体方程组

有许多人认为类星体的辐射为非热辐射频谱。作者认为虽然类星体辐

射频谱形似为非热辐射频谱，但这种频谱是由低密度高厚度类星体光球层热辐射频谱，因光球层各深度层光的引力红移差异叠加形成的。

有许多人认为类星体的红移全是由距离效应产生的，类星体是遥远的天体。作者认为类星体的红移主要是由距离效应与引力红移共同作用产生的，分离开二种红移后，距离红移分量是很小的。因此类星体距离要比原先许多人认定的小，类星体就分布在星系、星系团的附近。通过求解类星体方程组，可得出最早发现的一些类星体就分布在本星系群中。

若我们已知一个类星体的红移量 Z 及 UBV 测光的视星等 V (可见光)与蓝区视星等 B。如果假设类星体的光辐射主要是热辐射，则

用(B1.2)式可求得类星体的表面温度 T;

用(B1.11)式可求得类星体的改正热星等 m_{bolg}。

设类星体的 6 个未知量：

距离为 r (单位：秒差距，用符号 pc 表示);

质量为 M (单位：太阳质量，用符号 $M_\odot$表示);

半径为 R (单位：太阳半径，用符号 $R_\odot$表示);

(请注意在“微积开概念”一文中的 M 与 R 不是以太阳质量 $M_\odot$、太阳半径 $R_\odot$为单位的，距离 r 也不是以秒差距 pc 为单位的；而是采用国际标准单位的。)

改正绝对热星等为 M_{bolg};

距离红移量为 Z_r，即红移量 Z 中所含距离红移分量；

引力红移量为 Z_y，即红移量 Z 中所含引力红移分量。

再定义：质光比，即类星体的质量 M 与光度 L 之比为

$$\mu = \frac{M}{L}, \tag{B2.1}$$

类星体的距离红移分量因子为

$$\xi = \frac{\lg(1+Z_r)}{\lg(1+Z)}, \tag{B2.2}$$

引入作者在“微积开概念”一文[11]中推出的距离与距离红移关系公式及星体质量尺度与引力红移关系公式，可得到类星体方程组的如下 6 条方程式：

距离与距离红移的关系为[11]

$$r = \frac{c}{H}\ln(1+Z_r) = b_1 \lg(1+Z_r), \tag{B2.3}$$

其中

$$b_1 = \frac{c}{H\lg e}, \tag{B2.4}$$

从式(1.2.18)知，引力红移与天体质量及尺度的关系为[11]

$$\ln(1+Z_y) = \frac{GM_{\odot}M}{c^2 R_{\odot} R}, \tag{B2.5}$$

上(B2.5)式中 c 为光速，G 为万有引力系数；

红移的总量为

$$1+Z = (1+Z_r)(1+Z_y), \tag{B2.6}$$

改正绝对热星等为(B1.10)式[2]，再列于下面

$$M_{bolg} = m_{bolg} + 5 - 5\lg\frac{r}{r_1}, \tag{B2.7}$$

改正绝对热星等还可表为[1]

$$M_{bol\,g}=42.36-10\lg T-5\lg R, \tag{B2.8}$$

光度为[2]

$$L=10^{-0.4\left(M_{bol\,g}-M_{bol\odot}\right)}, \tag{B2.9}$$

上(B2.9)式中 $M_{bol\odot}$为太阳的绝对热星等。

B3. 类星体方程组的求解

对(B2.6)式两边取对数并移项，得

$$\lg\left(1+Z_y\right)=\lg\left(1+Z\right)-\lg\left(1+Z_r\right), \tag{B3.1}$$

由(B2.1)式与(B2.9)式解得

$$M=\mu 10^{0.4M_{bol\odot}-0.4M_{bol\,g}}, \tag{B3.2}$$

由(B2.8)式解得

$$R=10^{8.472-2\lg T-0.2M_{bol\,g}}, \tag{B3.3}$$

将(B2.5)式对数换底，得

$$\frac{\lg\left(1+Z_y\right)}{\lg e}=\frac{GM_{\odot}M}{c^2R_{\odot}R}, \tag{B3.4}$$

将(B3.1)式、(B3.2)式与(B3.3)式代入(B3.4)式，得

$$\begin{aligned}&\lg\left(1+Z\right)-\lg\left(1+Z_r\right)\\&=\frac{\mu\lg e\cdot GM_{\odot}}{c^2R_{\odot}}10^{-8.472+0.4M_{bol\odot}+2\lg T-0.2M_{bol\,g}},\end{aligned} \tag{B3.5}$$

由(B2.3)式代入(B2.7)式，得

$$M_{bol\,g}=m_{bol\,g}+5-5\lg\left[\frac{b_1}{r_1}\lg\left(1+Z_r\right)\right], \tag{B3.6}$$

由(B3.6)式代入(B3.5)式，得

$$\lg(1+Z)-\lg(1+Z_r) = \frac{b_1\mu\lg e\cdot GM_\odot 10^{0.4M_{bol\odot}}}{2.964831389\times10^9 r_1 c^2 R_\odot}\lg(1+Z_r)10^{2\lg T-0.2m_{bol\,g}}, \tag{B3.7}$$

令

$$b_2=\frac{b_1\lg e\cdot GM_\odot 10^{0.4M_{bol\odot}}}{2.964831389\times10^9 r_1 c^2 R_\odot}, \tag{B3.8}$$

将(B3.8)式代入(B3.7)式并移项，得

$$\left(1+b_2\mu10^{2\lg T-0.2m_{bolg}}\right)\lg(1+Z_r)=\lg(1+Z), \tag{B3.9}$$

两边除以相同的因式，结合(B2.2)式，得

$$\xi=\frac{\lg(1+Z_r)}{\lg(1+Z)}=\frac{1}{1+b_2\mu10^{2\lg T-0.2m_{bolg}}}, \tag{B3.10}$$

上式结合(B2.3)式，得

$$r=b_1\lg(1+Z_r)=b_1\xi\lg(1+Z), \tag{B3.11}$$

还可从式(B2.2)或式(B3.10)中求出距离红移量为

$$Z_r=10^{\xi\lg(1+Z)}-1, \tag{B3.12}$$

由(B2.5)式求出引力红移为

$$Z_y=\exp\frac{GM_\odot M}{c^2R_\odot R}-1, \tag{B3.13}$$

至此类星体的 6 个未知量的解析解表达式都已求出。

B4. 类星体方程组中常数的确定

B4.1. 距离红移公式中常数 b_1 的确定

取哈勃最早用于定哈勃常数的 24 个星系数据[3]，设这 24 个星系的红

移量 Z 中既包含有距离红移分量 Z_r，也包含随机的速度分量 Z_u，则

$$1+Z_u=\frac{1+Z}{1+Z_r}, \tag{B4.11}$$

由上式结合(B2.3)式可解得

$$\begin{aligned} Z_u &= \frac{1+Z}{1+Z_r}-1 \\ &= \frac{1+Z}{10^{(r/b_1)}}-1, \end{aligned} \tag{B4.12}$$

24 个星系的距离是已知的，只要将 b_1 值定正确了，那随机的速度分量将会相互抵消，即有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{24} Z_{ui} &= \sum_{i=1}^{24}\left(\frac{1+Z}{1+Z_{ri}}-1\right) \\ &= \sum_{i=1}^{24}\left(\frac{1+Z}{10^{(r_i/b_1)}}-1\right)\approx 0, \end{aligned} \tag{B4.13}$$

24 个星系的数据代入方程(B4.13)以

$$\sum_{i=1}^{24} Z_{ui}=1.221399357\times10^{-07}\approx 0, \tag{B4.14}$$

解得

$$\begin{aligned} b_1 &= 1.687753770\times10^{9}\ pc \\ &= 1.687753770\times10^{9}\text{秒差距}, \end{aligned} \tag{B4.15}$$

由于 24 个星系的原始数据的精度所限，b_1 的有效精度值取为

$$\begin{aligned} b_1 &= 1.69\times10^{9}\ pc \\ &= 1.69\times10^{9}\text{秒差距}. \end{aligned} \tag{B4.16}$$

求解过程的中间数据见(表 1)。

表 1. 用(哈勃最早定哈勃常数的)24 个星系数据确定常数 b_1 的计算中间数据表

参数名 / 单位 / 名称	r	$v = Zc$	$Z = v/c$	$\lg(1+Z)$	$r/b = \lg(1+Z_r)$	$\lg(1+Z_u)$	u
	10^6 pc	km/s	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-5}
S.Mag	0.032	170	5.6706	2.4620	1.896011170	2272.407	52.33779
L.Mag	0.034	290	9.6734	4.1991	2.014511868	3997.605	92.09062
NGC6822	0.214	−130	−4.336	−1.8837	12.67957470	−3151.612	−72.54221
NGC598	0.263	−70	−2.335	−1.0142	15.58284180	−2572.458	−59.21549
NGC221	0.275	−185	−6.171	−2.6808	16.29384599	−4310.215	−99.19714
NGC224	0.275	−220	−7.338	−3.1882	16.29384599	−4817.586	−110.8675
NGC5457	0.45	200	6.6713	2.8963	26.66265708	230.06920	5.2976795
NGC 4736	0.5	290	9.6734	4.1991	29.62517453	1236.5383	28.476399
NGC5194	0.5	270	9.0062	3.9096	29.62517453	947.07851	21.809667
NGC 4449	0.63	200	6.6713	2.8963	37.32771991	−836.4371	−19.25782
NGC 4214	0.8	300	10.007	4.3438	47.40027925	−396.2496	−9.123567
NGC 3031	0.9	−30	−1.001	−0.4346	53.32531415	−5767.148	−132.7054
NGC 3627	0.9	650	21.682	9.4060	53.32531415	4073.503	93.839882
NGC 4826	0.9	150	5.0035	2.1724	53.32531415	−3160.099	−72.73751
NGC 5236	0.9	500	16.678	7.2372	53.32531415	1904.687	43.866666
NGC 1068	1	920	30.688	13.307	59.25034906	7382.141	170.12463
NGC5055	1.1	450	15.010	6.5140	65.17538397	−3.499020	−0.080568
NGC7331	1.1	500	16.678	7.2372	65.17538397	719.6804	16.572626
NGC4258	1.4	500	16.678	7.2372	82.95048868	−1057.830	−24.35447
NGC4151	1.7	960	32.022	13.885	100.7255934	3812.266	87.819203
NGC4382	2	500	16.678	7.2372	118.5006981	−4612.851	−106.1584
NGC4472	2	850	28.353	12.296	118.5006981	446.0358	10.270881
NGC4486	2	800	26.685	11.574	118.5006981	−276.3017	−6.361878
NGC4649	2	1090	36.359	15.762	118.5006981	3911.584	90.108124
				b_1=1.687753770×10^9		$\sum u$=1.221399357×10^{-7}	

注：因表格宽度所限，所列的中间数据的保留位数已被裁短。

B4.2. 常数 b_2 的确定

将太阳质量[2]

$$M_{\odot}=1.989\times10^{30}kg=1.989\times10^{30}\text{公斤},$$

太阳半径[2]

$$R_{\odot}=6.9599\times10^{8}m=6.9599\times10^{8}\text{米},$$

太阳的绝对热星等[2]

$$M_{bol\odot}=4.75$$

万有引力常数[1]

$$\begin{aligned}G&=6.672\times10^{-11}N\cdot m^{2}\cdot kg^{-2}\\&=6.672\times10^{-11}\text{牛顿}\cdot\text{米}^{2}\cdot\text{千克}^{-2},\end{aligned}$$

光速[1]

$$\begin{aligned}c&=2.99792458\times10^{8}m\cdot s^{-1}\\&=2.99792458\times10^{8}\text{米}\cdot\text{秒}^{-1},\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}b_1&=1.687753770\times10^{9}\,pc,\\&=1.687753770\times10^{9}\text{秒差距},\end{aligned}$$

代入(B3.8)式，得

$$\begin{aligned}b_2&=\frac{b_1\lg e\cdot GM_{\odot}10^{0.4M_{bol\odot}}}{2.964831389\times10^{9}r_1c^{2}R_{\odot}}\\&=\frac{1.68775377\times10^{9}\lg e\cdot6.672\times10^{-11}\times1.989\times10^{30}\times10^{0.4\times4.75}}{2.964831389\times10^{9}\times1\times\left(2.99792458\times10^{8}\right)^{2}\times6.9599\times10^{8}}\\&=4.166197109\times10^{-5},\end{aligned}\tag{B4.21}$$

b_2 为一个无量纲常数。由于原始数据的精度所限，b_2 的有效精度值取

为

$$b_2 = 4.17 \times 10^{-5}. \tag{B4.22}$$

B4.3. 类星体质光比 μ 的确定

如果一个类星体与星系成协，设它所处的距离与成协星系同距离都为 r，它们的距离红移都为 Z_r，则可由(B3.10)式与(B3.11)式解得

$$\mu = \frac{\lg(1+Z) - \lg(1+Z_r)}{b_2 \lg(1+Z_r) \cdot 10^{2\lg T - 0.2 m_{bolg}}}, \tag{B4.31}$$

我们可用 n 个与星系成协的类星体数据，用(B4.31)式求出 n 个 μ_i 值，再用统计方法求出 1 个 μ 的中间值。

但作者目前只具有 1 个与星系成协的类星体的齐全数据，即

类星体 3C275.1 (Z = 0.557, B = 19.00, B-V = 0.23, A_V = 0)与星系 NGC4651 (Z = 0.0025)成协，将这些数据代入各相关式，得 3C275.1 的

$$\begin{aligned} T_Z &= \frac{(1+Z)7300K}{B-V+0.60} = \frac{7300K}{0.23+0.60} \\ &= 8795.180723K, \end{aligned} \tag{B4.32}$$

$$\begin{aligned} T &= (1+Z)T_Z \\ &= (1+0.557)8795.180723 \\ &= 13694.09639K, \end{aligned} \tag{B4.33}$$

$$\begin{aligned} BC_1 &= 42.54 - 10\lg T_Z - \frac{29000}{T_Z} \\ &= 42.54 - 10\lg 8795.180723 - \frac{29000}{8795.180723} \\ &= -0.199707951 \approx -0.20, \end{aligned} \tag{B4.34}$$

$$\begin{aligned} m_{bol} &= V + BC_1 = 19.00 - 0.199707951 \\ &= 18.80029205 \approx 18.80, \end{aligned} \tag{B4.35}$$

$$\begin{aligned} m_{bol\,g} &= m_{bol} - 2.5\lg(1+Z) \\ &= 18.80029205 - 2.5\lg(1+0.557) \\ &= 18.31957052 \approx 18.32, \end{aligned} \tag{B4.36}$$

将(B4.32)式至(B4.36)式的数据代入(B4.31)式，得

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\left(4.166197109\times10^{-5}\right)^{-1}\left[\lg(1+0.557)-\lg(1+0.0025)\right]}{\lg(1+0.0025)\cdot10^{2\lg13694.09639-0.2\times18.31957052}} \\ &= 104.0933565 \approx 104. \end{aligned} \tag{B4.37}$$

只用一个类星体数据求出的 μ 值，总还不大放心使用，因此先选 2 个角距较近有可能成协的类星体，使用 $\mu = 104$ 求解类星体的距离，如果求出的距离确实非常接近，那么这个 $\mu = 104$ 就可放心使用于初算，先验证一批数据。

作者选用了类星体

3C323.1 ($Z = 0.264$, $V = 16.69$, $B\text{-}V = 0.11$, $A_V = 0.31$)

与 3C334 ($Z = 0.555$, $V = 16.41$, $B\text{-}V = 0.12$, $A_V = 0.51$)

的数据，它们角距约 8.5 度，求得它们的距离分别约为 327,000 秒差距与 306,000 秒差距(见表 2)，距离差约为 21,000 秒差距(这个距离差跟银河系至大麦哲伦云的距离 52,000 秒差距同量级)，显然 3C323.1 与 3C334 它们是成协的(图 4.1)。因为若再将它们的角距约 8.5 度转作线距约为 47,000 秒差距，它们间的实距约为 52,000 秒差距，跟银河系至大麦哲伦云的距离几乎相等。

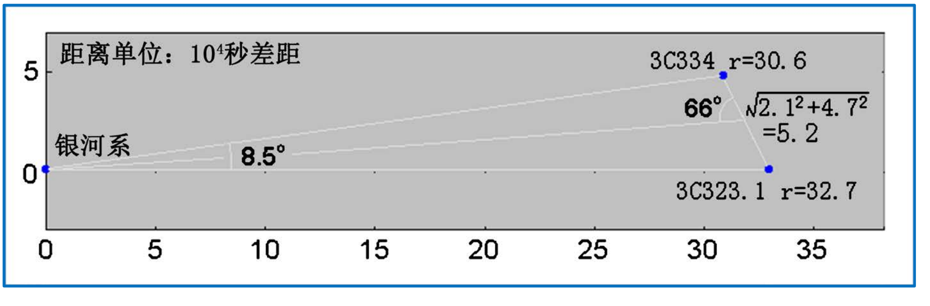


图 4.1. 类星体 3C323.1 与 3C334 成协示意图

它们间的连线与我们视线的夹角约为 66 度。

此外还可用两成协类星体的数据来定质光比。设两类星体成协(它们的各参数分别加足标 a、b)因距离相等，由式(B3.11)得

$$\xi_a \lg(1+Z_a) = \xi_b \lg(1+Z_b), \tag{B4.38}$$

将式(B3.10)代入(B4.38)，得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+b_2\mu 10^{2\lg T_a - 0.2m_{bolga}}}\lg(1+Z_a) \\ &= \frac{1}{1+b_2\mu 10^{2\lg T_b - 0.2m_{bolgb}}}\lg(1+Z_b), \end{aligned} \tag{B4.39}$$

交叉相乘，得

$$\begin{aligned} &\left(1+b_2\mu 10^{2\lg T_b - 0.2m_{bolgb}}\right)\lg(1+Z_a) \\ &= \left(1+b_2\mu 10^{2\lg T_a - 0.2m_{bolga}}\right)\lg(1+Z_b), \end{aligned} \tag{B4.310}$$

展开各项，得

$$\begin{aligned} &\lg(1+Z_a) + b_2\mu 10^{2\lg T_b - 0.2m_{bolzgb}} \lg(1+Z_a) \\ &= \lg(1+Z_b) + b_2\mu 10^{2\lg T_a - 0.2m_{bolzga}} \lg(1+Z_b), \end{aligned} \tag{B4.311}$$

移项，提取公因式，得

$$\begin{aligned} &b_2\mu\left[10^{2\lg T_b - 0.2m_{bolzgb}} \lg(1+Z_a) - 10^{2\lg T_a - 0.2m_{bolzga}} \lg(1+Z_b)\right] \\ &= \lg(1+Z_b) - \lg(1+Z_a), \end{aligned} \tag{B4.312}$$

解得

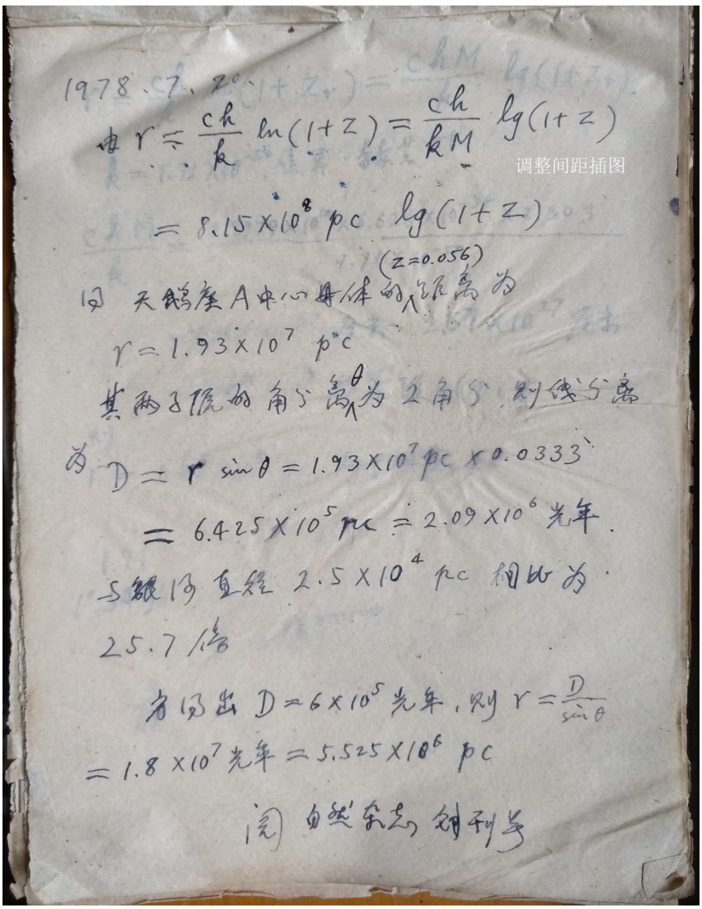
$$\mu = \frac{\lg(1+Z_b) - \lg(1+Z_a)}{b_2\left[10^{2\lg T_b - 0.2m_{bolzgb}} \lg(1+Z_a) - 10^{2\lg T_a - 0.2m_{bolzga}} \lg(1+Z_b)\right]}. \tag{B4.313}$$

因作者手头比较公认的二成协类星体(数据齐全的)都未找到，所以未用

式(B4.313)求质光比。

B5. 用类星体方程组求解一批类星体

确定了 b_1、b_2、μ 这些常数后，现将一批共 38 个类星体数据[1][9]用类星体方程组求解，其中 10 个为光变类星体，28 个为非光变类星体，求得的数据如表 2。这些类星体方程组求解的数据与所有指出类星体是局域的观测证据[4]-[8][10]都能吻合。



1978.7.20

由 $r \doteq \frac{ch}{k}\ln(1+z) = \frac{ch}{kM}\lg(1+z)$

$= 8.15\times10^{8}\ pc\ \lg(1+z)$

$(z=0.056)$

因天鹅座A中心母体的距离为

$r = 1.93\times10^{7}\ pc$

其两子星的角分离 θ 为 2 角分，则线分离

为 $D = r\sin\theta = 1.93\times10^{7}\ pc \times 0.0333$

$= 6.425\times10^{5}\ pc = 2.09\times10^{6}$ 光年.

与银河直径 2.5×10^{4} pc 相比为

25.7 倍

若测出 $D=6\times10^{5}$ 光年，则 $r=\frac{D}{\sin\theta}$

$=1.8\times10^{7}$ 光年 $=5.525\times10^{6}$ pc

阅 自然杂志 创刊号

表 2. 用类星体方程组求解 38 个类星体样品数据表

3C 系统 (参数名)	PKS 系统	Z	$V0$	V	$B\text{-}V$	Av	Tz	T	$BC1$	$BC2$	$mbol$	$mbolg$	ξ	$lg(1+Zr)$	r	$Mbolg$	L	M	$lg(1+Zy)$	R	ρ	$\lg\rho$	θ	$r\theta$
单位							K	K							10^6pc		$L_\odot$	$10^6M_\odot$		千分光日	$\rho_\odot$		"	10^6AU
3C9	0017+15	2.012	18.21	17.84	0.21	0.37	9012	27145	−0.23	−2.87	17.61	16.42	0.0006005	0.0002876	0.48533	−7.01	50747	5.2824	0.4786	0.273	3770	3.576	10	4.8533
3C39	0118+03	0.765	18.09	18.09	0.31	0	8022	14159	−0.12	−1.02	17.97	17.36	0.0033913	0.0008368	1.41227	−8.39	181023	18.843	0.2459	1.898	40.2	1.604	35	49.43
	0119−04	1.955	17.03	17.03	0.46	0	6887	20350	−0.05	−1.97	16.98	15.8	0.0008051	0.0003788	0.63938	−8.23	155068	16.142	0.4702	0.850	383	2.583	3	1.9181
3C47	0113+20	0.425	18.1	17.62	0.05	0.48	11231	16004	−0.55	−1.31	17.07	16.69	0.001956	0.0003009	0.50779	−6.84	43221	4.499	0.1535	0.726	171	2.234	68.8	34.936
3C95	0349−14	0.614	16.24	15.87	0.33	0.37	7849	12669	−0.1	−0.78	15.77	15.25	0.0016074	0.0003342	0.56401	−8.51	201209	20.944	0.2076	2.499	19.5	1.291	22	12.408
3C205	0835+58	1.534	17.62	16.96	0.48	0.66	6759	17128	−0.05	−1.49	16.91	15.9	0.0011888	0.0004801	0.81023	−8.64	227397	23.671	0.4033	1.454	112	2.050	15.8	12.802
3C207	0838+13	0.684	18.15	17.16	0.43	0.99	7087	11935	−0.06	−0.66	17.1	16.54	0.0032754	0.0007414	1.25122	−8.95	301762	31.411	0.2256	3.449	11.2	1.048	8.4	10.51
3C208	0850+14	1.11	17.42	16.59	0.34	0.83	7766	16386	−0.1	−1.37	16.49	15.68	0.0011749	0.000381	0.64302	−8.36	175069	18.224	0.3239	1.394	98.1	1.992	11.2	7.2018
3C215	0903+16	0.411	18.27	17.6	0.21	0.67	9012	12716	−0.23	−0.78	17.37	17	0.0035691	0.0005337	0.90071	−7.77	102134	10.631	0.149	1.767	28.1	1.448	28	25.22
	0922+14	0.896	17.96	17.41	0.54	0.55	6404	12141	−0.05	−0.69	17.36	16.66	0.0033524	0.0009314	1.57203	−9.32	424557	44.194	0.2769	3.953	10.4	1.018	40	62.881
4C02.27	0932+02	0.659	17.39	16.72	0.13	0.67	10000	16590	−0.36	−1.41	16.36	15.81	0.0012153	0.0002672	0.45094	−7.46	76576	7.971	0.2196	0.899	160	2.204	40	18.038
4C00.37	0957+00	0.907	17.57	17.04	0.47	0.53	6822	13010	−0.05	−0.83	16.99	16.29	0.0024604	0.0006898	1.16415	−9.04	328396	34.184	0.2797	3.027	17.9	1.254		0
4C20.24	1055+20	1.11	17.07	17.07	0.44	0	7019	14811	−0.05	−1.12	17.02	16.2	0.0018276	0.0005927	1.00025	−8.8	261978	27.27	0.3237	2.087	43.7	1.641	21	21.005
3C254	1111+40	0.734	17.98	17.98	0.15	0	9733	16878	−0.32	−1.45	17.66	17.06	0.0020863	0.0004987	0.84172	−7.57	84375	8.7828	0.2386	0.912	169	2.227	13.2	11.111
3C261	1132+30	0.614	18.24	18.24	0.24	0	8690	14026	−0.19	−1	18.05	17.53	0.0037487	0.0007794	1.31537	−8.06	133342	13.88	0.2071	1.660	44.2	1.646	10.8	14.206
3C270.1	1218+33	1.519	18.61	18.61	0.19	0	9241	23277	−0.26	−2.38	18.35	17.35	0.0012554	0.0005037	0.8501	−7.3	65810	6.8504	0.4007	0.423	1310	3.119	9	7.6509
4C21.35	1222+21	0.435	17.5	17.5	0.06	0	11061	15872	−0.52	−1.29	16.98	16.59	0.0018984	0.0002978	0.50255	−6.92	46462	4.8364	0.1566	0.765	157	2.197	10	5.0255
3C275.1	1241+16	0.557	19	19	0.23	0	8795	13694	−0.2	−0.94	18.8	18.32	0.0056394	0.0010844	1.83017	−7.99	125071	13.019	0.1912	1.686	39.5	1.597	13.2	24.158

表2 续

3C 系统	PKS 系统	Z	$V0$	V	$B\text{-}V$	Av	Tz	T	$BC1$	$BC2$	$mbol$	$mbolg$	ξ	$lg(1+Zr)$	r	$Mbolg$	L	M	$lg(1+Zy)$	R	ρ	$\lg\rho$	θ	$r\theta$
单位							K	K							10^6pc		$L_\odot$	$10^6M_\odot$		千分光日	$\rho_\odot$		"	10^6AU
3C280.1	1258+40	1.659	19.44	19.44	−0.13	0	15532	41299	−1.24	−4.32	18.2	17.14	0.0003619	0.0001537	0.2594	−4.93	7454.3	0.7759	0.4246	0.045	122000	5.086	19.3	5.0064
3C281	1305+06	0.599	17.02	17.02	0.13	0	10000	15990	−0.36	−1.31	16.66	16.15	0.0015295	0.0003118	0.52622	−7.46	76240	7.9361	0.2035	0.966	128	2.108	40.1	21.101
4C11.45	1318+11	2.171	16.74	16.74	0.1	0	10429	33069	−0.42	−3.53	16.32	15.06	0.0002171	0.0001088	0.18366	−6.26	25260	2.6294	0.5011	0.130	17400	4.242	5.3	0.9734
	1335−06	0.625	17.68	17.68	0.14	0	9865	16030	−0.34	−1.32	17.34	16.81	0.002063	0.000435	0.73415	−7.52	80665	8.3967	0.2104	0.988	127	2.103	7.8	5.7264
3C288.1	1340+60	0.961	18.12	18.12	0.39	0	7374	14460	−0.07	−1.07	18.05	17.32	0.0031984	0.0009354	1.5788	−8.67	233903	24.348	0.2915	2.068	40.1	1.603	6.7	10.578
3C298	1416+06	1.439	16.79	16.79	0.33	0	7849	19145	−0.1	−1.8	16.69	15.72	0.0008753	0.0003389	0.57203	−8.07	134037	13.952	0.3869	0.893	285	2.455	1.4	0.8008
4C20.33	1422+20	0.871	17.65	17.65	0.44	0	7019	13133	−0.05	−0.85	17.6	16.92	0.0032195	0.000876	1.47839	−8.93	297449	30.963	0.2712	2.828	20	1.300	8	11.827
	1453−10	0.94	17.37	16.88	0.44	0.49	7019	13617	−0.05	−0.93	16.83	16.11	0.0020653	0.0005944	1.00318	−8.9	288616	30.043	0.2872	2.591	25.2	1.401	30.2	30.296
3C336	1622+23	0.927	17.47	16.98	0.44	0.49	7019	13526	−0.05	−0.92	16.93	16.21	0.002199	0.0006264	1.05728	−8.91	290420	30.231	0.2843	2.634	24.1	1.382	21.7	22.943
3C432	2120+16	1.804	17.96	16.45	0.22	1.51	8902	24962	−0.21	−2.59	16.24	15.12	0.0003906	0.0001749	0.29516	−7.23	62077	6.4618	0.4476	0.358	2060	3.314	12.9	3.8075
3C2		1.037	19.35	19.35	0.79	0	5252	10698	−0.18	−0.46	19.17	18.39	0.009519	0.0029413	4.96416	−10.1	860363	89.558	0.306	7.248	3.43	0.535	5.7	28.296
3C138		0.759	18.84	14.72	0.53	4.12	6460	11363	−0.05	−0.57	14.67	14.06	0.0011545	0.0002832	0.47789	−9.34	433036	45.076	0.245	4.557	6.94	0.841	0.4	0.1912
3C147		0.545	17.8	13.32	0.65	4.48	5840	9023	−0.09	−0.23	13.23	12.76	0.0010076	0.0001904	0.32128	−9.78	646618	67.309	0.1887	8.833	1.42	0.153	1.1	0.3534
3C245		1.029	17.27	17.27	0.46	0	6887	13973	−0.05	−0.99	17.22	16.45	0.0022981	0.0007062	1.19185	−8.93	296602	30.874	0.3066	2.494	29.0	1.462	3.5	4.1715
3C249.1		0.311	15.72	15.13	−0.02	0.59	12586	16501	−0.76	−1.39	14.37	14.07	0.0005523	6.495E−05	0.10963	−6.13	22421	2.3339	0.1175	0.492	286	2.456	23	2.5214
3C273		0.158	12.8	12.8	0.21	0	9012	10436	−0.23	−0.42	12.57	12.41	0.0006432	4.098E−05	0.06916	−6.78	41110	4.2793	0.0637	1.665	13.5	1.131	19.6	1.3556
3C323.1		0.264	16.69	16.38	0.11	0.31	10282	12996	−0.4	−0.83	15.98	15.72	0.0019023	0.0001936	0.32667	−6.85	43495	4.5275	0.1016	1.104	49.0	1.690	68.2	22.279
3C334		0.555	16.41	15.9	0.12	0.51	10139	15766	−0.38	−1.28	15.52	15.04	0.0009442	0.000181	0.30555	−7.38	71445	7.437	0.1915	0.962	122	2.086	41	12.528
3C351		0.371	15.28	14.6	0.13	0.68	10000	13710	−0.36	−0.95	14.24	13.9	0.0007378	0.0001011	0.17064	−7.26	63853	6.6467	0.1369	1.202	55.7	1.746	59	10.068
3C351		0.371	15.28	14.6	0.13	0.68	10000	13710	−0.36	−0.95	14.24	13.9	0.0007378	0.0001011	0.17064	−7.26	63853	6.6467	0.1369	1.202	55.7	1.746	5.5	0.9385
3C446		1.404	18.39	18.06	0.44	0.33	7019	16874	−0.05	−1.45	18.01	17.05	0.0020804	0.0007925	1.33751	−8.58	214432	22.321	0.3801	1.454	106	2.024	0.4	0.535

B6. 类星体方程组求解数据的图解分析

将(表 2)中 38 个类星体的求解数据用 Excel 生成类星体的各种关系图，通过这些图就更能直观地显露类星体方程组揭示的类星体的一些规律与特性了。

B6.1. 类星体在赫罗图上的位置

类星体在赫罗图(图 6.1)上的斜率，跟超巨星、巨星的斜率非常接近。类星体所处的位置好象是比超巨星还要超巨的位置，在光变类星体与超巨星之间是造父变星的位置，图上未标出。

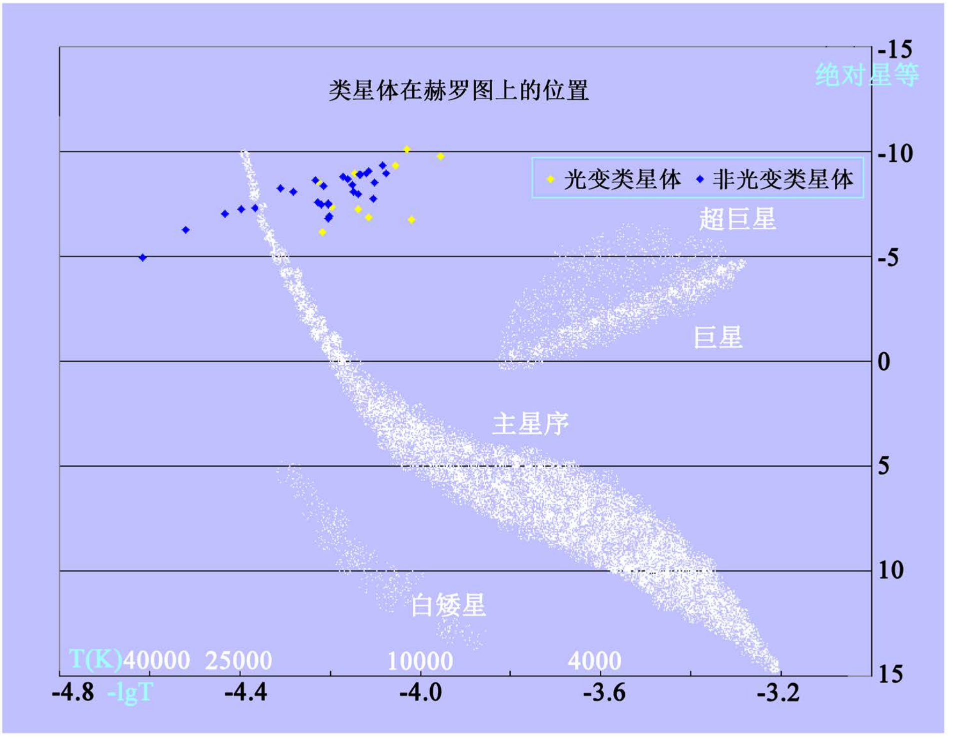


图 6.1. 类星体在赫罗图上的位置

B6.2. 类星体的红移分布图

[美] G.R.伯比奇曾指出类星体的红移分布存在一些密集处与稀少处[4][5]。

根据类星体方程组的计算数据，类星体的红移中引力红移占主要分量，可见(表 2)，将这些数据绘出类星体的引力红移分布图(图 6.2)，从该图中可看出这种引力红移的分布主要是非光变类星体引起，说明非光变类星体的某些稳定的星体壳层结构，可产生某些密集的引力红移值，见(图 6.2)上方蓝色点。但光变类星体的壳层结构在较快的变化之中，所以光变类星体的引力红移分布较散，见(图 6.2)下方黄色点。

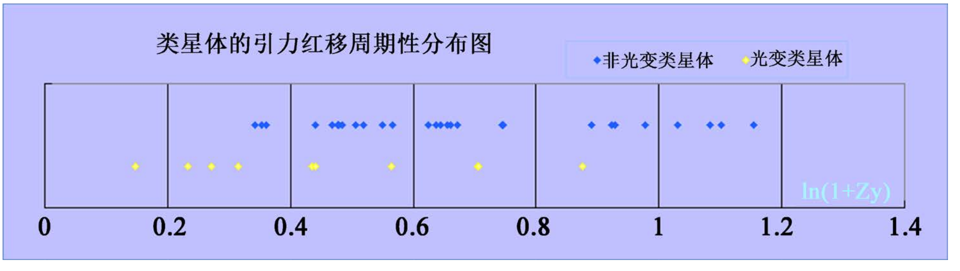


图 6.2. 类星体的引力红移分布图

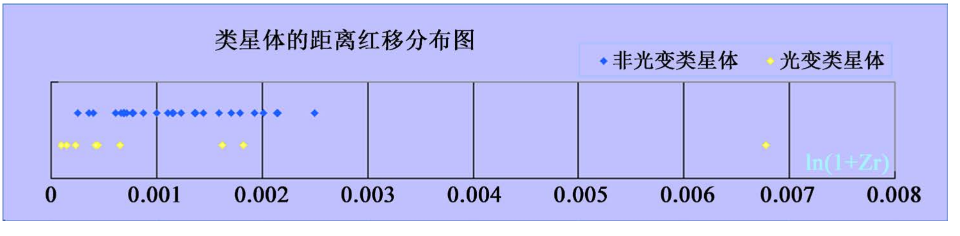


图 6.3. 类星体的距离红移分布图

类星体的距离红移分布如(图 6.3)，非光变类星体距离红移较集中，而光变类星体的距离红移较分散，这是因为近处的光变至较弱光变类星体与远处的光变至较强的光变类星体亮度接近，都被观测为一些相近的视星等(最亮的一批类星体)引起。(注意：作者使用的是一批最早观测到的较亮的

类星体。)

B6.3. 类星体的光度与尺度半径及引力红移的关系图

通常尺度半径大可增大亮度，引力红移过大会降低亮度。

B6.3.1. 非光变类星体的光度与尺度半径及引力红移的关系图

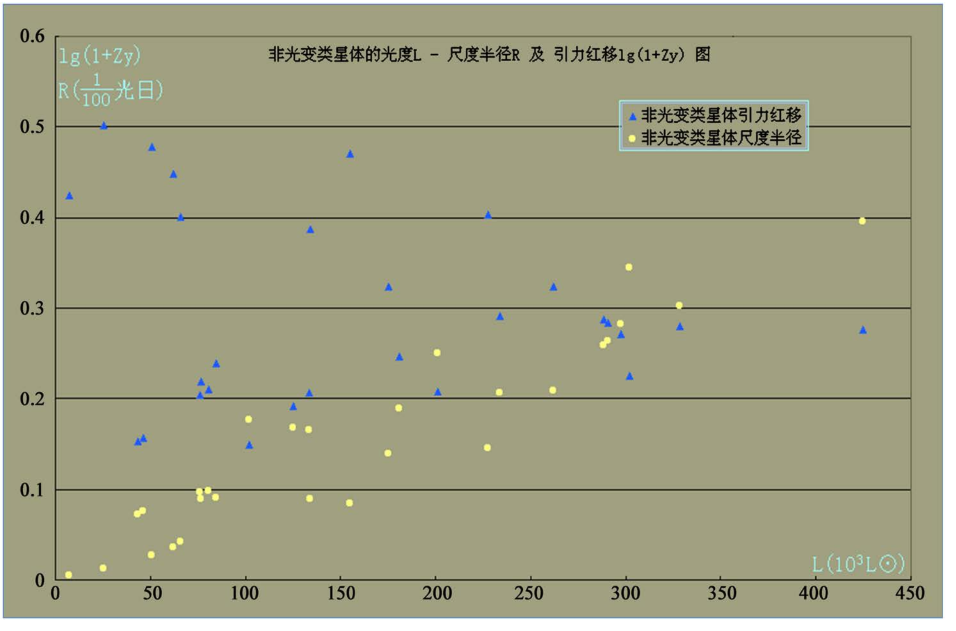


图 6.4. 非光变类星体的光度与尺度半径及引力红移的关系图

(图 6.4)中的非光变类星体基本符合：尺度半径大可增大亮度，引力红移过大会降低亮度；质量大对发光的供献高于引力红移对发光的损耗时，图中有一段引力红移增加发光也增加的阶段，这时的引力红移属适当大。

B6.3.2. 光变类星体的光度与尺度半径及引力红移的关系图

光变类星体的光度与尺度半径及引力红移的关系较复杂(图 6.5)，看来光变类星体的质光比 μ 还不能作常数处理，光变类星体的质光比 μ 还会与其它

一些量有关，这有待使用更多的光变类星体的观测数据来确定这种关系。

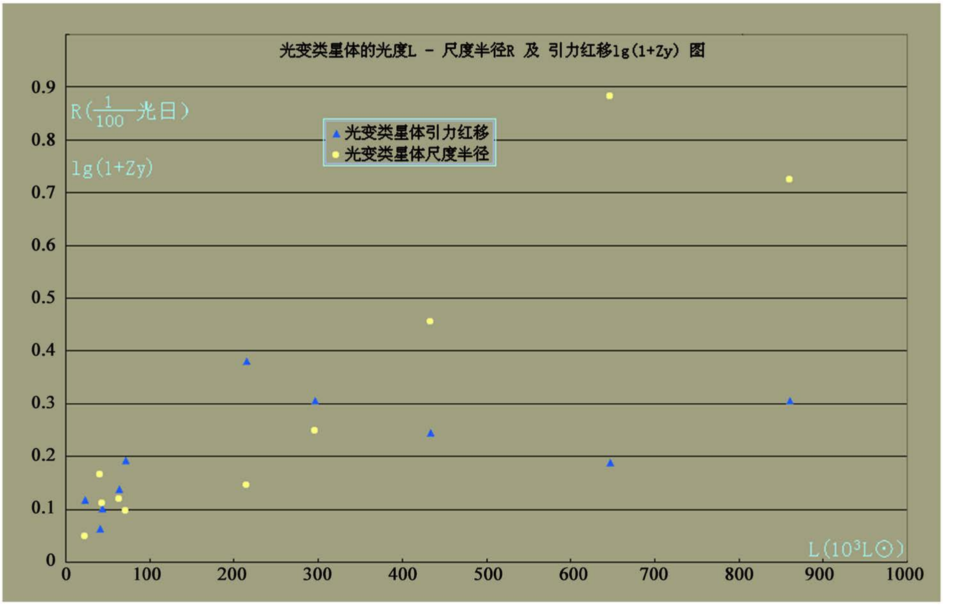


图 6.5. 光变类星体的光度与尺度半径及引力红移的关系图

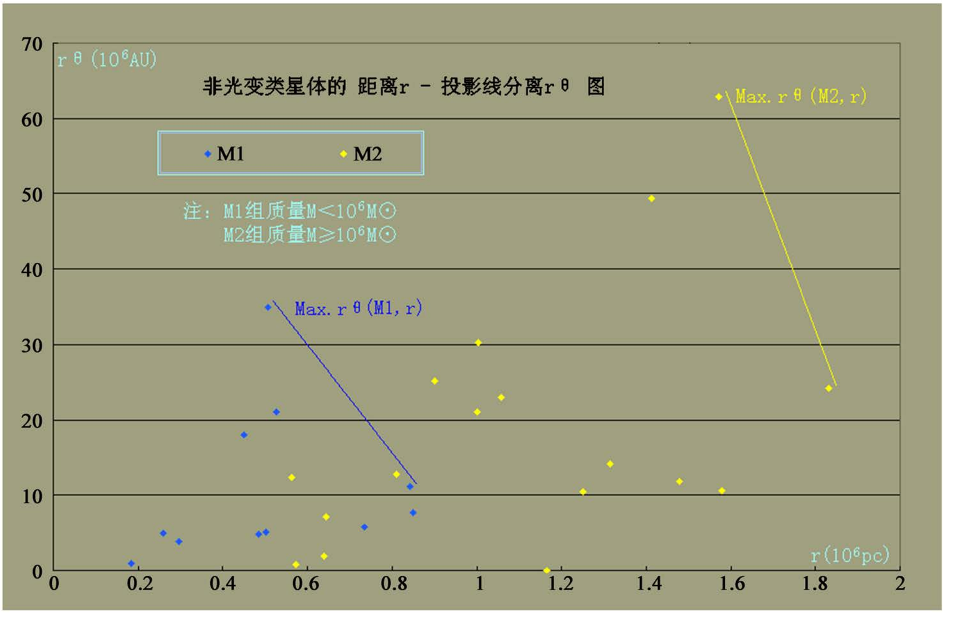


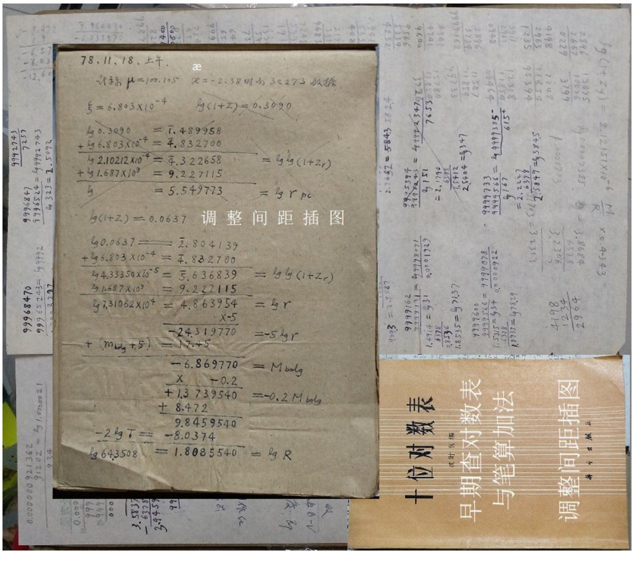
图 6.6. 非光变类星体的距离 *r* 与子源投影线分离 *rθ* 的关系图

B6.4. 非光变类星体的距离 *r* 与子源投影线分离 *rθ* 的关系图

因光传输的时延，距离 *r* 也具有时标性质；子源间最大投影线分离 *rθ* 也是随时间增大的也具有时标性质(非最大值会受子源间连线与视向夹角大小影响)。因此类星体的距离 *r* 与子源投影线分离 *rθ* 的关系图上，同一的类星体质量组的最大子源投影线分离 *rθ* 的临界线 Max.*rθ*(r)应具有负斜率，见(图 6.6)。

小结：通过以上的图解分析，可见本文的类星体方程组求解的数据已显露了一些类星体的规律特性。因此呼于专业天体物理工作者对本文的类星体方程组作进一步的验证。

注：一些读者对本文中类星体方程组求解过程将解的解释式转换为以 10 为底的对数形式感到不理解，为什么要作这种形式的转换呢？这是因为本文的初稿形成于 70 年代，当时求解类星体方程组的计算是用查 10 位对数表[12]结合加法笔算求得的，80 年代有了电子计算器后又用电子计算器作了验算，90 年代有了微机与 Excel 软件又再作了一次的验算。由于以后的验算都是采用早期已形成的计算式，因此有本文的以 10 为底的计算式。



参考文献：

[1] [英] C.W.艾伦编，杨建译，物理量与天体物理量，上海人民出版社，1976 年版，第 14、19、243、349 页。

[2] 戴文赛主编，天文学教程(上册)，上海科学出版社，1961 年 12 月版，第 157、297、355、372、408、478-481 页。

[3] [美]埃德温·哈勃著，伍任译，河外星云的距离和视向速度之间的关系，自然辨证法杂志，1975 年第 4 期，第 155 页。

[4] [美] G.R.伯比奇著，胡家璁、钱毓敏译，红移问题，摘译，1975 年第 4 期，第 9 页。

[5] 曹盛林编，宇宙天体交响曲，中国华侨出版社，1995 年 12 月，第 1 版，第 143 页。

[6] [美]霍尔顿·阿尔普著，伍任译，星系天文学中的观测佯谬，自然辨证法杂志，1975 年，第 4 期，第 163 页。

[7] [美] M.施米特、F.贝洛著，殷鹏程译，类星体的演化，摘译，1975 年，第 4 期，第 27 页。

[8] 戴文赛，星系的结构与演化，科学通报，1976 年，第 6 期。

[9] 周又元等，有射电子源结构类星体的统计分析，天文学报，1976 年第 17 卷，第 2 期，第 134 页。

[10] 赵仁扬，宇宙射电，科学出版社，1978 年 9 月，第 1 版，第 135 页。

[11] 包学行，微积开概念，见本文件组的正文。

[12] 沈时悦编，十位对数表，科学出版社，1974 年 4 月，第 1 版。

附录C　类星体的本质(验证2)

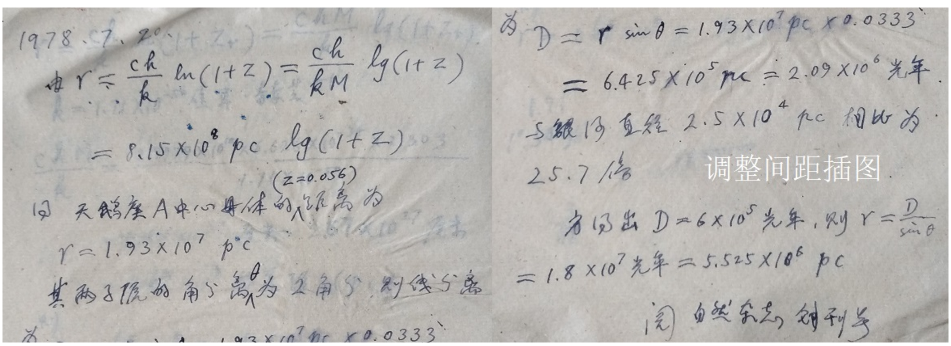
目　录

C1. 概述

作者在微积开概念中产生的类星体模型(简称：类星体微积开模型)，在“类星体的本质(验证 1)”对类星体微积开模型已作了初步的验证。“类星体的本质(验证 1)”因是早期(1975 年至 1978 年)所作，数据量小(24 个星系、38 个类星体)。原是先用 10 位对数表与后用函数计算器求解的，在格子纸上作图。用较原始的计算工具完成计算，这也说明微积开概念下建立的物理模型，更切合原型，更便于计算。后来再用 Excel95 重新作了验算与作图。

近年来用星系 NED-D8.1.0 (1 万多有红移数据星系)[1]、类星体 SDSS DR7 (10 多万类星体)[2]等数据作了统计分析，计算式仍然是用“类星体的本质(验证 1)”的计算算式，仅类星体的表面温度计算作了改进，完善了高温端吻合，重新统计分析。

通过分析，作出了更有说服力结果，例如类星体微积开模型计算的类星体距离与子源角分离的关系成反比减少，类星体的空间分布与距离的关系成反比减少，作出的类星体赫罗图显示出了类星体的演化轨迹、轨迹相近处类星体光谱特性相近，轨迹反映了类星体在核燃料燃烧的主过程中尺度缩小、引力红移增加、密度增加；而主过程中又叠加小的反复尺度膨胀、引力红移减少、密度降低。等等。



1978.7.20

由 $r \approx \frac{ch}{k}\ln(1+z) = \frac{ch}{kM}\lg(1+z)$

$= 8.15\times10^{8}\ pc\ \lg(1+z)$ $(z=0.056)$

得 天鹅座A中心母体的距离为

$r = 1.93\times10^{7}\ pc$

其两子源的角分离为 2 角分，则线分离

为 $D = r\sin\theta = 1.93\times10^{7}\ pc\times0.0333$

$= 6.425\times10^{5}\ pc = 2.09\times10^{6}$ 光年

与银河直径 $2.5\times10^{4}\ pc$ 相比为

25.7 倍

又写出 $D = 6\times10^{5}$ 光年，则 $r = \frac{D}{\sin\theta}$

$= 1.8\times10^{7}$ 光年 $= 5.525\times10^{6}\ pc$

阅 自然杂志 创刊号

C.2. 引力红移误作距离红移对天文学的误导与困惑

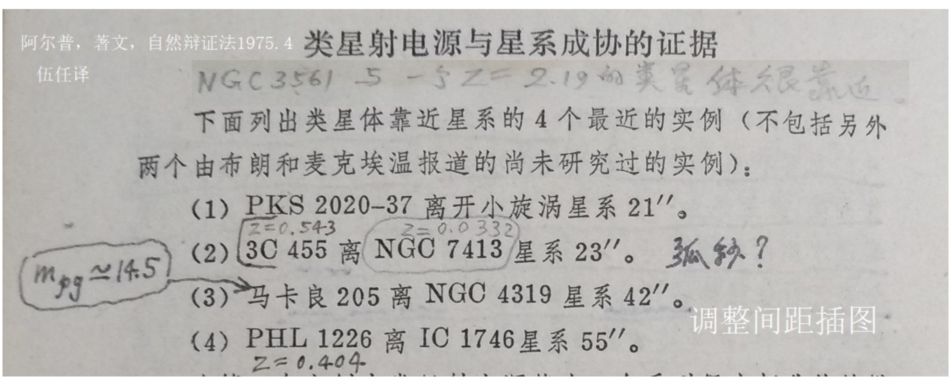
C2.1. 误导与困惑

引力红移误作距离红移对天文学的误导与困惑主要表现的误解在：时变很快的类星体却产能巨大；类星体子源分离超光速；存在超过可见物质量的暗物质等等。

C2.2. 距离标准被引力红移干扰

作者希望用更多的星系数据统计求 b 值，以及更多的星系与类星体成协数据统计求 μ 值。作者找到了星系 NED-D8.1.0 (1 万多有红移数据星系)的数据[1]，满怀希望能统计出更正确的 b 值。曾统计得出 $b_1 = 1.107 \times 10^{10}$ 秒差距。但对 NED-D8.1.0 的数据分组作出的红移 Z 与距离 D 的关系图(图 C2.1)，可看出红移 Z 与距离 D 的关系出现了很多起伏波动。红移 Z 以 0.001 间隔分组，一个组内的距离数据甚至相差 20 多倍，与距离的相关性非常差，平均值 3 次趋势线的相关系数 $R^2 < 0.71$。

为什么会产生这种情况？作者认为主要是由于把引力红移当距离红移


阿尔普，著文，自然辩证法1975. 4

伍任译

类星射电源与星系成协的证据

NGC3561 -5 -5 Z=2.19 的类星体很靠近

下面列出类星体靠近星系的 4 个最近的实例（不包括另外两个由布朗和麦克埃温报道的尚未研究过的实例）：

(1) PKS 2020-37 离开小旋涡星系 21″。

(2) 3C 455 离 NGC 7413 星系 23″。 弧线?

$z=0.543$ $z=0.0332$

$m_{pg} \simeq 14.5$

(3) 马卡良 205 离 NGC 4319 星系 42″。

(4) PHL 1226 离 IC 1746 星系 55″。

$z=0.404$

调整间距插图

引起的；另还有一个原因是历史上多次修正标准烛光的天体，而NED-D8.1.0 的数据参考文献的时间跨度为(1996 年至 2012 年) 7 年，各文献参考了不同的标准烛光，甚至同名天体的各文献距离数据相差 10 多倍。

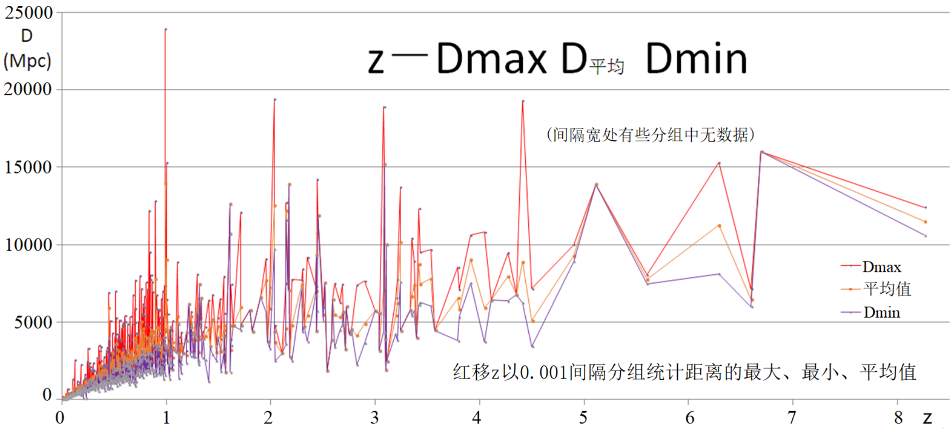


图 C2.1. 红移 Z 分组一距离 DmaxD 平均 Dmin 图

这种混乱的局面，就如美国天文学家阿尔普指出：[4]

谁走下一步棋?

这里评述的大部分证据散在各处文献中，我之所以要在这里把它们收集到一起，并尝试超出纯技术的水平给以评价，是因为看来对于这些证据天文学已走进了死胡同，而考察为什么会是这样的以及如何才能把死胡同打通是很有意义的。

很多学者都认识到是引力红移误作距离产生了误解，但用爱因斯坦的引力红移公式求解，却难以完满解决。这个困惑的原因就是爱因斯坦的引力红移公式仅是适用弱引力红移的公式，大引力红移要用微积开概念中推导的引力红移公式。

注：附录 C 中红移量用 Z 与 z 表示，牵连到文献相关时用小写的 z 表示红移量。

C3. 几个有变化参数的确定

星系 NED-D8.1.0 的数据杂乱，作者不敢采用；决定仍然采用哈勃早期观测的 24 个星系作出的统计值。

目前观测到的星系红移值，主要是包含距离红移与引力红移 2 种成分的。哈勃早期观测的 24 个星系引力红移是较小的，因此作者就近似当距离红移值作统计，在附录 B 中求出 b_1 值，得

$$\begin{aligned} b_1 &= 1.687753770\times 10^9\, pc \\ &= 1.687753770\times 10^9 \text{秒差距}, \end{aligned} \tag{B4.15}$$

尽管仅用 24 个星系数据量小，但其标准是单一的。因此作者暂仍采用，本文就采用由此求得的 b_1 值。

待以后有条件的天文机构把每个星系都测定核心与周边二个红移值。把测得星系晕周边恒星光谱红移值近似作为星系的距离红移值，把测得星系核心光谱红移值扣除距离红移值后得到核心的引力红移值。再把标准烛光重新理一下。才可用更大数量的星系数据统计求 b_1 值。

C3.1. 类星体的 *V B B-V* 换算

在 SDSS DR7 中测光为 *UGRIZ* 测光，因此作者参考《Transformation From SDSS Photometric Systemto Johnson-Morgan-Cousins System in HK Survey》的换算式：[3]

$$B = g^* + 0.348\left(g^* - r^*\right) + 0.175, \tag{C3.1}$$

$$B = g^* + 0.162\left(u^* - g^*\right) + 0.094, \tag{C3.2}$$

$$V = g^* - 0.561\left(g^* - r^*\right) - 0.004, \tag{C3.3}$$

$$V = r^* + 0.439\left(g^* - r^*\right) - 0.004, \tag{C3.4}$$

$$\left(B-V\right)=0.916\left(g^{*}-r^{*}\right)+0.187. \tag{C3.5}$$

C3.2. 类星体引力红移族参数与类星体表面温度计算公式

附录 B 中作者是把恒星的表面温度计算式(B1.1)引用于计算类星体的表面温度的。并又曾先暂用于计算 SDSS DR7 类星体的表面温度，求解数据作出类星体的赫罗图，发现类星体在赫罗图上存在依引力红移分族特性。在分析引力红移分族特性与引力红移关系时，发现 10 多万的数据中有 3 个数据离群在外，查是因色指数为负求出表面温度可能偏差大。但另有 6 个色指数更偏负的在图上找不到数据点，查是因色指数为负求出表面温度也为负值，无法求对数值。分析表明类星体表面温度引用恒星表面温度公式存在问题。因此找到了胡宜宁与巩岩的《星模拟器星光颜色模拟的初步研究》中的公式[6]，并采用该文献中的公式作为类星体表面温度的计算公式。改变说明如下：

观测色温度　观测到的类星体光谱色指数 B-V 是已受到红移影响的，由 B-V 得出的温度为观测色温度 T_Z，在附录 B 中由下式计算

$$T_Z=\frac{7300K}{B-V+0.60}, \tag{B1.1}$$

上式中的 K 为绝对温度单位；在本附录 C 中改为采用[6]

$$T_Z=\begin{cases}A_1e^{-(B-V)/k_1}+y_1, & B-V<0,\\ A_2e^{-(B-V)/k_2}+y_2, & B-V<0,\end{cases} \tag{C3.6}$$

式中

$$A_1=1079.20644,\quad k_1=0.09824,\quad y_1=8180.59419,$$
$$A_2=8906.09411,\quad k_2=1.59761,\quad y_2=3.663.$$

表面温度　类星体的表面温度 T 考虑要作红移影响的修正，在附录 B 中由下式近似计算，即

$$T=(1+Z)T_Z=\frac{(1+Z)7300K}{B-V+0.60}, \tag{B1.2}$$

在本附录 C 中改为采用[6]

$$T=(1+Z)T_Z=\begin{cases}(1+Z)\left[A_1e^{-(B-V)/k_1}+y_1\right], & B-V<0,\\ (1+Z)\left[A_2e^{-(B-V)/k_2}+y_2\right], & B-V<0,\end{cases} \tag{C3.7}$$

其它算式不变。

b_2 值在附录 B 中求得为

$$b_2=4.166197109\times10^{-5},$$

由于 b_2 的值与 b_1 成正比，仍用

$$b_2=4.166197109\times10^{-5}; \tag{C3.8}$$

μ 值在附录 B 中是用类星体 3C275.1 (Z = 0.557, B = 19.00, B-V = 0.23, A_V = 0)与星系 NGC4651 (Z = 0.0025)成协，求得

$$\mu=104.0933565\approx104.$$

由于求 T值的算式改变了， μ 值也改变了，需重新计算，得

$$\mu=142.1183713\approx142. \tag{C3.9}$$

C4. 类星体在赫罗图中的引力红移分族特性

作了上述这些改变后，重新求解得到非光变类星体在赫罗图上存在依引力红移分族特性如(图 C4.1)。

统计得出(图 C4.2)引力红移分族的族参数 Hy 为

$$H_y=\_M_{bolg}-10.1557\cdot\_\lg T, \tag{C4.1}$$

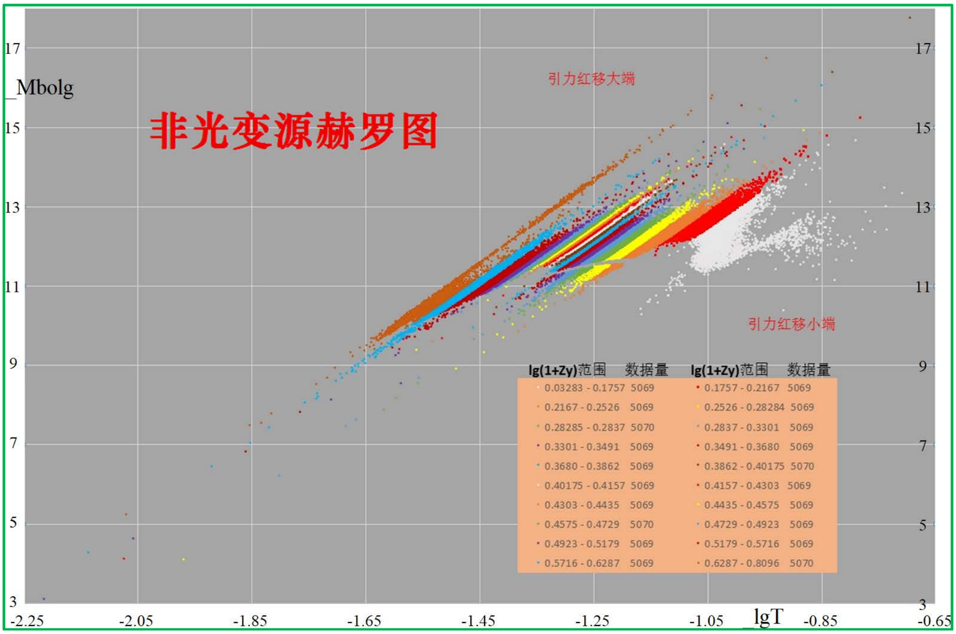


图 C4.1. 非光变类星体在赫罗图上依引力红移分族

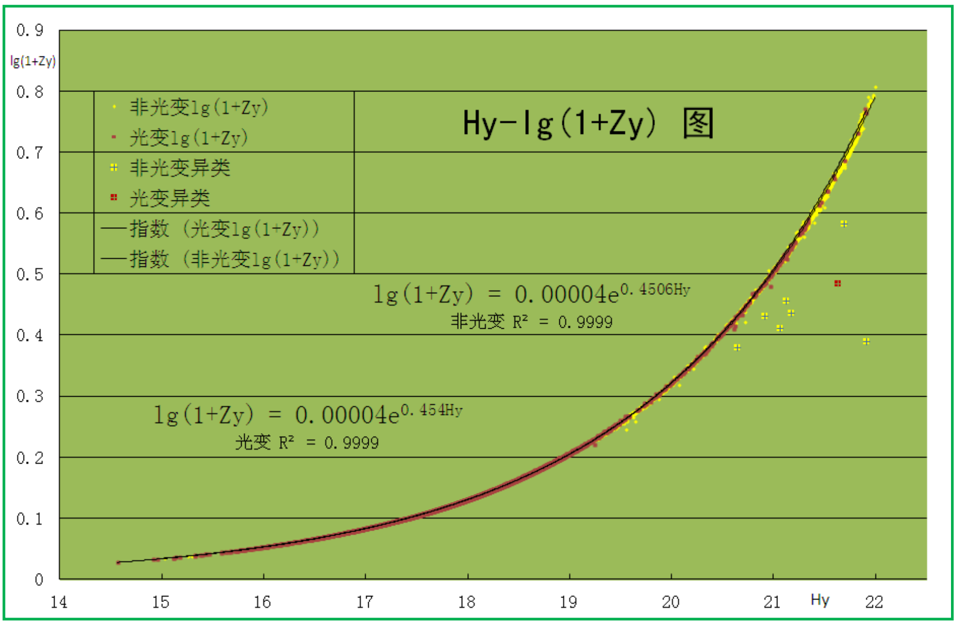


图 C4.2. 类星体的 Hy-lg(1 + Zy)图

与引力红移的关系为

$$\lg\left(1+z_y\right)=\begin{cases}0.00004e^{0.4506H_y}, & (\text{非光变类星体})\\ 0.00004e^{0.454H_y}, & (\text{光变类星体})\end{cases} \tag{C4.2}$$

上式的相关系数为

$$R^2=0.9999. \tag{C4.3}$$

但(图 C4.2)中仍有少数数据弥散在外，这是因为式(C4.1)中的 T 在高低温分段计算的衔接存在偏差，有待进一步的改进。

在(图 C4.1)中，引力红移分族的各族是平行的，作者认为这仅是数量级上接近的初步定量计算结果，原因是目前仅统用一个类星体质光比 μ 值。实际上类星体的质光比 μ 值会有二种变化：长时标会随引力红移增大而变化，短时标会随表面状态(黑子数量、耀斑、喷流等)而变化，下文再作分析。目前还未统计出这种关系，如果正确处理了这种关系，作者猜想得到的引力红移分族的各族应是不平行的上端稍张的**扇形**的。

C5. 二种距离的合理性对照分析

二种距离是指类星体微积开模型得出的距离(简称：微积开距离)，与宇宙大爆炸理论计算的距离(简称：宇宙学距离)。

C5.1. 用类星体的分布密度统计看哪个距离更合理

由于类星体的红移之迷还有争议，用不同理论得出的距离不一样。用不同理论得出的距离来统计观测到的类星体分布密度，从中对照，看哪个理论得出的距离更合理。

用 SDSS DR7 的点源数据，分别采用宇宙学距离与微积开距离得出类星体分布密度。

(图 C5.1、图 C5.2)为用宇宙学距离得出的类星体分布密度。

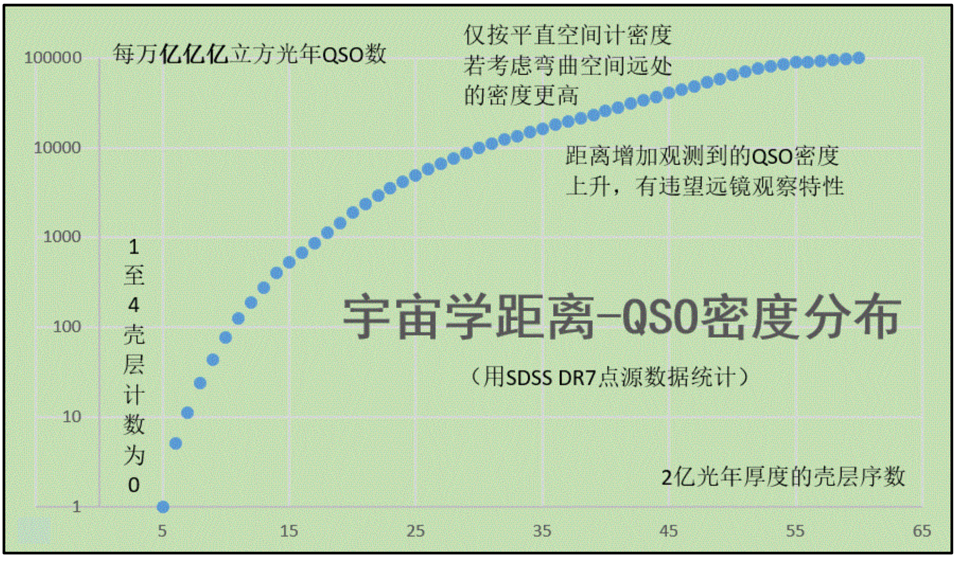


图 C5.1. 宇宙学距离(平直空间)-类星体密度分布图

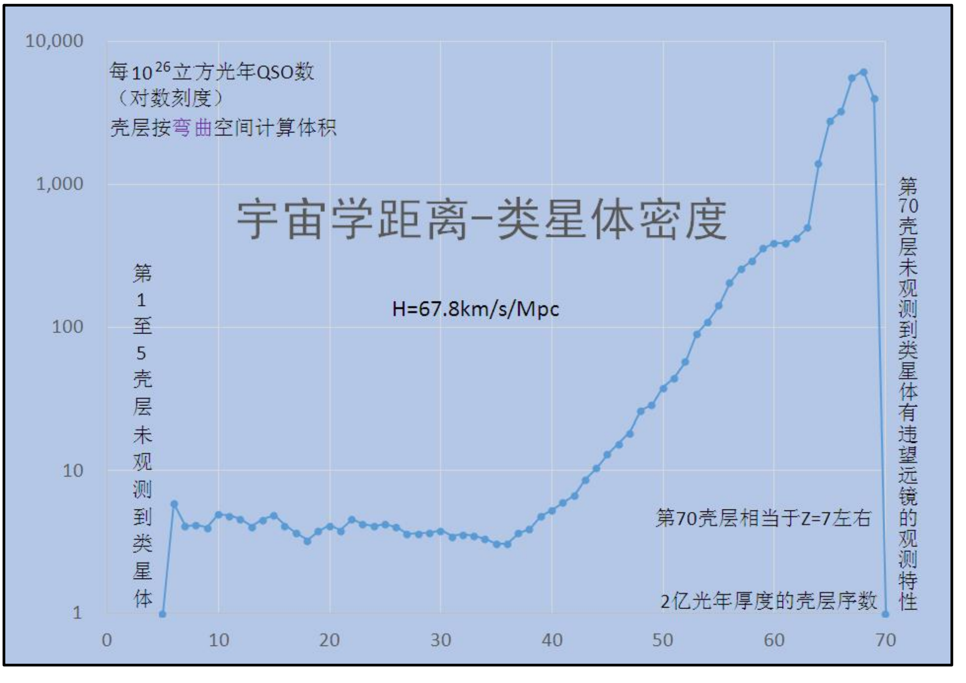


图 C5.2. 宇宙学距离(弯曲空间)-类星体密度分布图

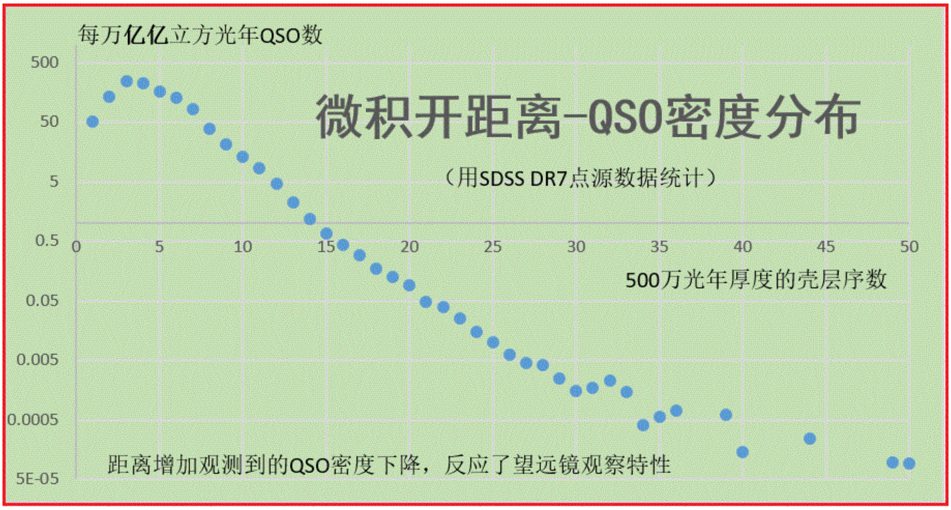


图 C5.3. 微积开距离-类星体密度分布图

从(图 C5.1、图 C5.2)中可看出宇宙学距离得出越远观测到的类星体密度反而越高，加上因亮度暗未观测到的密度会更高。这有违望远镜的观测特性。产生这种反常的原因是因为宇宙学误把引力红移当距离红移了。

微积开距离是用微积开引力红移公式，扣除类星体红移中的引力红移后，得出类星体的距离，(图 C5.3)为用微积开距离得出的类星体分布密度。

由于微积开距离是扣除引力红移影响的，得出的距离较正确，观测到的类星体密度是距离越远分布密度就越低。符合望远镜的观测特性。

通过对照，说明了微积开距离更合理、更正确。

C5.2. 用类星体的距离与子源角分离统计看哪个距离更合理

把有子源结构的类星体的距离作水平坐标值，把类星体的子源结构的分离角径作为垂直坐标值，把各类星体标在距离-分离角径图上(图 C5.4)。

若理论得出的距离错误，因数据散乱，不能显出应有的特性。若理论得出的距离正确，因数据有序，就能显出应有的特性。类星体的子源结构

的线分离值分布应介于最大值与最小值间，因此包络曲线应为最大线分离值作出的包络曲线(图 C5.4)。

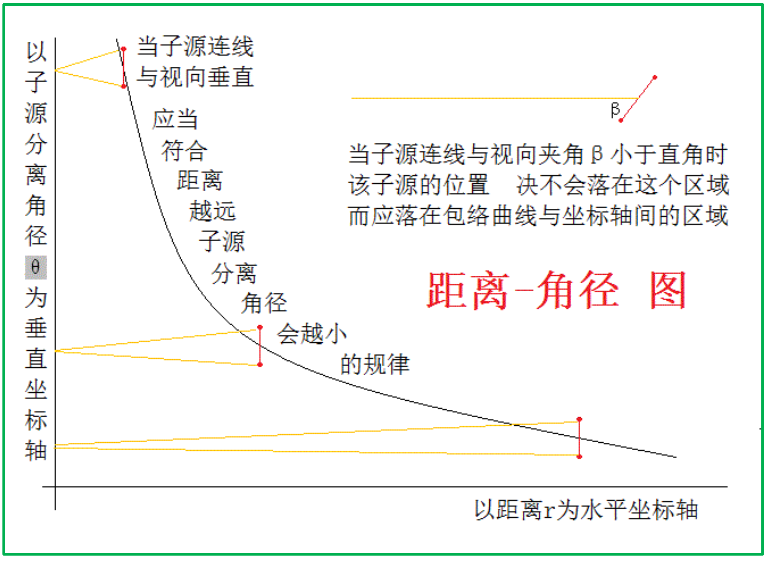


图 C5.4. 距离-角径关系图

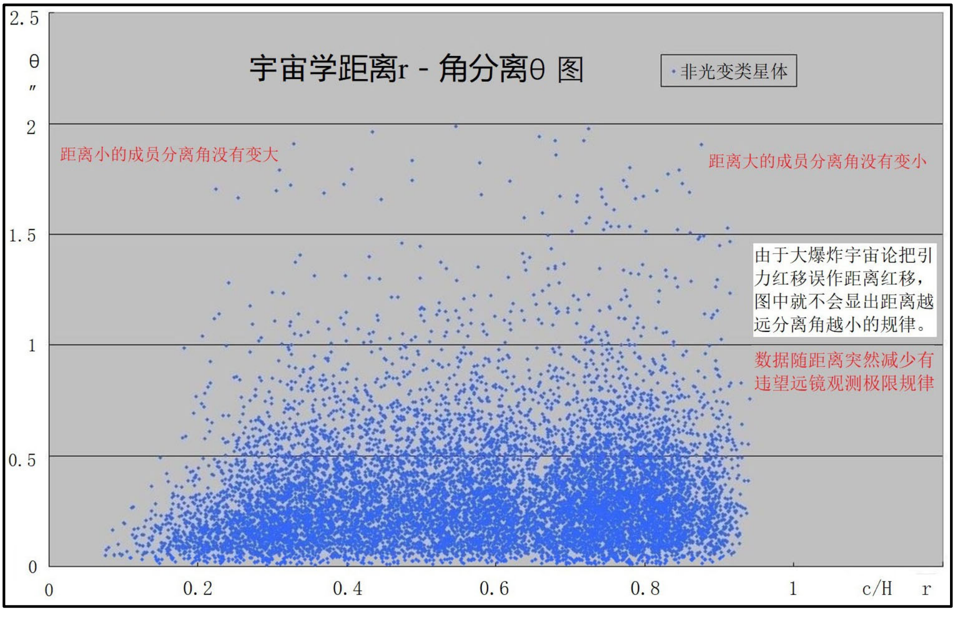


图 C5.5. 宇宙学距离得出的类星体距离与子源角分离的关系图

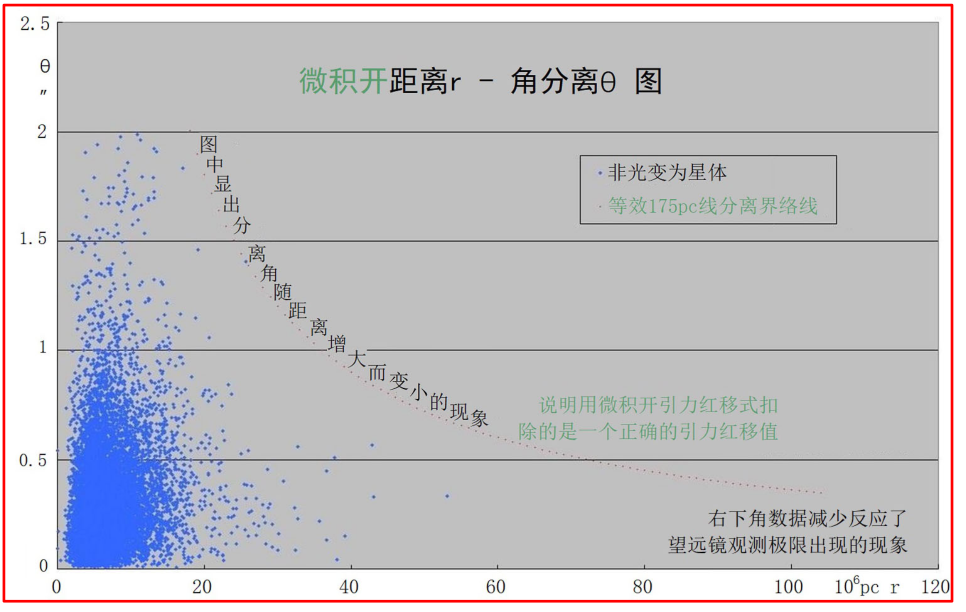


图 C5.6. 微积开距离的类星体距离与子源角分离的关系图

用类星体 SDSS DR7 数据[2]分别用宇宙学大爆炸理论与类星体微积开模型求解作对照。用宇宙论计算的类星体距离与子源角分离的关系为(图 C5.5)，用微积开理论计算的类星体距离与子源角分离的关系为(图 C5.6)。

通过对照分析，作出了更有说服力结果：

当前的宇宙大爆炸理论，把类星体的红移全作多普勒红移定距离，不从中扣除引力红移，把类星体解释为黑洞，得出的距离称为宇宙学距离[1]。由宇宙学距离得出 SDSS DR7 的距离-角分离图如(图 C5.5)，难以显示出应有的特性。

由类星体微积开模型求解，先分离扣除引力红移后，得出的距离，称为微积开距离。作出的 SDSS DR7 类星体距离-角分离图就符合应有的特性，见(图 C5.6)。

验证支持了微积开距离与微积开引力红移公式。说明从红移值中扣除了正确的引力红移值。得出的距离更符合观测数据。

C5.3. 用类星体的子源线分离速度看哪个距离更合理

用宇宙学距离推出类星体 3C273 的距离为 24 亿光年，子源线分离速度为 9 倍光速。而用微积开距离推出类星体 3C273 的距离为 23 万光年，子源线分离速度为 259 公里/秒。

为什么会这样？(图 C5.7)作出了解释。

图 C5.7. 引力红移分量引起距离误差示意图

C5.4. 用暗物质量看哪个距离更合理

由于如(图 C5.7)所示和原因，宇宙学距离与实际距离存在巨大的差异，导致得出错误的结论。

宇宙学距离会感到天体间的线距离会很大，那么引力维系住天体系统，就必须存在大量的暗物质才能维持系统的不离散，暗物质存在量与可见物质量的比竟需达 95%比 5%。

而微积开距离得出的类星体很大一部分就是本星系群的成员，补充了本星系群的可见质量，存在暗物质的量应当是很少的。

C5.5. 用类星体的赫罗图看哪个距离更合理

赫罗图在恒星演化的研究中发挥了非常重要的作用，是天体演化研究

的重要工具。

类星体的赫罗图是以类星体的绝对光度作垂直坐标值，以类星体的表面温度为水平坐标值，把各个类星体作点标于该图上。

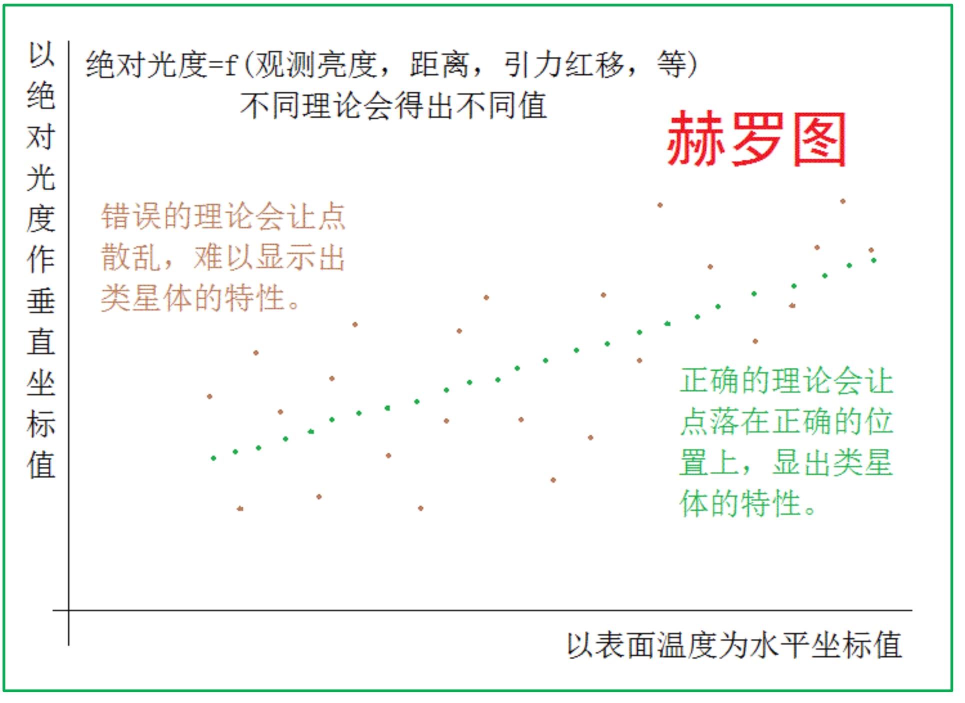


图 C5.8. 赫罗图验证法

类星体的绝对光度各种理论会得出不一样的结果，如果理论错误，得出的类星体的绝对光度就错误，标在赫罗图上的位置就有错误，把类星体的特征隐在错误的散乱中。如果理论正确，得出的类星体的绝对光度就正确，标在赫罗图上的位置就会正确，把类星体的特征显示在赫罗图中(图 C5.8)。

用宇宙论计算的类星体距离得出的光度作出赫罗图为(图 C5.9)，用微积开理论计算的类星体距离得出的光度作出赫罗图为(图 C5.10)，对照分析：

用宇宙学距离作的赫罗图就不会有精细的轨迹结构(图 C5.9)。

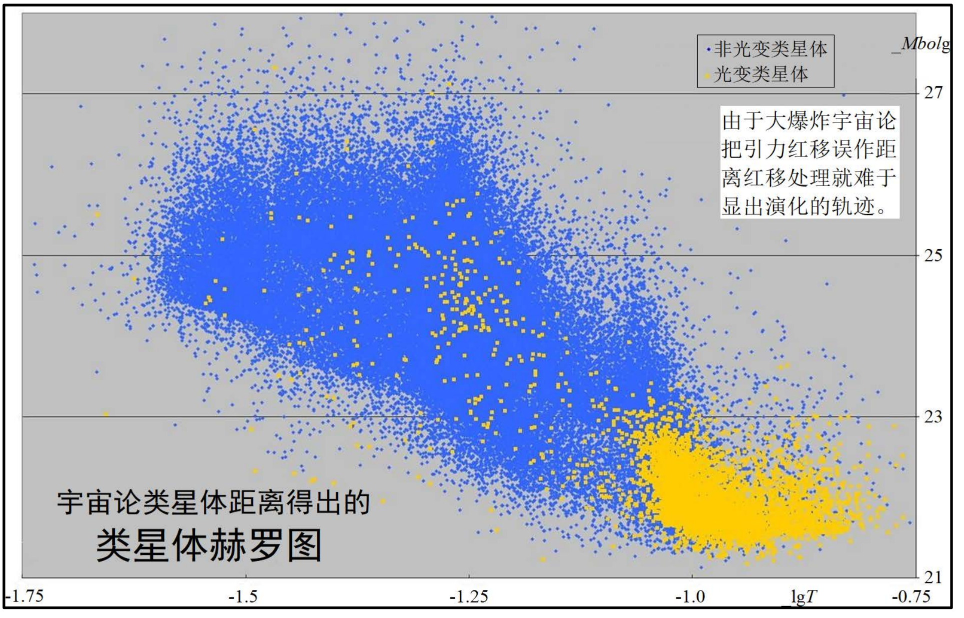


图 C5.9. 用宇宙论计算的类星体距离得出的类星体赫罗图

由类星体微积开模型求解的数据作出的类星体赫罗图(图 C5.10)就有精细的轨迹。并在类星体的密集区存在一条鸿沟，局部放大(图 C5.11)鸿沟更清楚，赫罗图上鸿沟二侧的类星体参数相近，为方便描述把图中鸿沟上边缘称为北岸、下边缘称为南岸。南岸边缘 26 个类星体的合成光谱，显得较活跃(图 C5.12)。北岸边缘的 44 个类星体的合成光谱就显得活跃度差点(图 C5.13)。这是首次对鸿沟二岸分析时发现二岸特性有差异，当时取由星系 NED-D8.1.0 的数据统计得出的

$$b_1 = 1.107\times10^{10}\,pc = 1.107\times10^{10}\text{秒差距}, \tag{C5.1}$$

$$\mu = 21.67, \tag{C5.2}$$

本文仅在此章节采用这 2 数据。

通过赫罗图的对照，说明微积开距离更正确。

为什么会存在鸿沟？鸿沟二岸的类星体有什么区别？鸿沟外的其它类星体又有什么区别呢？由此让作者对类星体的分族特性作了进一步的分析。

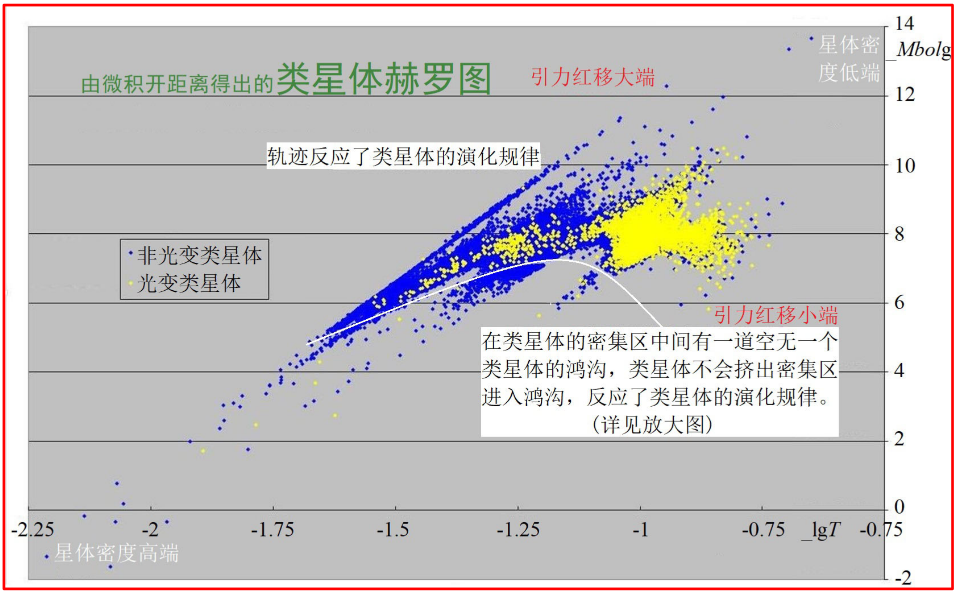


图 C5.10. 由类星体微积开模型求解的数据作出的类星体赫罗图

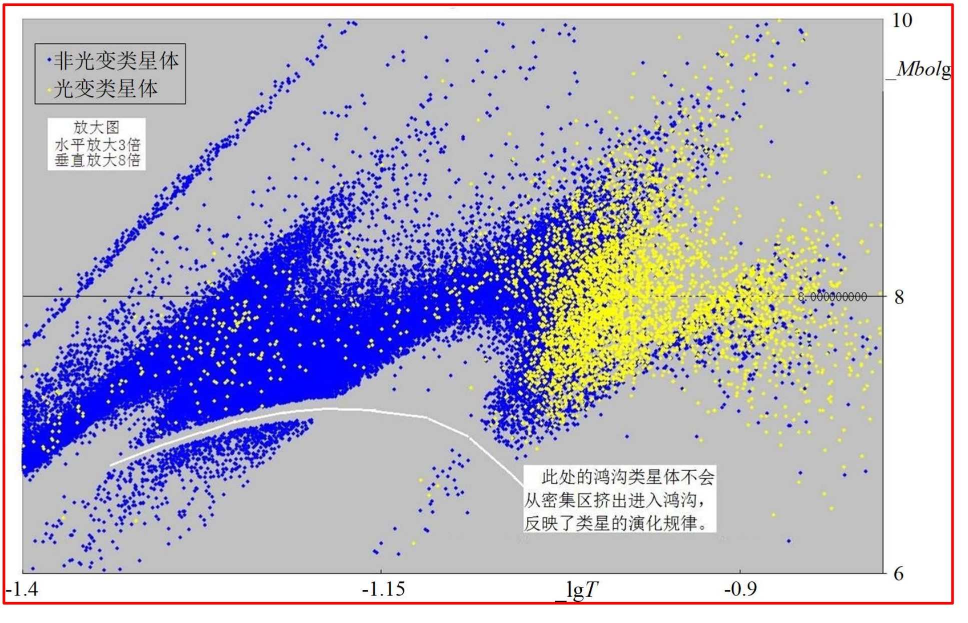


图 C5.11. 由类星体微积开模型作出的类星体赫罗图(局部放大)

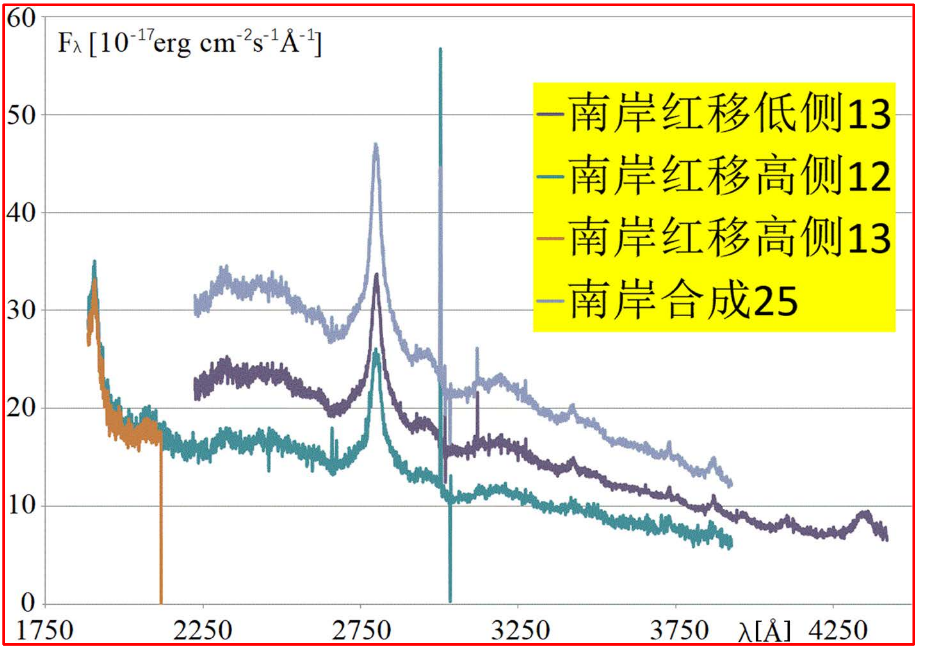


图 C5.12. 南岸边缘 26 个类星体的合成光谱

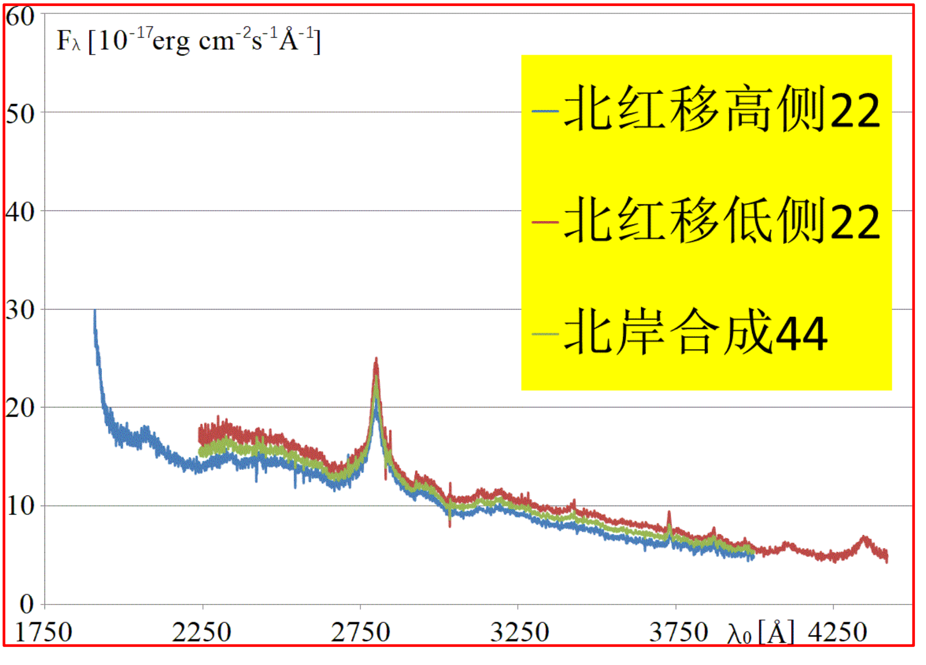


图 C5.13. 北岸边缘的 44 个类星体的合成光谱图

C6. 赫罗图反映的类星体演化特性

C6.1. 类星体赫罗图上鸿沟二岸成员的统计特征

类星体在赫罗图上的鸿沟分成了 3 段(图 C5.10)，把横坐标[−1.7, −1.4)范围的鸿沟称为 a 区鸿沟，把横坐标[−1.4, −1.15]范围的鸿沟称为 b 区鸿沟，把横坐标(−1.15, −1]范围的鸿沟称为 c 区鸿沟。其中 b 区鸿沟最显注，因此首先找出 b 区鸿沟二岸的类星体，其中北岸 108 个样品，南岸 52 个样品，作出赫罗图，并作出它们的拟合曲线(图 C6.1)。

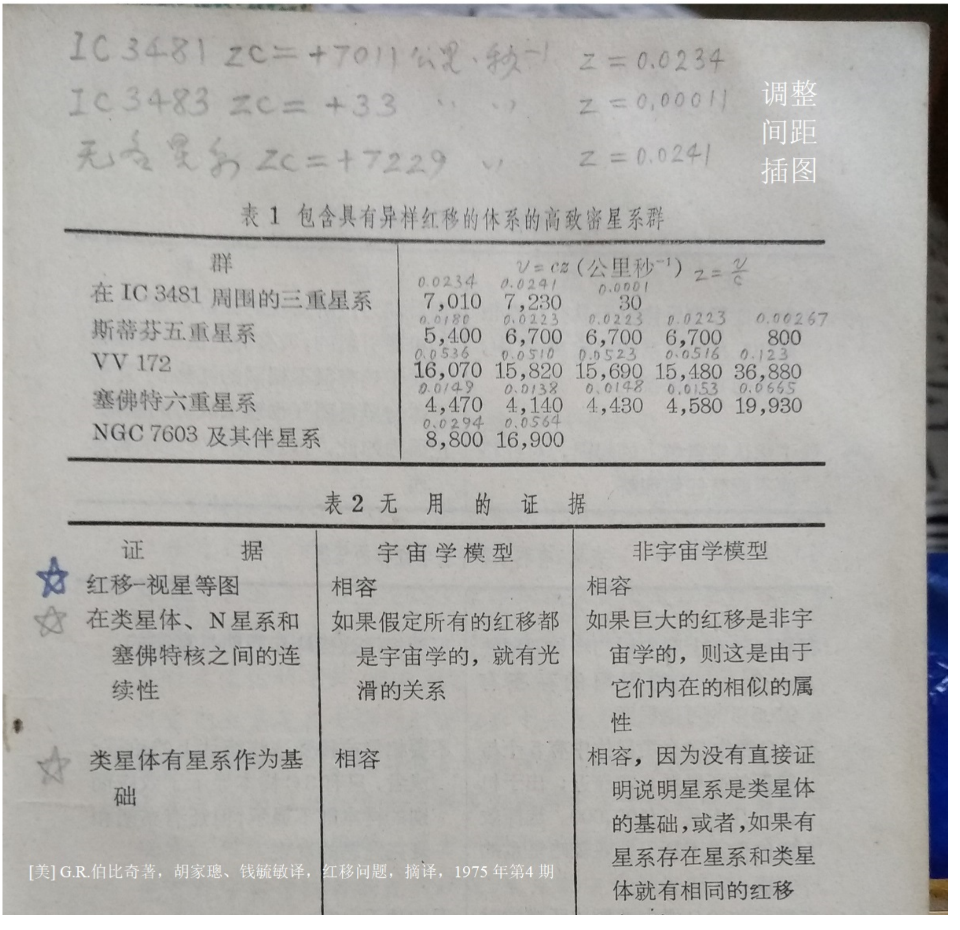


表 1 包含具有异样红移的体系的高致密星系群

群	$v=cz$ (公里秒⁻¹) $z=\frac{v}{c}$				
在 IC 3481 周围的三重星系	0.0234 7,010	0.0241 7,230	0.0001 30		
斯蒂芬五重星系	0.0180 5,400	0.0223 6,700	0.0223 6,700	0.0223 6,700	0.00267 800
VV 172	0.0536 16,070	0.0510 15,820	0.0523 15,690	0.0516 15,480	0.123 36,880
塞佛特六重星系	0.0149 4,470	0.0138 4,140	0.0148 4,430	0.0153 4,580	0.0665 19,930
NGC 7603 及其伴星系	0.0294 8,800	0.0564 16,900			

表 2 无用的证据

证据	宇宙学模型	非宇宙学模型
红移–视星等图	相容	相容
在类星体、N 星系和塞佛特核之间的连续性	如果假定所有的红移都是宇宙学的，就有光滑的关系	如果巨大的红移是非宇宙学的，则这是由于它们内在的相似的属性
类星体有星系作为基础	相容	相容，因为没有直接证明说明星系是类星体的基础，或者，如果有星系存在星系和类星体就有相同的红移

[美] G.R.伯比奇著，胡家璁、钱毓敏译，红移问题，摘译，1975 年第4 期

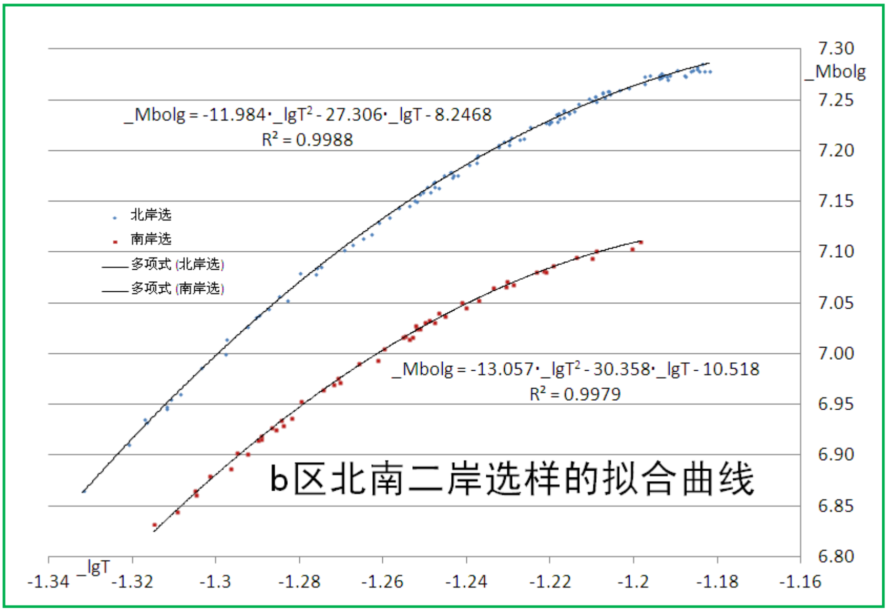


图 C6.1. *b* 区北南二岸的拟合曲线

从这个统计图中得出，2 阶拟合曲线可拟合出相关系数达 0.99 以上的拟合曲线。那么，为找出鸿沟最边缘界线的拟合曲线，只须找出最边缘二端与中间各若干个的样品拟合 2 阶曲线就可以了。

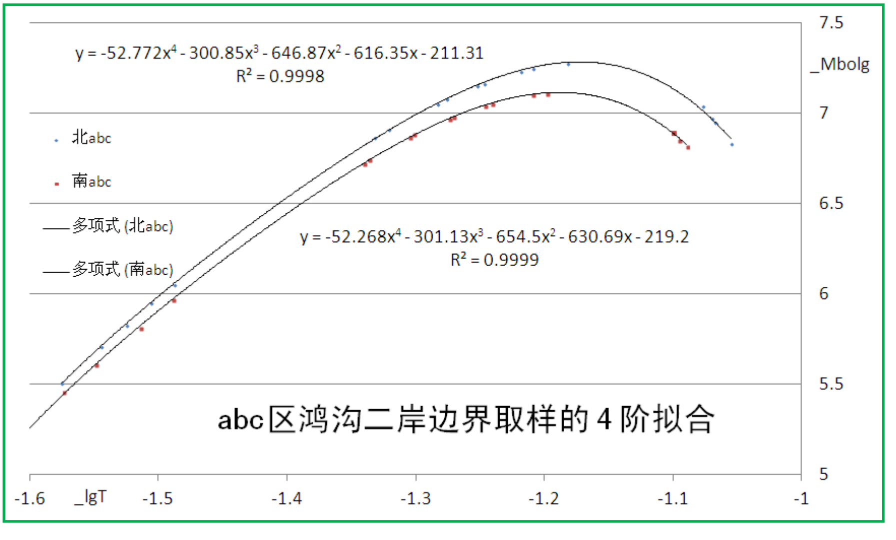


图 C6.2. *abc* 区鸿沟二岸边界取样的 4 阶拟合

C6.2. 类星体在赫罗图上的分族

类星体在赫罗图上的鸿沟南北二侧光谱线的活跃性有明显的不一样。那么，在类星体赫罗图上的其它区域上光谱线的活跃性是否也有不同的特征呢？下面进一步地作出分析。

C6.2.1. 分族的方法

把 *a* 区鸿沟、*b* 区鸿沟、*c* 区鸿沟各自的南北边缘的左端、右端以及中间各找出若干个样本类星体，如(表 6.1)与(表 6.2)，它们在赫罗图上的位置如(图 C6.2)，图中的 4 阶拟合曲线构成了鸿沟的边界。各拟合曲线式的 y 代表_M_{bolg}，x 代表_lg$T$。

为降低拟合曲线的阶，把 *abc* 各区鸿沟二岸边界取样分别拟合。因 *b* 区鸿沟最明显，先分析 *b* 区鸿沟边界的 2 阶拟合曲线(图 C6.3)。

b 区鸿沟北岸边界拟合曲线为

$$y = -11.432x^2 - 25.951x - 7.4204, \qquad \text{(C6.1)}$$

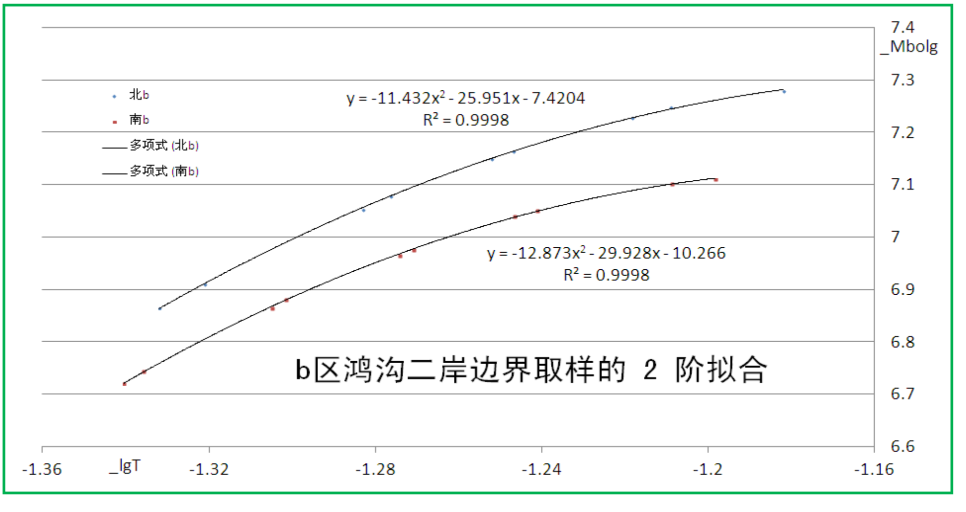


图 C6.3. *b* 区鸿沟二岸边界取样的 2 阶拟合

表 6.1. 鸿沟北岸边界取样类星体

SDSSJ	_lg$T$	_M_{bolg}	区
122820.44+254147.3	−1.487664941	6.0501	*a*
121506.89+550604.8	−1.524907687	5.8264	*a*
091417.86+331422.7	−1.574928832	5.5049	*a*
100857.36+031243.8	−1.506061552	5.9501	*a*
121459.27+283437.8	−1.544677171	5.7114	*a*
220636.35−003835.8	−1.252035018	7.1503	*b*
114954.74+570720.8	−1.283080288	7.0532	*b*
162016.61+325023.7	−1.218329306	7.2287	*b*
032946.99+000002.7	−1.331916036	6.8654	*b*
134013.10−032529.6	−1.321022404	6.9104	*b*
152343.27+080209.0	−1.181904952	7.2787	*b*
140643.26+531619.5	−1.246776794	7.1636	*b*
162551.46+212442.3	−1.208975181	7.2481	*b*
164928.87+304652.4	−1.276298017	7.0782	*b*
122657.03+343828.8	−1.07739861	7.0393	*c*
133300.83+451809.0	−1.070084268	6.972	*c*
151535.25+480530.5	−1.067477566	6.9523	*c*
080829.17+440754.1	−1.055239462	6.8343	*c*

b 区鸿沟南岸边界拟合曲线为

$$y = -12.873x^2 - 29.928x - 10.266, \tag{C6.2}$$

用 $\varDelta_2$、$\varDelta_1$、$\varDelta_0$、分别代表北南边界拟合曲线 2 阶、1 阶、0 阶系数差，则

$$\varDelta_2 = -11.432 - (-12.873) = 1.441, \tag{C6.3}$$

$$\varDelta_1 = -25.951 - (-29.928) = 3.977, \tag{C6.4}$$

$$\varDelta_0 = -7.4204 - (-10.266) = 2.8456, \tag{C6.5}$$

定义一个 b 区族参数 H_b，在北岸边界

$$H_b = 0, \tag{C6.6}$$

在南岸边界

$$H_b = -1, \tag{C6.7}$$

表 6.2. 鸿沟南岸边界取样类星体

SDSSJ	_lg$T$	_M_{bolg}	区
084835.01+191104.8	−1.488920705	5.9691	*a*
160230.65+045553.3	−1.600260213	5.2469	*a*
084747.87+204247.8	−1.548471098	5.6101	*a*
125311.68+365857.8	−1.514060853	5.8119	*a*
154905.84+352020.4	−1.573548965	5.4536	*a*
034517.02−001549.8	−1.335896165	6.7432	*b*
075503.02+401155.8	−1.208816958	7.1016	*b*
095130.28+045834.6	−1.270821486	6.9765	*b*
035059.17−000813.7	−1.301566658	6.8803	*b*
172026.49+545703.4	−1.246628531	7.0406	*b*
025535.69−063546.0	−1.340416486	6.7206	*b*
105427.26+214639.8	−1.274238901	6.9652	*b*
115000.47+374433.3	−1.198257689	7.1104	*b*
112059.72+311934.0	−1.304945688	6.865	*b*
114556.12+512917.8	−1.24106094	7.051	*b*
025910.38−002239.8	−1.100544644	6.8915	*c*
144740.17+010541.9	−1.095362838	6.8496	*c*
134251.60−005345.3	−1.089375516	6.8161	*c*
注：025910.38~002239.8 最突出在外，最靠近边界，加权 30。			

那么，北南二岸的边界拟合可统一表为

$$
\begin{aligned}
y &= \left(-11.432 + \varDelta_2 H_b\right)x^2 + \left(-25.951 + \varDelta_1 H_b\right)x + \left(-7.4204 + \varDelta_0 H_b\right) \\
&= -11.432x^2 - 25.951x - 7.4204 + \varDelta_2 H_b x^2 + \varDelta_1 H_b x + \varDelta_0 H_b \\
&= -11.432x^2 - 25.951x - 7.4204 + H_b\left(\varDelta_2 x^2 + \varDelta_1 x + \varDelta_0\right) \\
&= -11.432x^2 - 25.951x - 7.4204 + H_b\left(1.441x^2 + 3.977x + 2.8456\right),
\end{aligned} \tag{C6.8}
$$

从上式解得

$$
H_b = \frac{y + 11.432x^2 + 25.951x + 7.4204}{1.441x^2 + 3.977x + 2.8456}, \tag{C6.9}
$$

b 区的每个类星体都可用上式求得一个 H_b 的值；若 $H_b = 0 \pm 0.1$ (严格定义应只允许正误差)，则称该类星体为 $b0$ 族(北边界)的类星体；若 $H_b = -1 \pm 0.1$ (严格定义应只允许负误差)，则称该类星体为 b-1 族(南边界)的类星体；若 $H_b = 2 \pm 0.1$，则称该类星体为 $b2$ 族的类星体；若 $H_b = 2.6 \pm 0.1$，则称该类星体为 $b2.6$ 族的类星体；余类推，这样就把类星体在赫罗图上以 H_b 间隔为 0.2 进行了分族。a 区的类星体与 c 区的类星体的分族，也可类同定义。

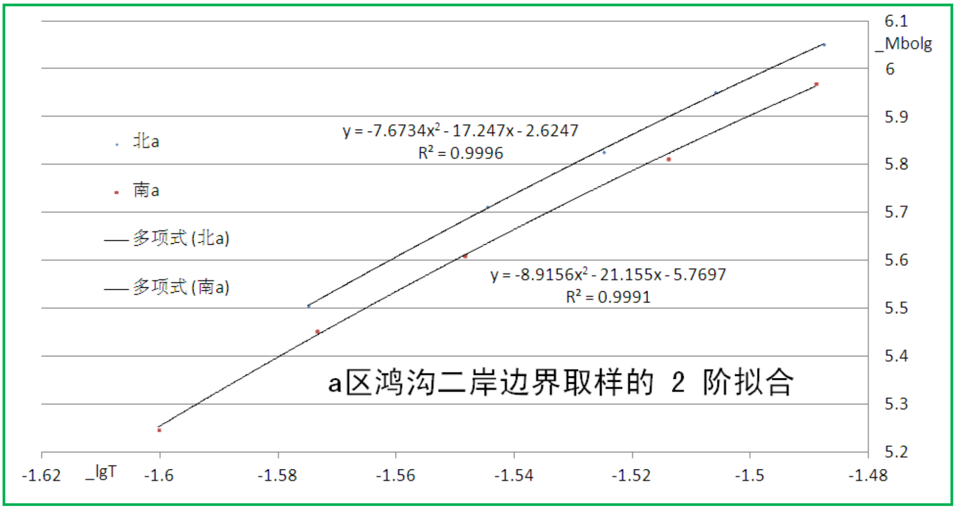


图 C6.4. *a* 区鸿沟二岸边界取样的 2 阶拟合

可以定义 H_a 对 a 区类星体进行分族，a 区鸿沟边界的 2 阶拟合曲线式与趋势线如(图 C6.4)。

同理，推出

$$H_a = \frac{y + 7.6734x^2 + 17.247x + 2.6247}{1.2422x^2 + 3.908x + 3.145}, \tag{C6.10}$$

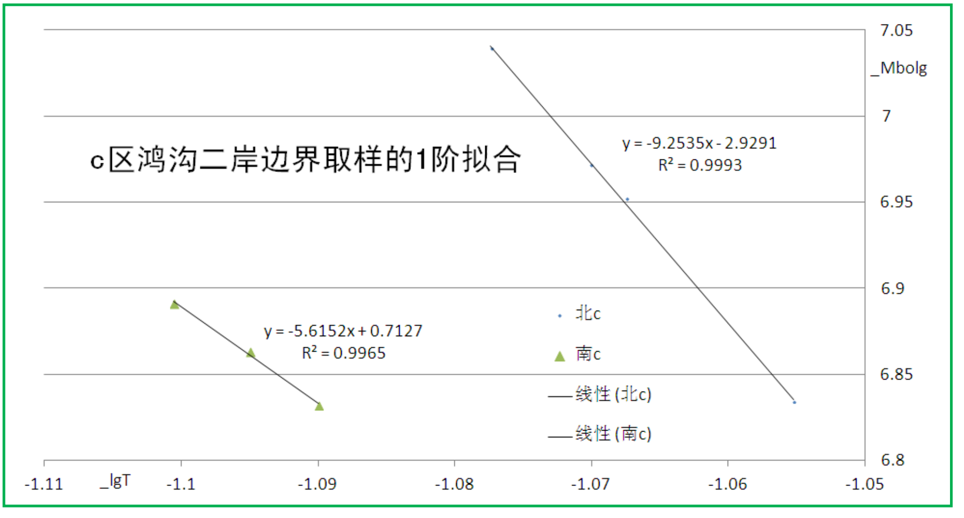


图 C6.5. *c* 区鸿沟二岸边界取样的 1 阶拟合

也可以定义 H_c 对 c 区类星体进行分族，但 c 区鸿沟南岸边界的样品数据太少，接近南岸边界的样品只有 1 个。因此用(图 C6.2)中拟合的 4 阶趋势式，在_lg$T$ 为−1.09 与−1.095 处再构造 2 个点

(−1.09, 6.832185179)与(−1.095, 6.863351016)，

再作出 c 区鸿沟南北岸边界的 1 阶拟合趋势线如(图 C6.5)。

同理，推出

$$H_c = \frac{y + 9.2535x^2 + 2.9291}{3.6383x + 3.6418}, \tag{C6.11}$$

由于 c 区的鸿沟有较大的负倾斜度，所以在限定区间_lg$T$ (−1.15, −1)

内再用引力红移族参数

$$H_y < 18.5, \tag{C6.12}$$

来界定 c 区的族成员；其中 c-3 族的区间放宽到_lg$T$ (−1.17, −1)。

C6.3. 类星体在赫罗图上的分族的演化特征

C6.3.1. 合成光谱的方法

采用 4.2.1 分族的方法 选出 $a5$、$a4$、$a3$、$a2$、$a1$、$a0$、a-1、a-2、$b5$、$b4$、$b3$、$b2$、$b1$、$b0$、b-1、b-2、b-3、$c5$、$c4$、$c3$、$c2$、$c1$、$c0$、c-1、c-2、等，各族类星体的样本，它们在赫罗图上的分布位置如(图 C6.6)。

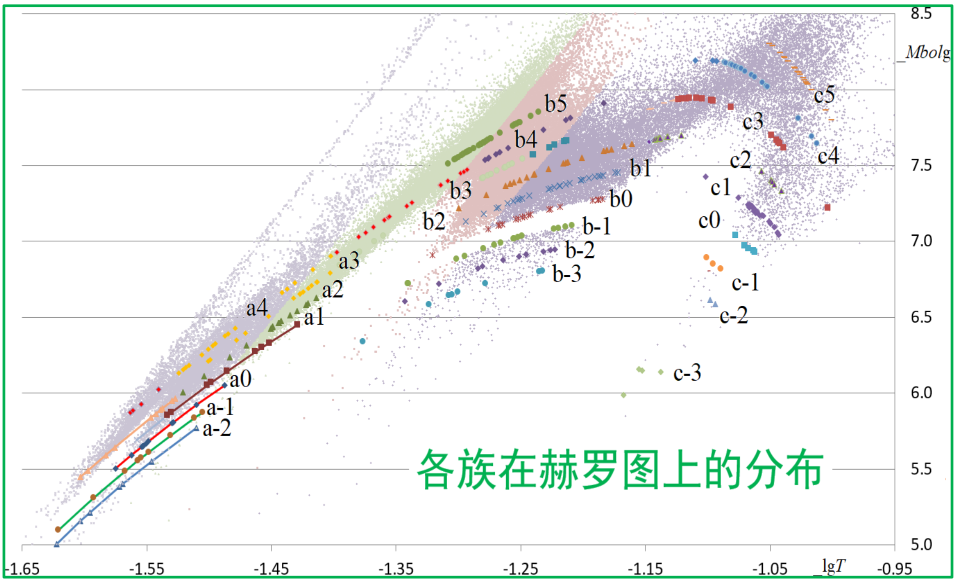


图 C6.6. 各族在赫罗图上的分布

从 SDSS 数据库下载各族成员样本的光谱幅度 f 与波长 λ 关系数据[7]。

为让不同红移的光谱能合成，将每个光谱的波长 λ 作红移修正，转为原始波长 λ_0，即

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{1+z}, \tag{C6.13}$$

因 λ_0 是分点取样的，式(C6.13)求得值会介于二个分点值之间，与那个分点值更近，就取那个值。

幅度 f 也作红移修正，要作能量幅度的红移修正与单位波长被红移缩窄后的修正，即

$$f_0 = f\left(1+z\right)^2, \tag{C6.14}$$

设某个族的 n 个光谱样品，则**均值合成光谱**幅度为

$$f_{0合}\left(\lambda_0\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_{0i}\left(\lambda_0\right), \tag{C6.15}$$

C7. 各族的合成光谱及其族特性存在与否分析

使用式(C6.15)得到各族的合成光谱(图 C7.2-图 C7.33)。下面就逐区把各族的合成光谱展示；并把某些样品数据量多的族，将其成员分成 2 组，看 2 组间有无共性？而与邻族是否有差异性(图 C7.1)？

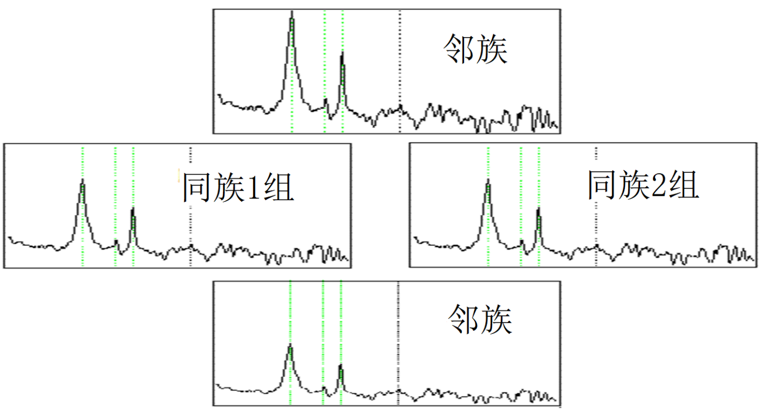


图 C7.1. 族特性存在与否分析

C7.1. *a* 区各族的合成光谱

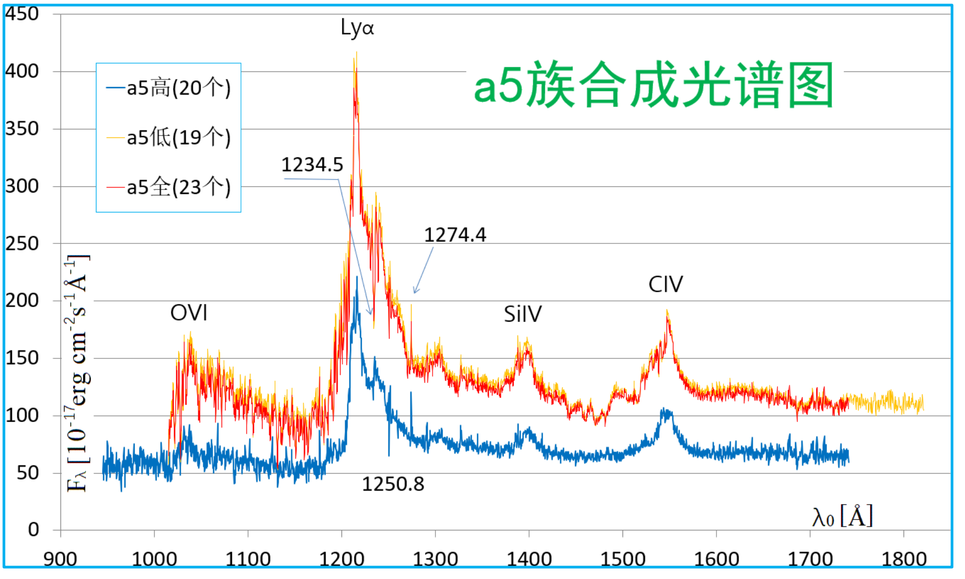


图 C7.2. *a*5 族的合成光谱

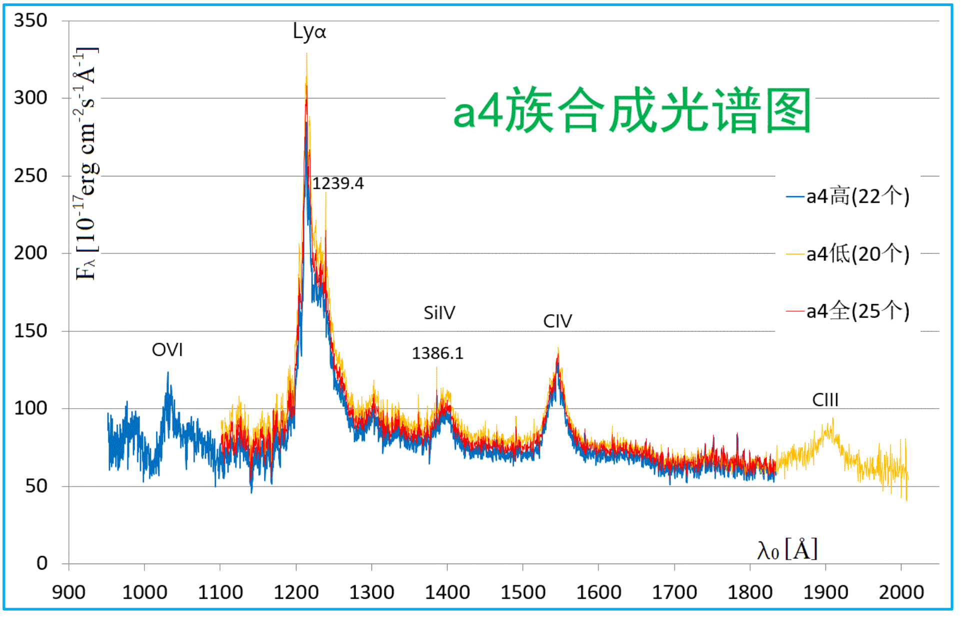


图 C7.3. a4 族的合成光谱

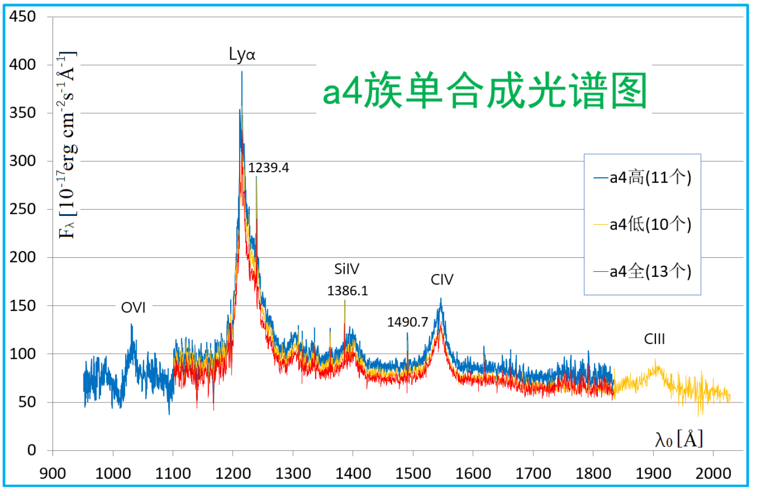


图 C7.4. *a*4 族单数组的合成光谱

说明：为了解 *a*4 族合成光谱有无其族特性，把 *a*4 族 25 个样品按引力红移排序分为 13 个单号成员与 12 个双号成员分别作合成光谱，以了解他们有无共性。对照下一 $Ly_α$ 峰在 *a*4 族单与 *a*4 族双的比为 332.5:333.7，非常接近。而 $Ly_α$ 峰 *a*4 族单与 *a*3 族的比为 332.5:697.1 差异较大；$Ly_α$ 峰 *a*4 族单与 *a*5 族的比为 332.5:404.2 差异也较大。其它谱线峰读者可自行对照分析。

对照说明**族特性明显存在**，相临族特性有明显差异。

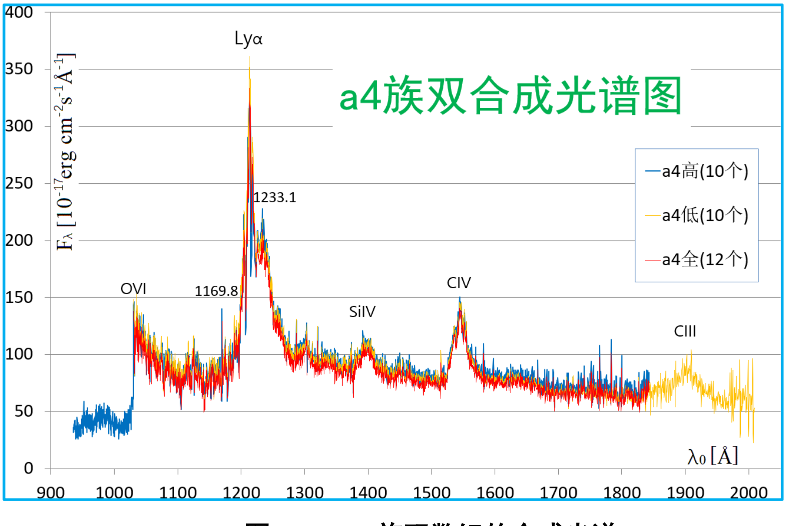


图 C7.5. *a*4 族双数组的合成光谱

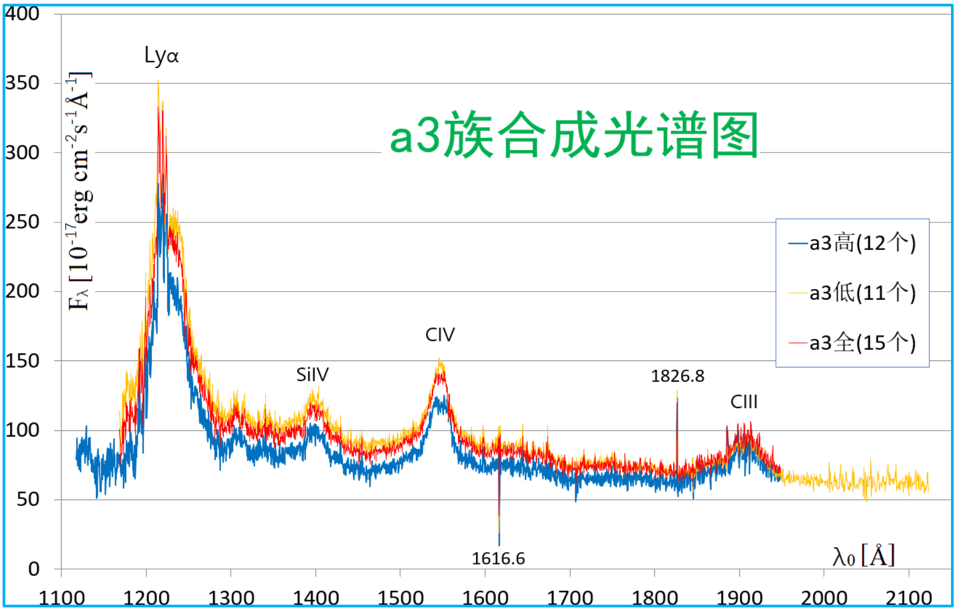


图 C7.6. *a*3 族的合成光谱

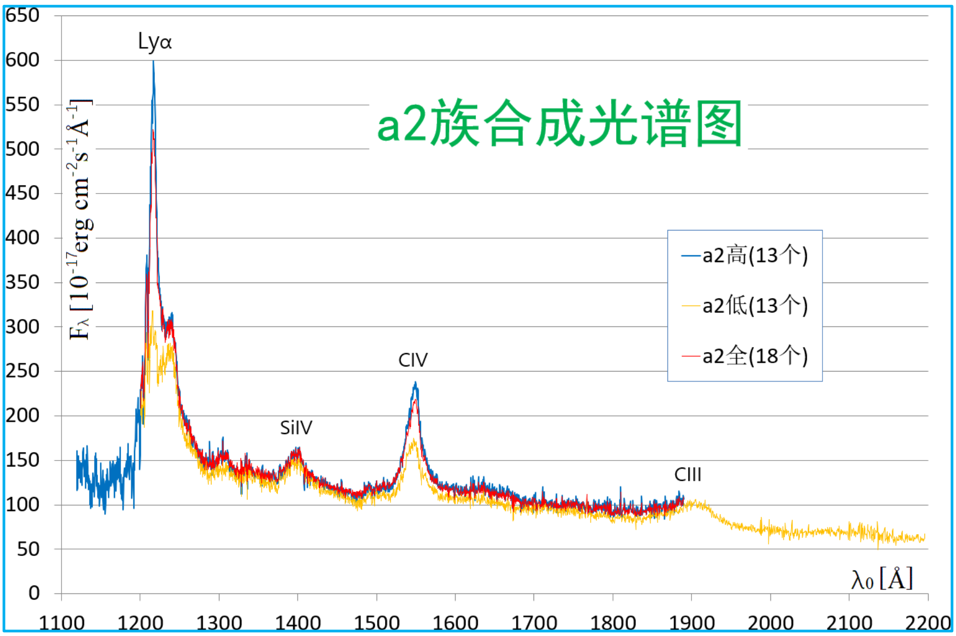


图 C7.7. *a*2 族的合成光谱 1

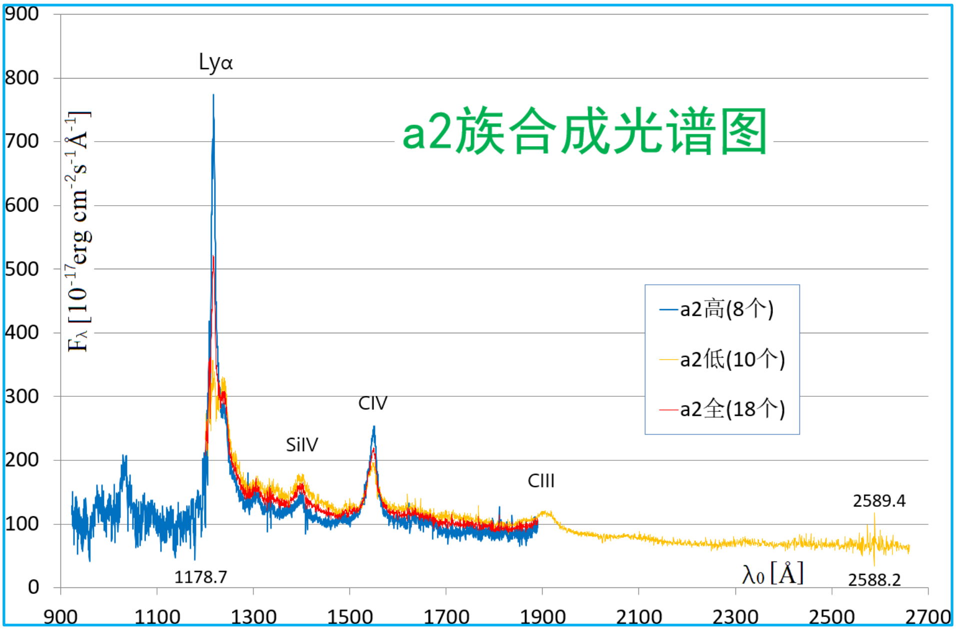


图 C7.8. ***a*2 族的合成光谱 2**

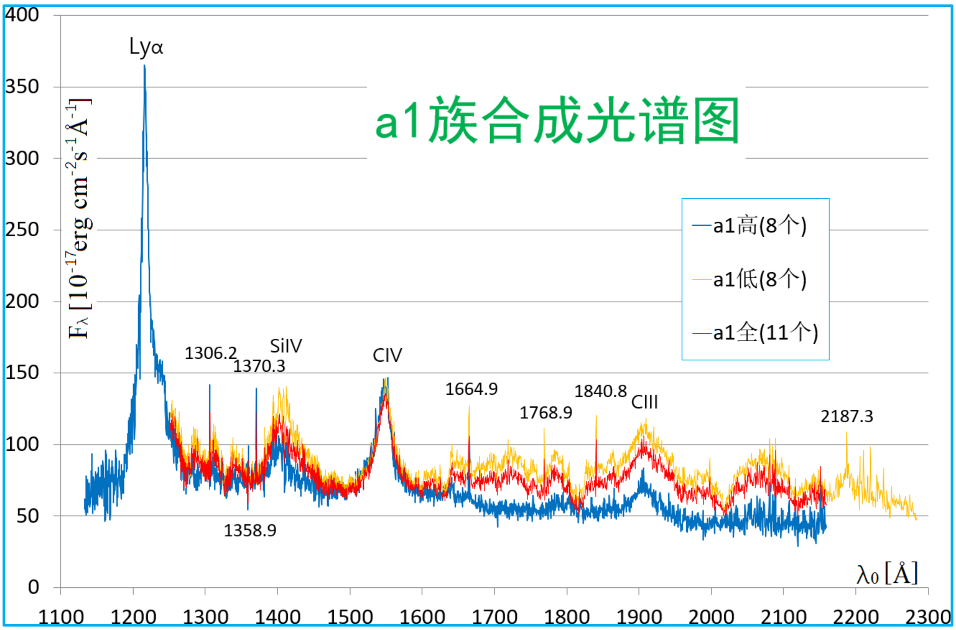


图 C7.9. ***a*1 族的合成光谱**

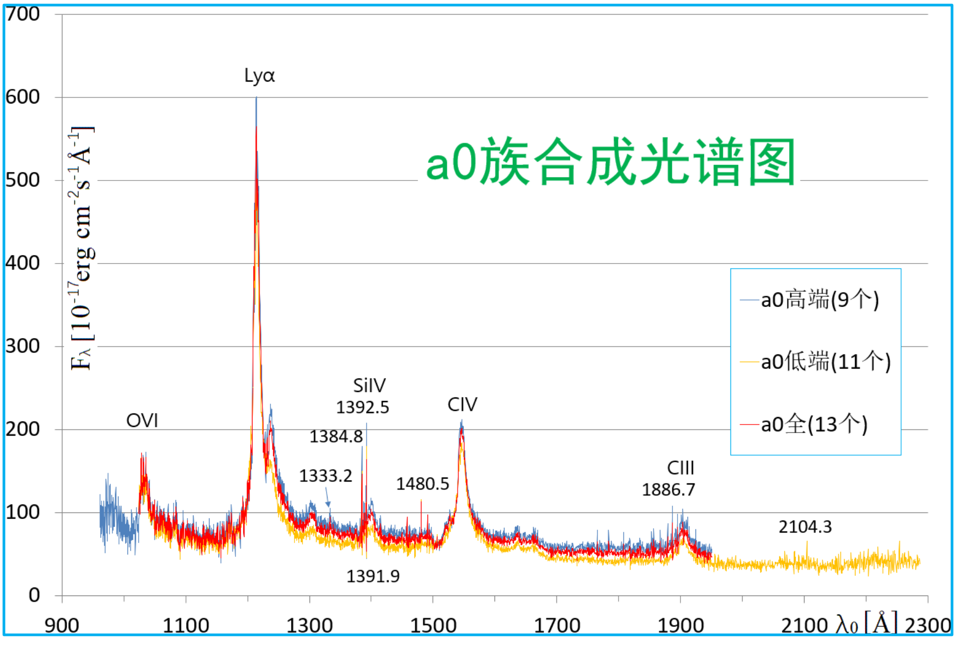


图 C7.10. *a*0 族的合成光谱

▬▬▬鸿沟▬▬▬▬▬▬鸿沟▬▬▬▬▬▬鸿沟▬▬▬▬▬▬鸿沟▬▬▬

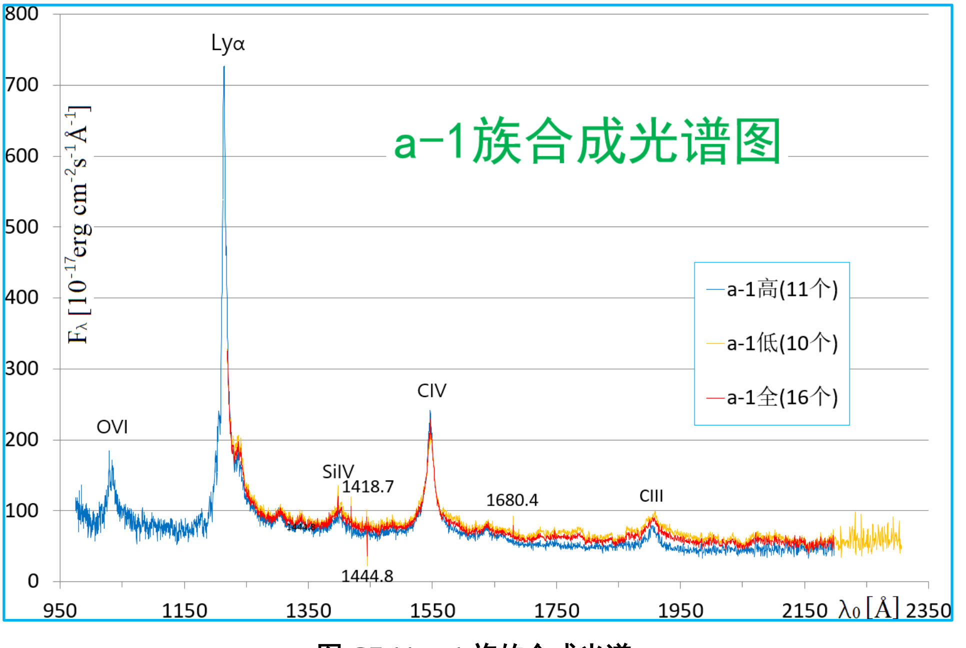


图 C7.11. *a*-1 族的合成光谱

说明：a0 族与 a-1 族是在赫罗图鸿沟两岸的类星体，全合成光谱的 SiIV 峰(红线)是有明显差异的，SiIV 峰值比为 164:125，很可能是发生突变事件(一种核燃料的耗尽或一种新核燃料的点燃)而形成的结果。并且 SiIV 峰值 a1 族 a2 族 a3 族之间都有跳变，这些族之间可能存在隐性鸿沟。

为什么每个光谱合成图的引力红移均值偏大的组都(蓝线)与引力红移均值偏小的组(黄线)都有明显差异？作者认为是引力红移均值偏小的组中有较多成员是属演化向南岸方向的类星体；而引力红移均值偏大的组中有较多成员是属演化返回的类星体(图 C8.20)。这就是以下为什么采用奇偶偶奇分组的原因。

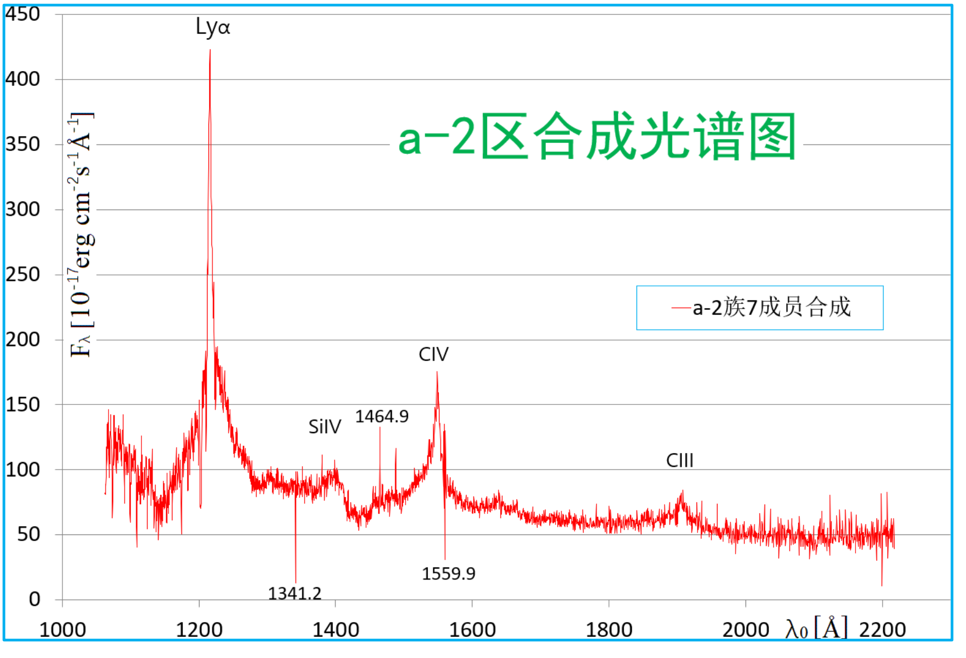


图 C7.12. *a*-2 族的合成光谱

C7.2. *b* 区各族的合成光谱

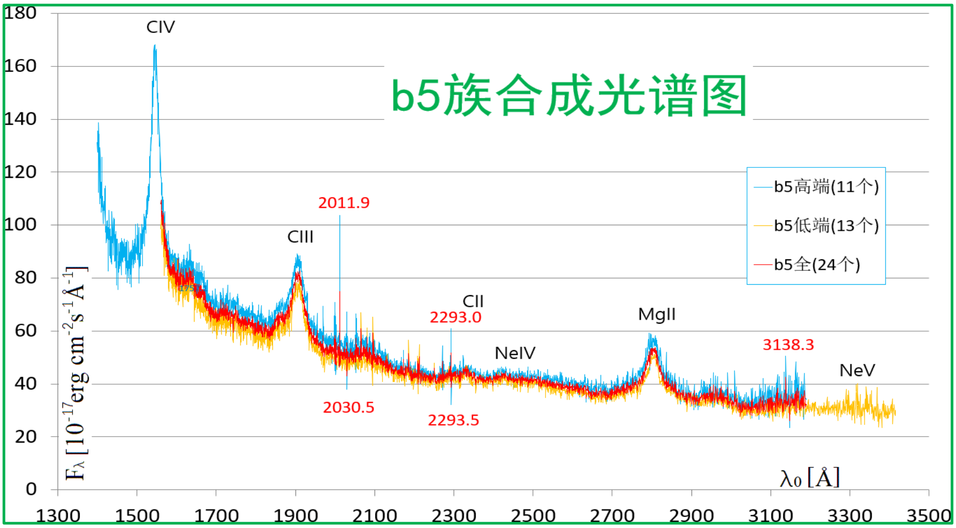


图 C7.13. *b*5 族的合成光谱

说明：*b*5 族奇偶偶奇合成光谱图(图 C7.13)是为了解 *b*5 族合成光谱有无其族特性，把 *b*5 族 24 个样品按引力红移排序分为 12 个奇偶号成员(图中黄曲线)与 12 个偶奇号成员(图中蓝曲线)分别作合成光谱，以了解他们有无共性。这种分法是为了让二组的引力红移均值相差尽量最少。对照一下 CIII 峰在 *b*5 族奇偶组与 *b*5 族偶奇组的比为 83.6:87.7，非常接近。而 MgII 峰在 *b*5 族奇偶组与 *b*5 族偶奇组的比为 54.6:56.5，也非常接近。*b*4 区奇偶合成光谱图(图 C7.14)是奇组与偶组分组，这种分组法，引力红移均值奇组(图中黄曲线)比偶组(图中蓝曲线)要大点，差异稍大，但共性仍存在。对照说明族特性明显存在。

为什么引力红移均值偏大的组(图 C7.14)蓝线在上方，比引力红移均值偏小的组(图 C7.14)黄线在下方，有明显差异？作者认为是引力红移均值偏小的组中有较多成员是属演化向南岸方向的类星体；而引力红移均值偏大的组中有较多成员是属演化返回的类星体(图 C8.20)。这就是为什么采用奇偶偶奇分组的原因。

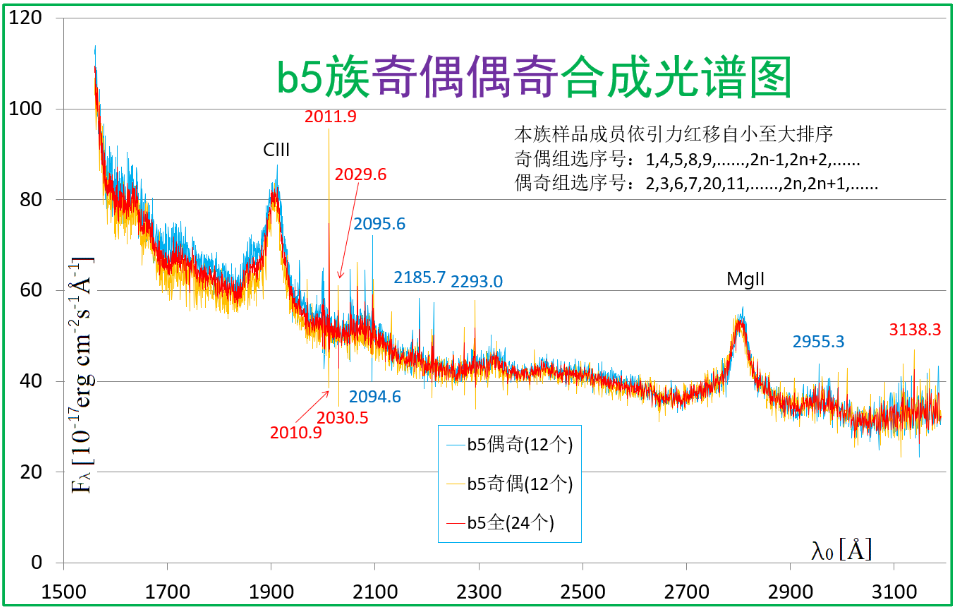


图 C7.14. *b*5 族奇偶偶奇分组合成光谱

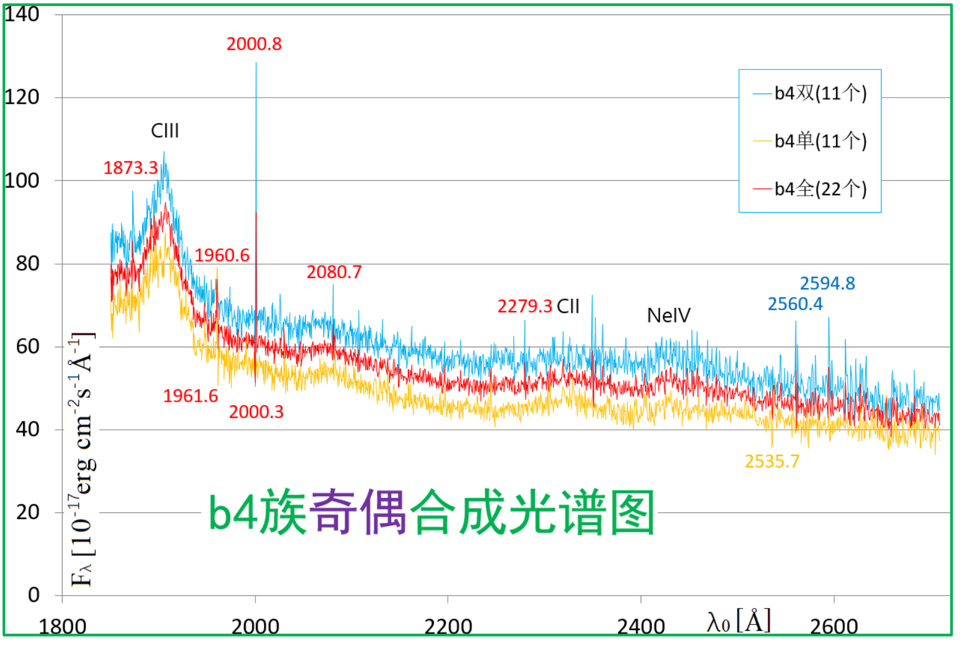


图 C7.15. *b*4 族奇偶分组合成光谱

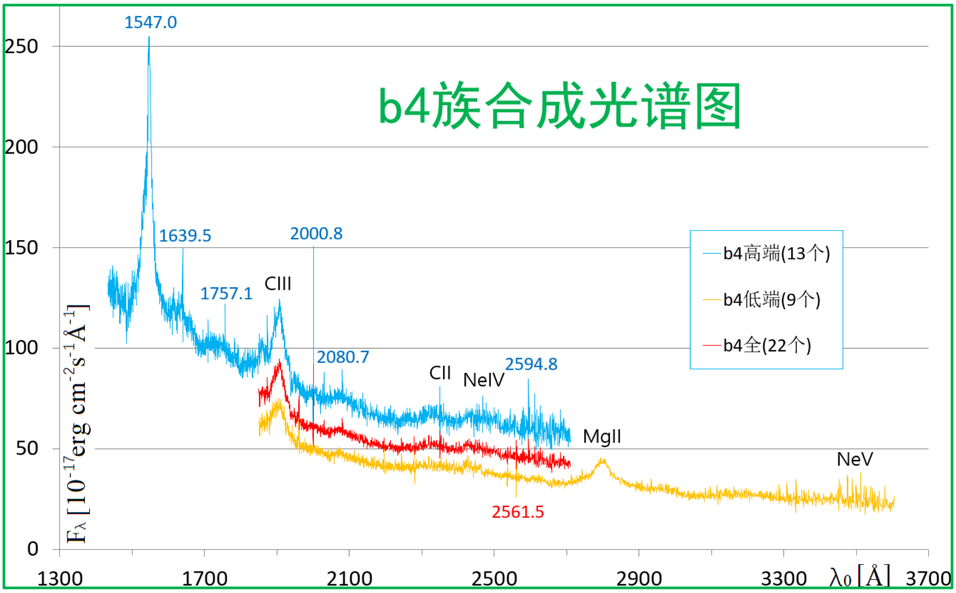


图 C7.16. *b*4 族合成光谱

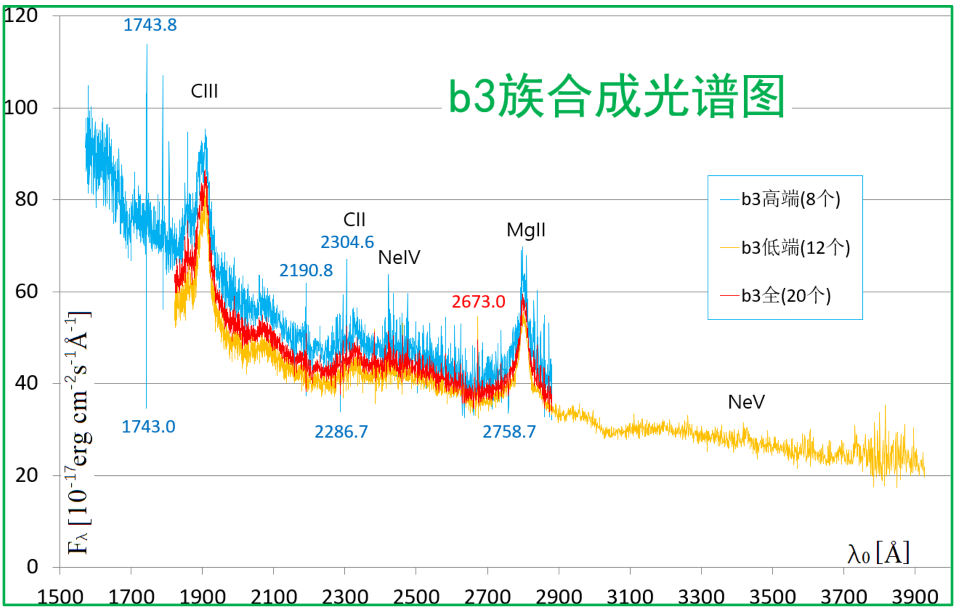


图 C7.17. *b*3 族合成光谱

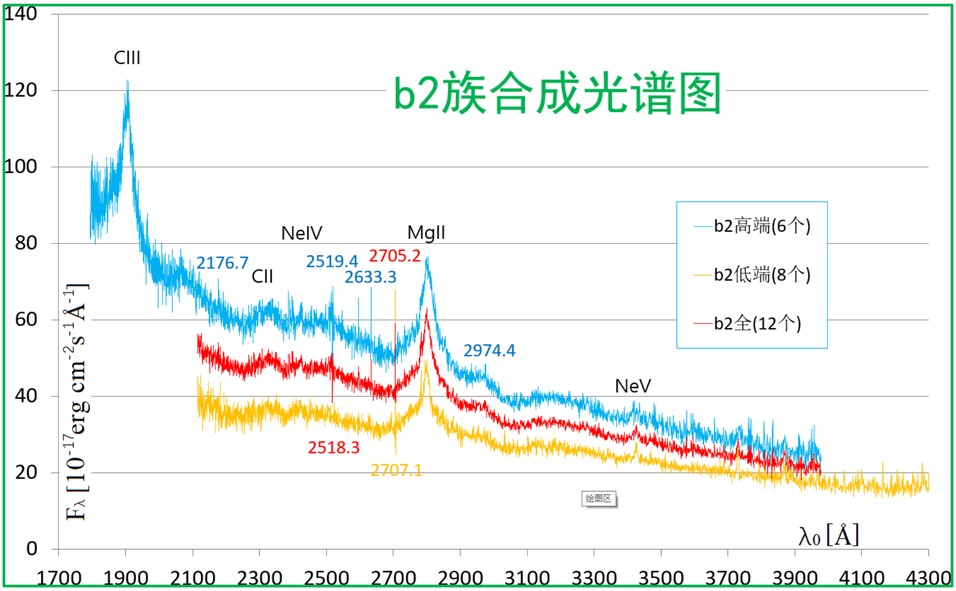


图 C7.18. *b*2 族合成光谱

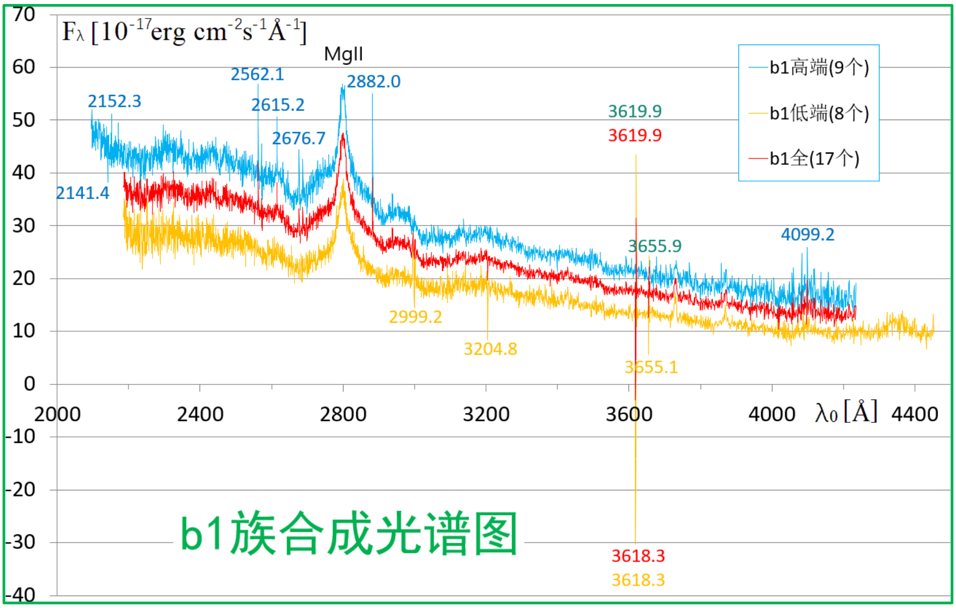


图 C7.19. *b*1 族合成光谱

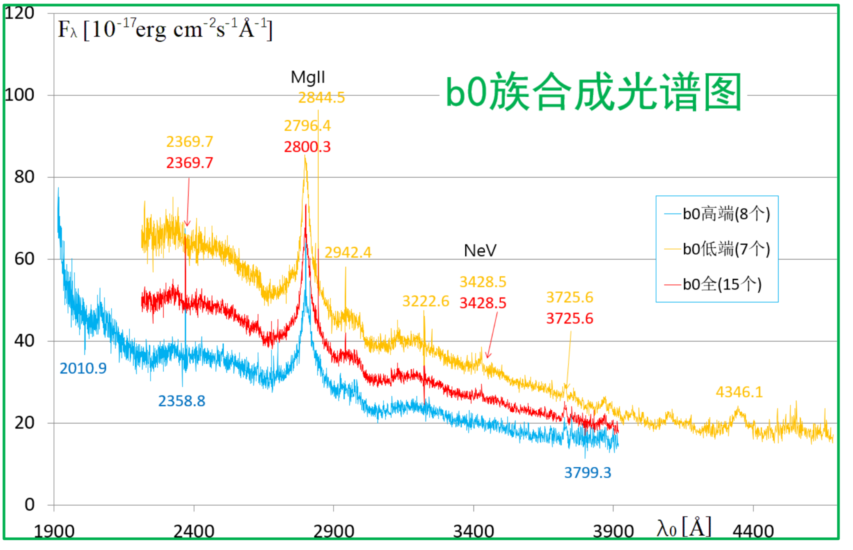


图 C7.20. *b*0 族合成光谱

===鸿沟=======鸿沟=======鸿沟=======鸿沟===

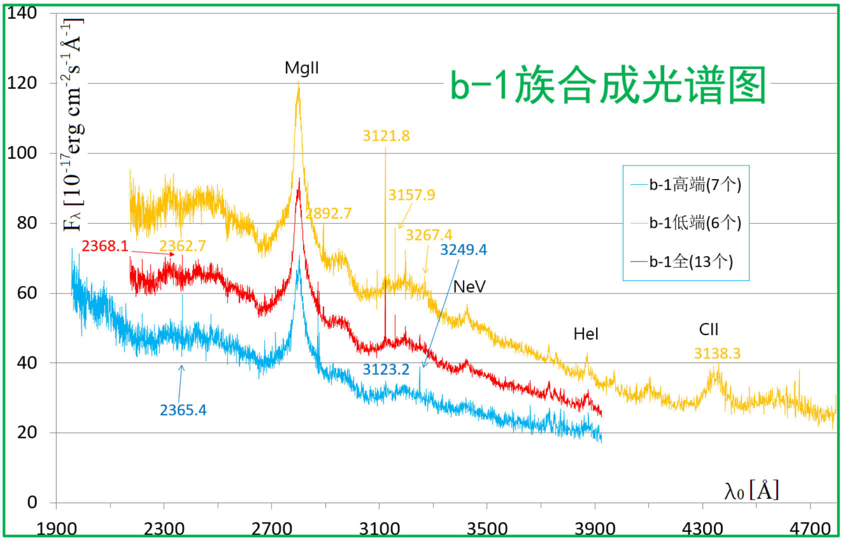


图 C7.21. *b*-1 族合成光谱

说明：*b*0 族与 *b*-1 族是在赫罗图鸿沟两岸的类星体，全合成光谱的 MgII 峰(红线)是有明显差异的，MgII 峰值比为 73.4:93.0；全合成光谱的

NeV 峰(红线)是有明显差异的，NeV 峰值比为 29.6:41.1；并出现了从北岸 *b*0 族开始蓝黄线上下位置转为相反的情况；很可能是发生突变事件(一种核燃料的耗尽或一种新核燃料的点燃)而形成的结果。

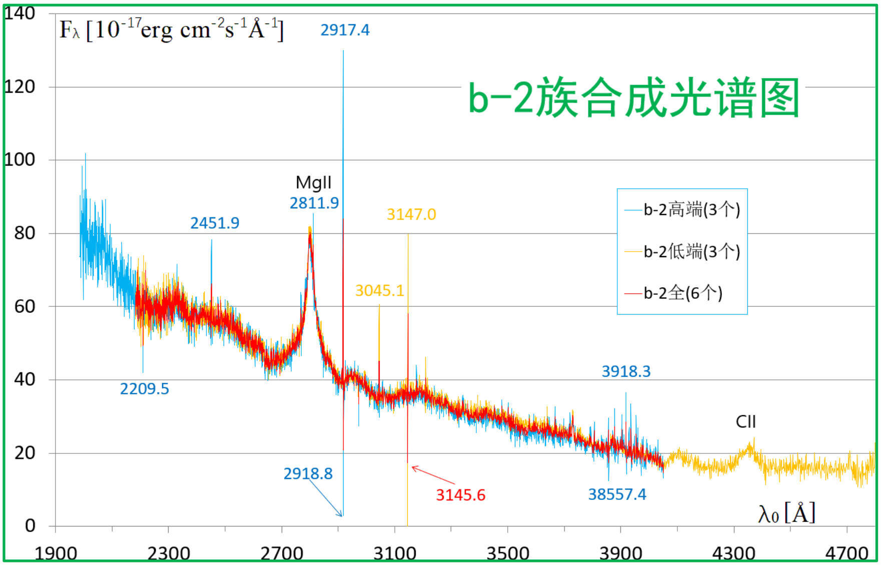


图 C7.22. *b*-2 族合成光谱

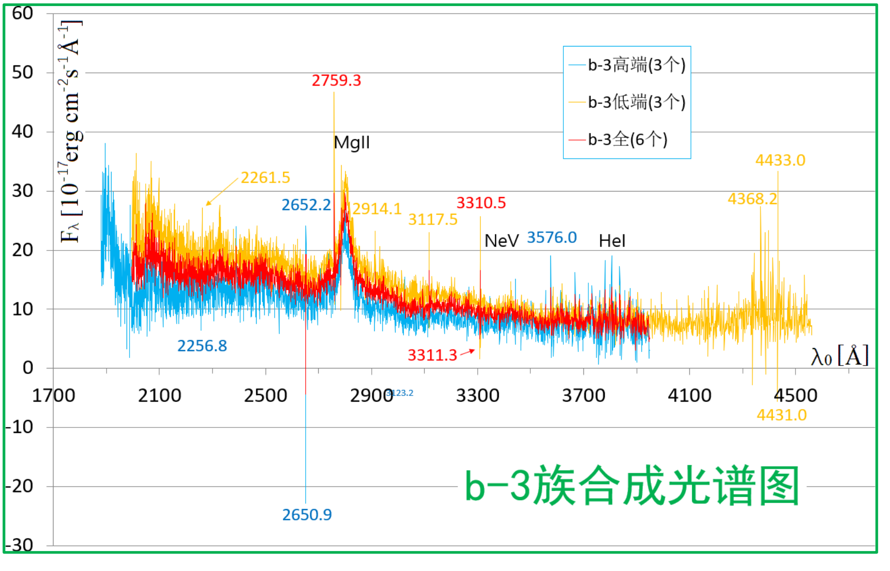


图 C7.23. *b*-3 族合成光谱

C7.3. *c* 区各族的合成光谱

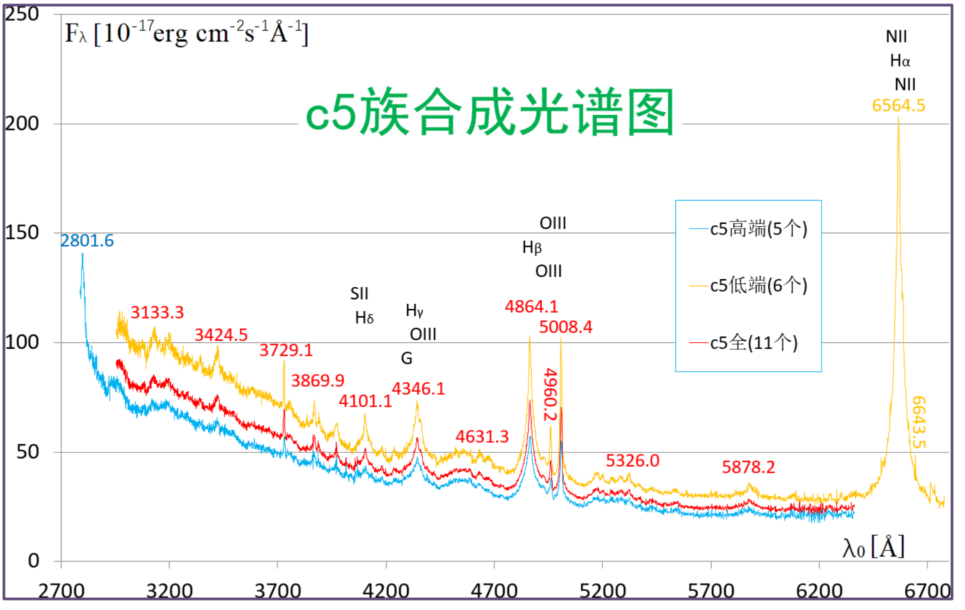


图 C7.24. *c*5 族合成光谱

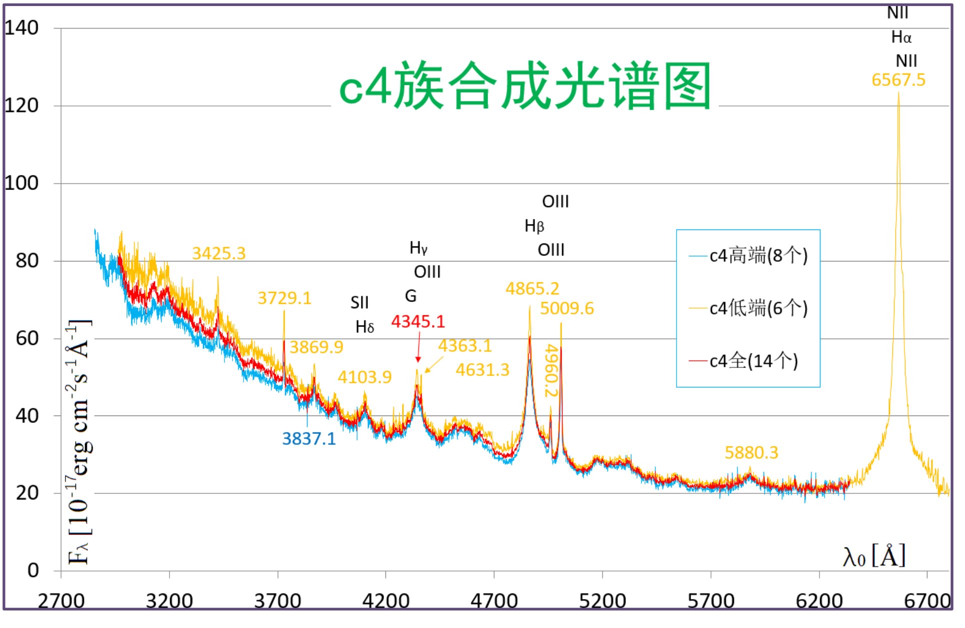


图 C7.25. *c*4 族合成光谱

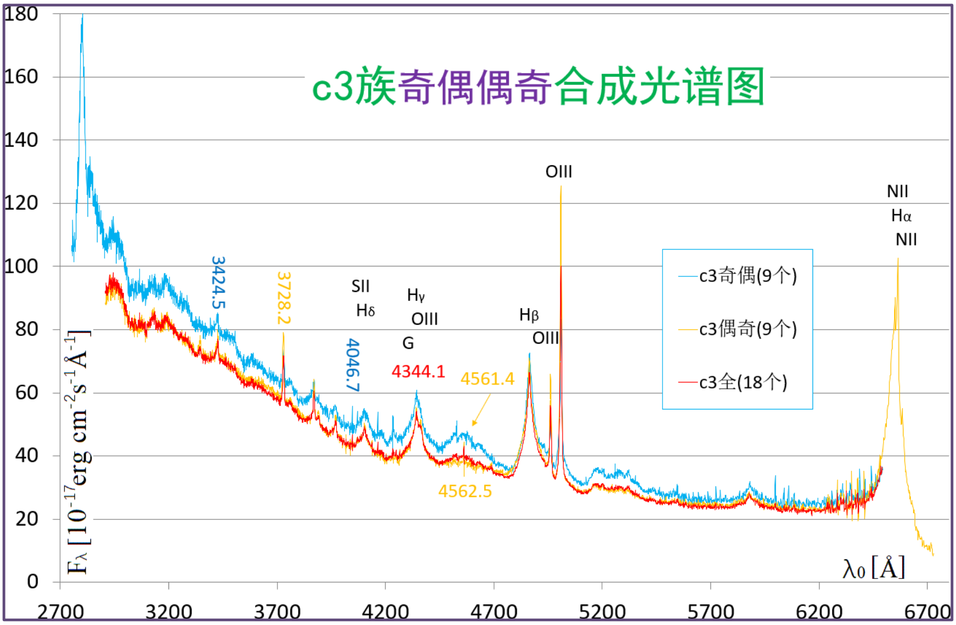


图 C7.26. *c*3 族奇偶偶奇合成光谱

说明：*c*3 族奇偶偶奇合成光谱(图 C7.25)是为了解 *c*3 族合成光谱有无其族特性，把 *c*3 族 18 个样品按引力红移排序分为 9 个奇偶号成员(图中蓝曲线)与 9 个偶奇号成员(图中黄曲线)分别作合成光谱，以了解他们有无共性。这种分法是为了让二组的引力红移均值相差尽量最少。2 个分组的特性曲线波形形状重迭，二组的诸取样点幅度比奇偶/偶奇，平均值为 0.983，最大值为 1.287，最小值为 0.546，极值产生的原因为，几个脉冲幅度差较大。

另一方面的研究是拍摄类星体星云的光谱。Boroson 等[6]得到了 12 个光学选取的低红移类星体的离核光谱，发现其中的10个嵌在以星光为主的星云包层里，3 个可能有 MgI λ5175 吸收线，1个可能有 H_β 吸收线。他们的研究结果表明，这些类星体的基底星系的光度比星系团最亮星系的光度暗1—2星等。Balick 和 Heckman[7] 用 KPNO 的 4 米镜探测到了 4 个小红移($0.036\leqslant Z\leqslant 0.37$)类星体周围的星云状物的光谱。其中 0845＋378 是由X射线证认的第一个类星体，是这种类星体的典型。观测结果表明，光谱是星系包层所具有的恒星光谱，其红移与类星体的相同；类星体星云的大小、形态、绝对星等、光谱特征等与星系相比没有什么明显的不同，说明两者是类似的。调整间距插图 黄克谅：类星体研究的某些进展

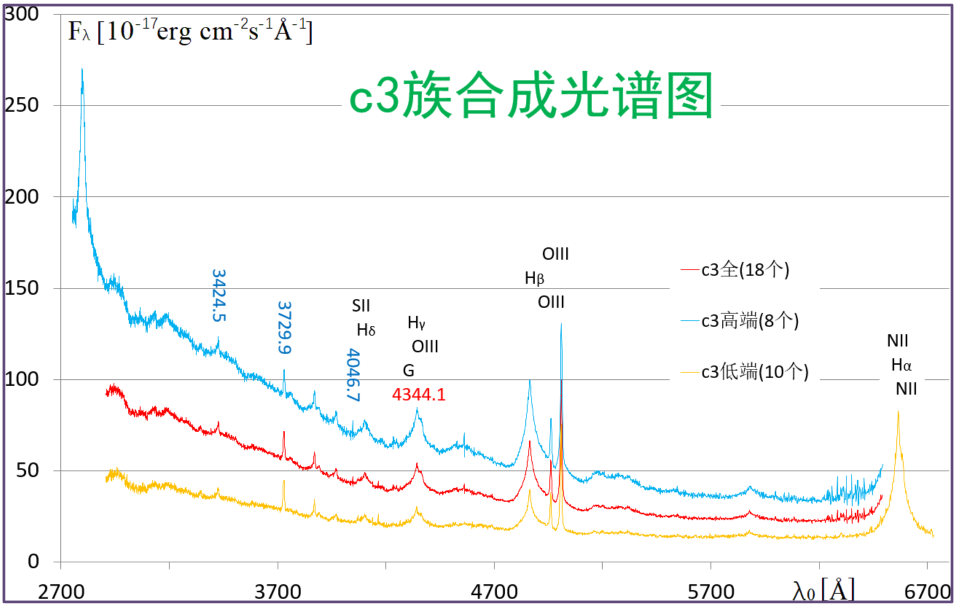


图 C7.27. *c*3 族合成光谱

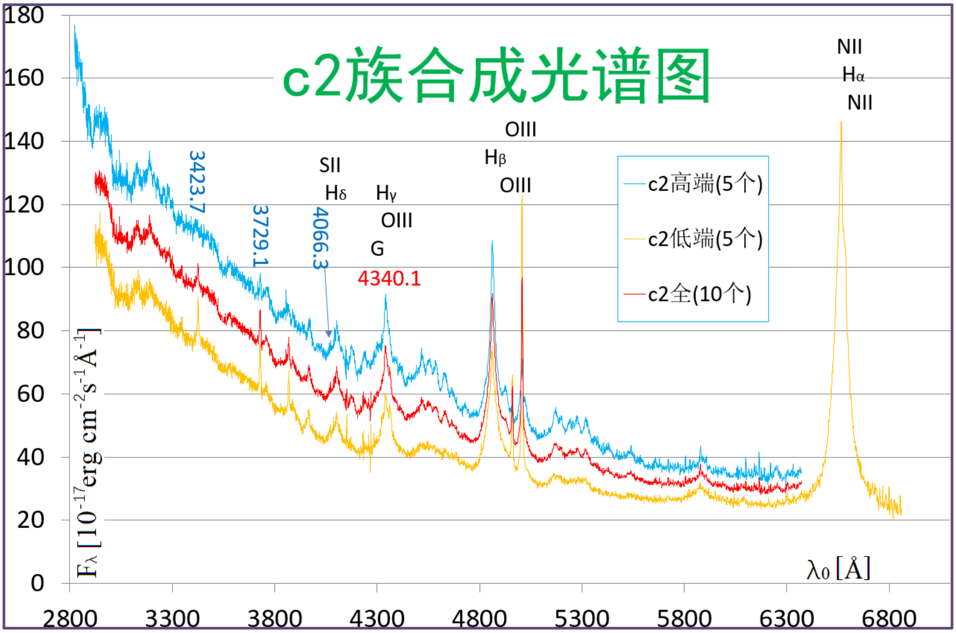


图 C7.28. *c*2 族合成光谱

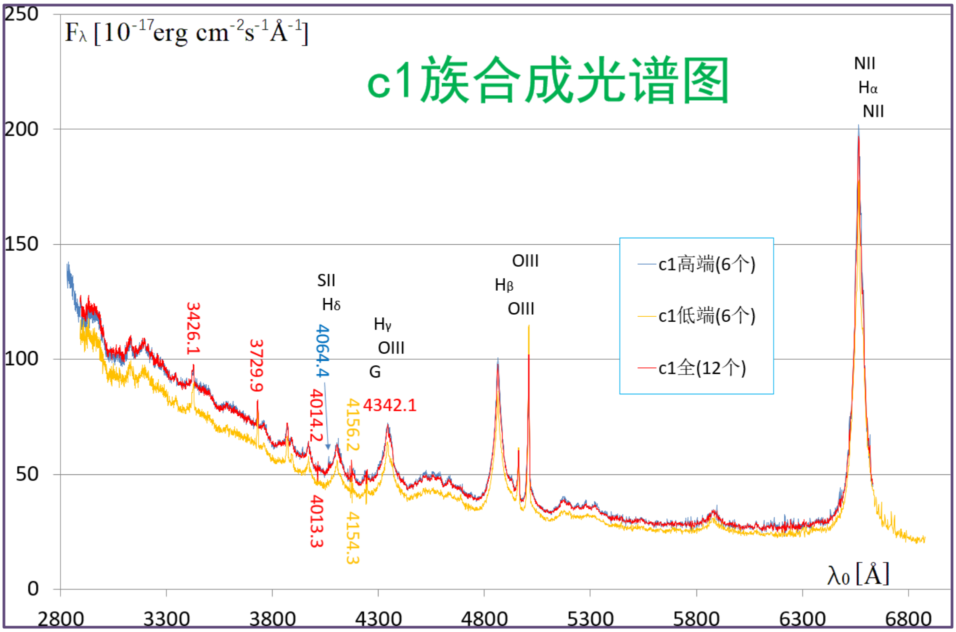
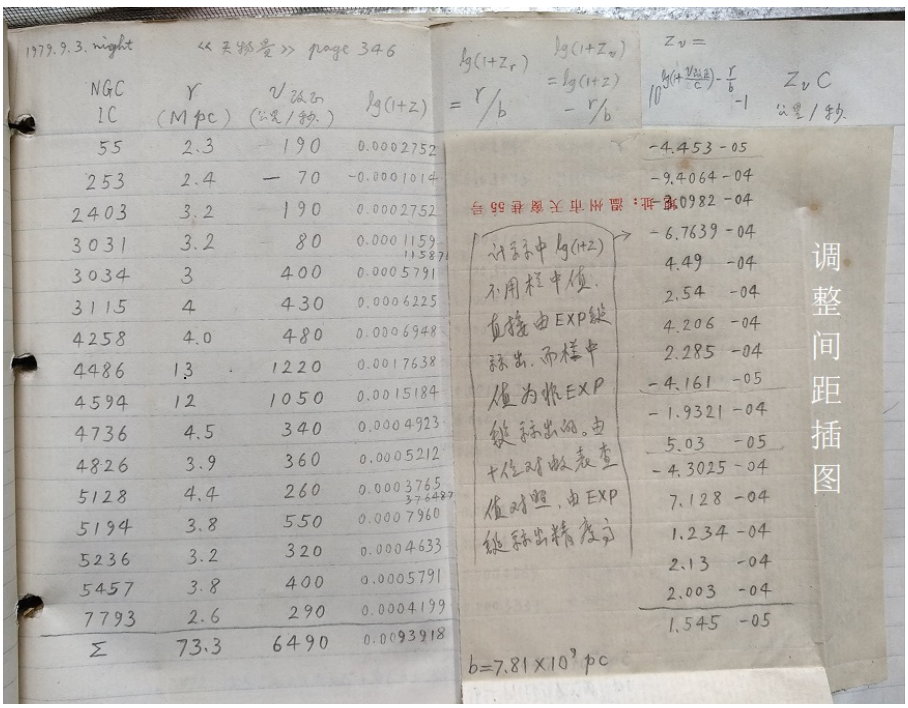


图 C7.29. *c*1 族合成光谱



1979.9.3. night 《天体物理学》 page 346

NGC IC	r (Mpc)	v 视向 (公里/秒)	lg(1+z)	lg(1+z_r) = r/b	lg(1+z_v) = lg(1+z) − r/b	z_v = $10^{\lg(1+\frac{v_{视向}}{c})-\frac{r}{b}}-1$	z_v c 公里/秒
55	2.3	190	0.0002752			-4.453 -05	
253	2.4	− 70	-0.0001014			-9.4064 -04	
2403	3.2	190	0.0002752			[illegible]0982 -04	
3031	3.2	80	0.0001159 11587			- 6.7639 -04	
3034	3	400	0.0005791			4.49 -04	
3115	4	430	0.0006225			2.54 -04	
4258	4.0	480	0.0006948			4.206 -04	
4486	13	1220	0.0017638			2.285 -04	
4594	12	1050	0.0015184			-4.161 -05	
4736	4.5	340	0.0004923			- 1.9321 -04	
4826	3.9	360	0.0005212			5.03 -05	
5128	4.4	260	0.0003765 376487			- 4.3025 -04	
5194	3.8	550	0.0007960			7.128 -04	
5236	3.2	320	0.0004633			1.234 -04	
5457	3.8	400	0.0005791			2.13 -04	
7793	2.6	290	0.0004199			2.003 -04	
Σ	73.3	6490	0.0093918			1.545 -05	

计算中 lg(1+z) 不用程中值，直接由EXP级数算出。而程中值为非EXP级数算出的。由十位对数表查值对照，由EXP级数算出精度高

b=7.81×10⁹ pc

调整间距插图

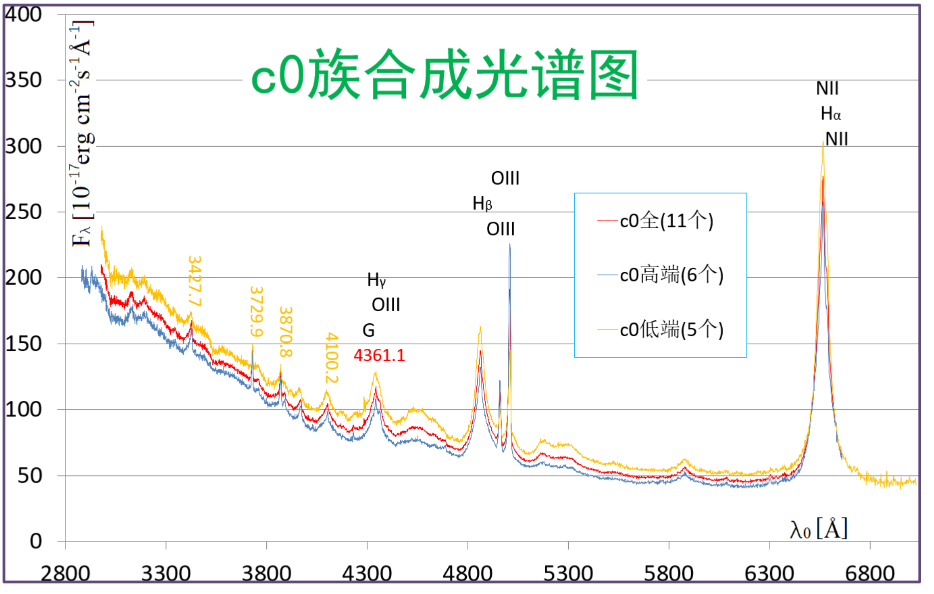


图 C7.30. *c*0 族合成光谱

===鸿沟=======鸿沟=======鸿沟=======鸿沟===

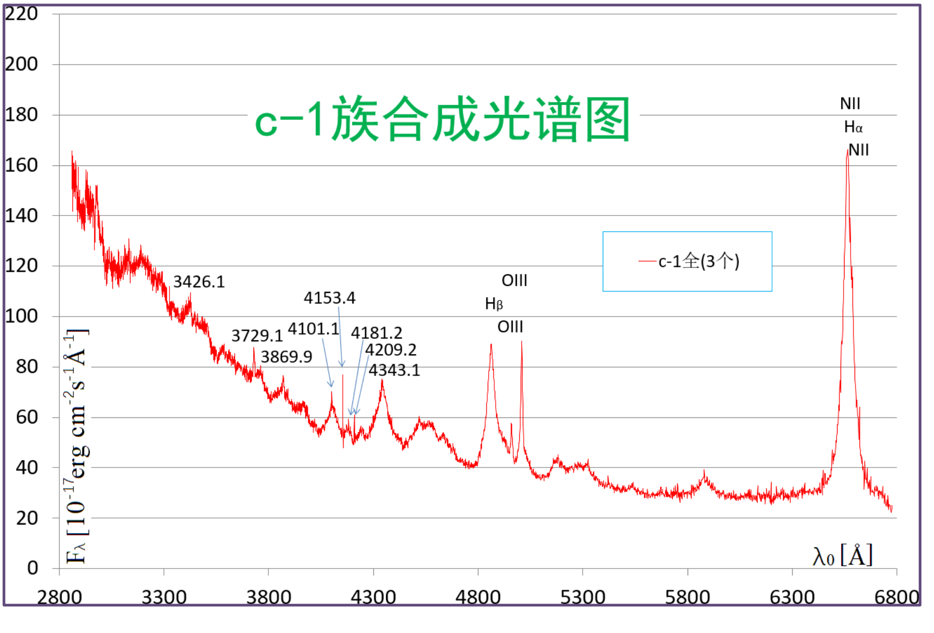


图 C7.31. *c*-1 族合成光谱

说明：*c*0 族与 *c*-1 族是在赫罗图鸿沟两岸的类星体，全合成光谱的 NII 峰(红线)是有明显差异的，NII 峰值比为 272:161；全合成光谱的 OIII 峰(红线)是有明显差异的，OIII 峰值比为 187:89；全合成光谱的 OII 峰(红线)是有明显差异的，OII 峰值比为 145:88；全合成光谱的 H_β 峰(红线)是有明显差异的，H_β 峰值比为 145:89；并出现了从北岸 *c*0 族开始蓝黄线上下位置转为相反的情况；很可能是发生突变事件(一种核燃料的耗尽或一种新核燃料的点燃)而形成的结果。

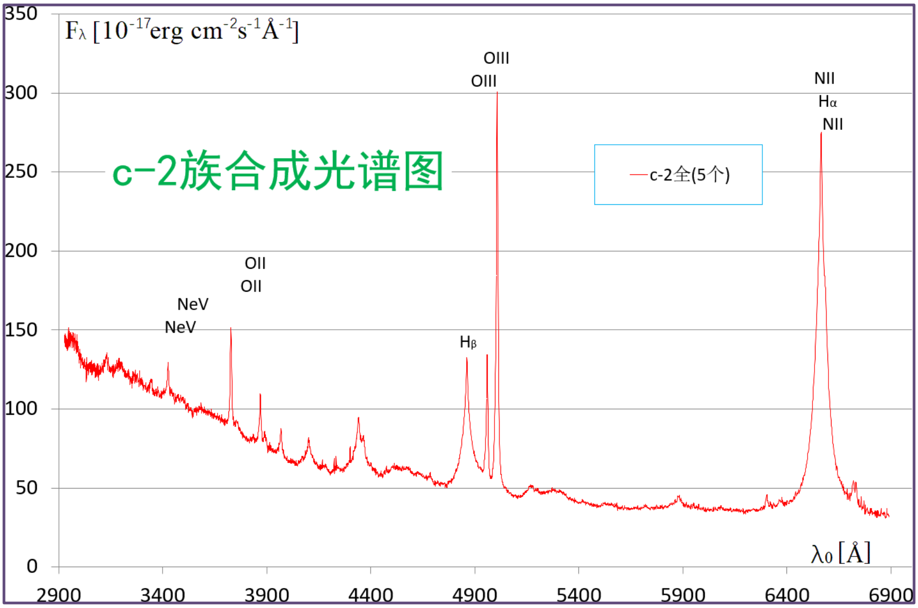
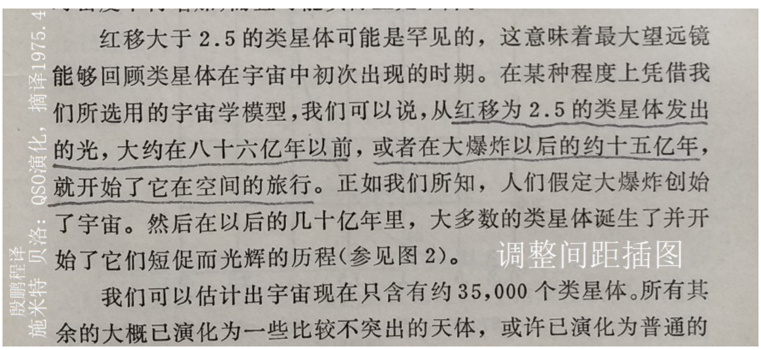


图 C7.32. *c*-2 族合成光谱



红移大于 2.5 的类星体可能是罕见的，这意味着最大望远镜能够回顾类星体在宇宙中初次出现的时期。在某种程度上凭借我们所选用的宇宙学模型，我们可以说，从红移为 2.5 的类星体发出的光，大约在八十六亿年以前，或者在大爆炸以后的约十五亿年，就开始了它在空间的旅行。正如我们所知，人们假定大爆炸创始了宇宙。然后在以后的几十亿年里，大多数的类星体诞生了并开始了它们短促而光辉的历程(参见图 2)。

我们可以估计出宇宙现在只含有约 35,000 个类星体。所有其余的大概已演化为一些比较不突出的天体，或许已演化为普通的

施米特 贝洛：QSO演化，摘译1975.4
殷鹏程译

调整间距插图

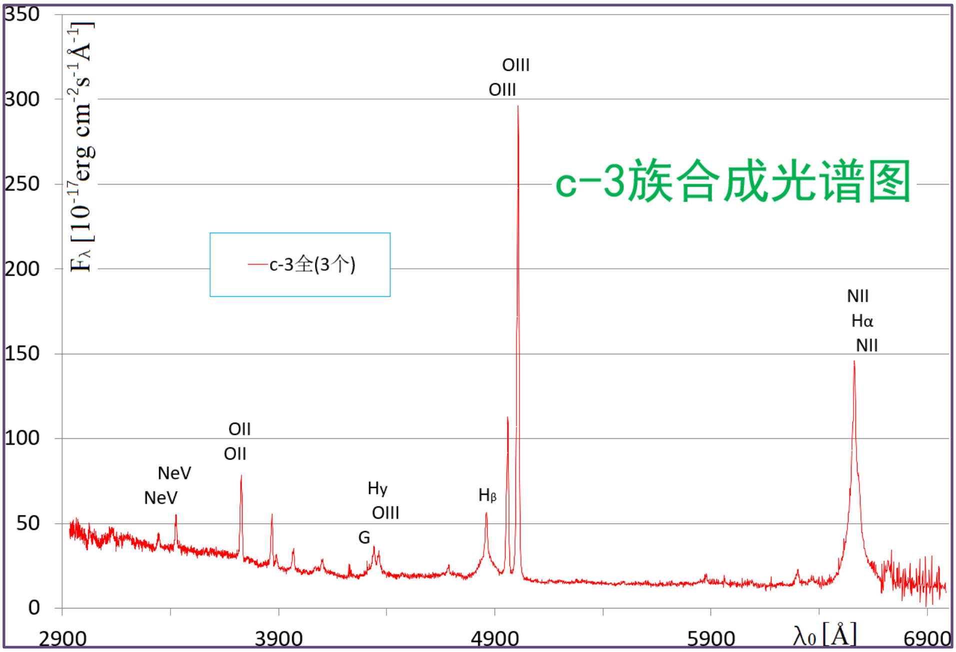
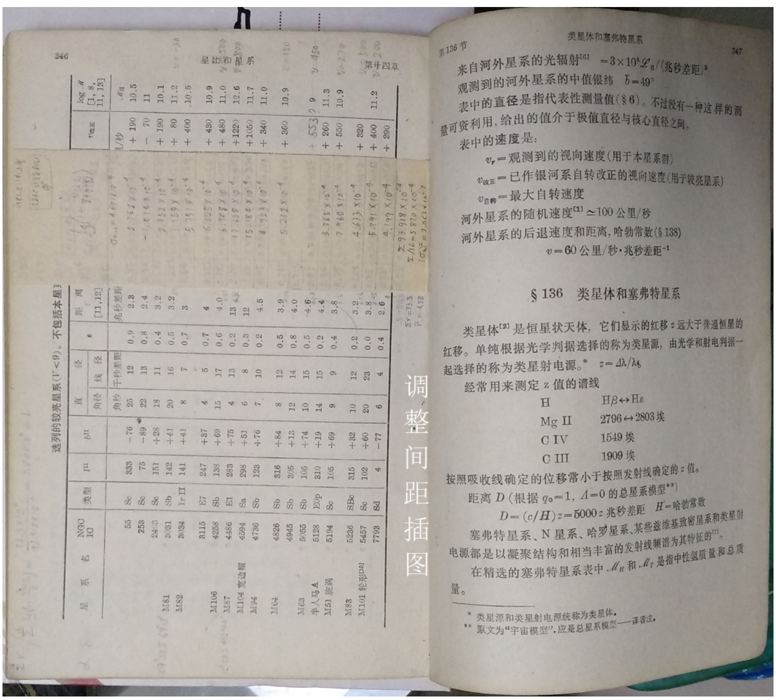


图 C7.33. *c*-3 族合成光谱



第 136 节　　类星体和塞弗特星系　　347

来自河外星系的光辐射[6]　$=3\times10^8\mathscr{L}_\odot$/(兆秒差距)^3

观测到的河外星系的中值银纬　$\bar{\delta}=49°$

表中的直径是指代表性测量值(§6)。不过没有一种这样的测量可资利用，给出的值介于极值直径与核心直径之间。

表中的速度是：

v_r＝观测到的视向速度(用于本星系群)

$v_{改正}$＝已作银河系自转改正的视向速度(用于较亮星系)

$v_{自转}$＝最大自转速度

河外星系的随机速度[1] $\simeq$100 公里/秒

河外星系的后退速度和距离，哈勃常数(§138)

$v=60$ 公里/秒·兆秒差距$^{-1}$

§136　类星体和塞弗特星系

类星体[2]是恒星状天体，它们显示的红移 z 远大于普通恒星的红移。单纯根据光学判据选择的称为类星源，由光学和射电判据一起选择的称为类星射电源。*　$z=\Delta\lambda/\lambda_0$

经常用来测定 z 值的谱线

H	$H\beta\leftrightarrow H\varepsilon$
Mg II	2796↔2803 埃
C IV	1549 埃
C III	1909 埃

按照吸收线确定的位移常小于按照发射线确定的 z 值。

距离 D (根据 $q_0=1$, $\Lambda=0$ 的总星系模型**)

$D=(c/H)z=5000z$ 兆秒差距　H＝哈勃常数

塞弗特星系、N 星系、哈罗星系、某些兹维基致密星系和类星射电源都是以凝聚结构和相当丰富的发射线频谱为其特征的[7]。

在精选的塞弗特星系表中 $\mathscr{M}_H$ 和 $\mathscr{M}_T$ 是指中性氢质量和总质量。

* 类星源和类星射电源统称为类星体。

** 原文为"宇宙模型"，应是总星系模型——译者注。

C8. 类星体各族在演化中的表现

C8.1. *a* 区各族参数在演化中的变化

为了研究 *a* 区各族各种参数在演化中的变化，把各参数标在依族序排列的图中，图中用红竖线表达鸿沟的分界处，得到了以下各图：

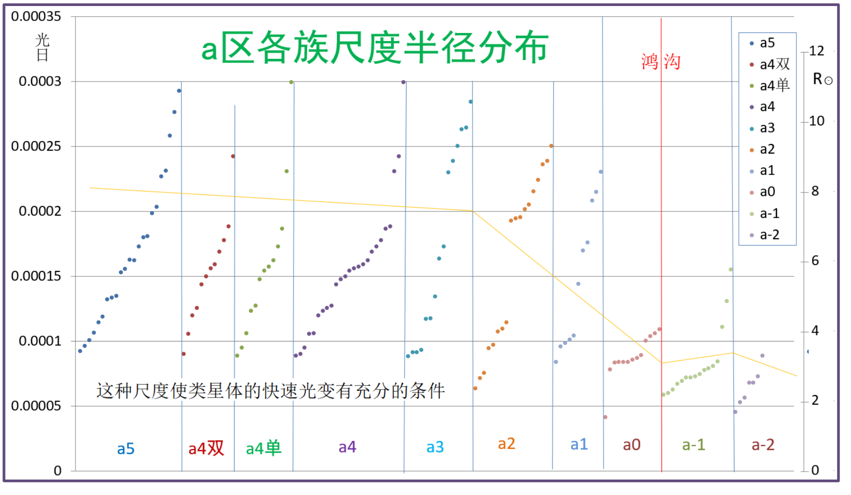


图 C8.1. *a* 区各族的尺度半径分布

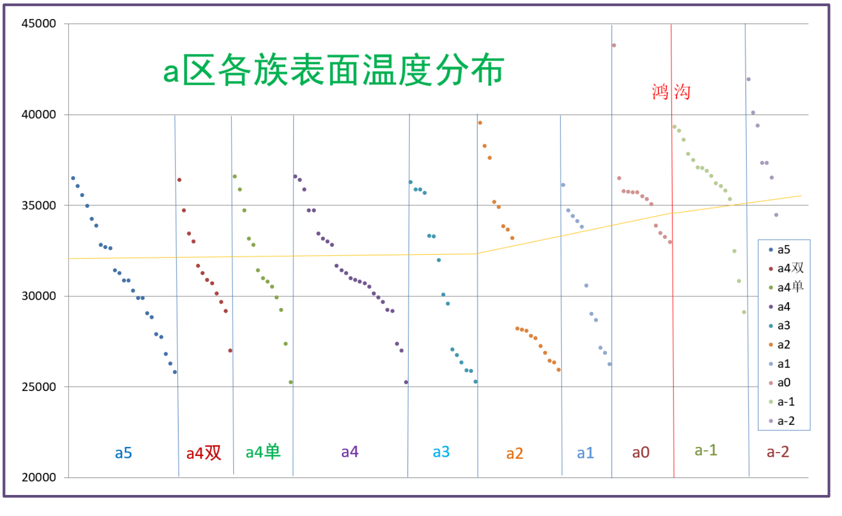


图 C8.2. *a* 区各族的表面温度分布

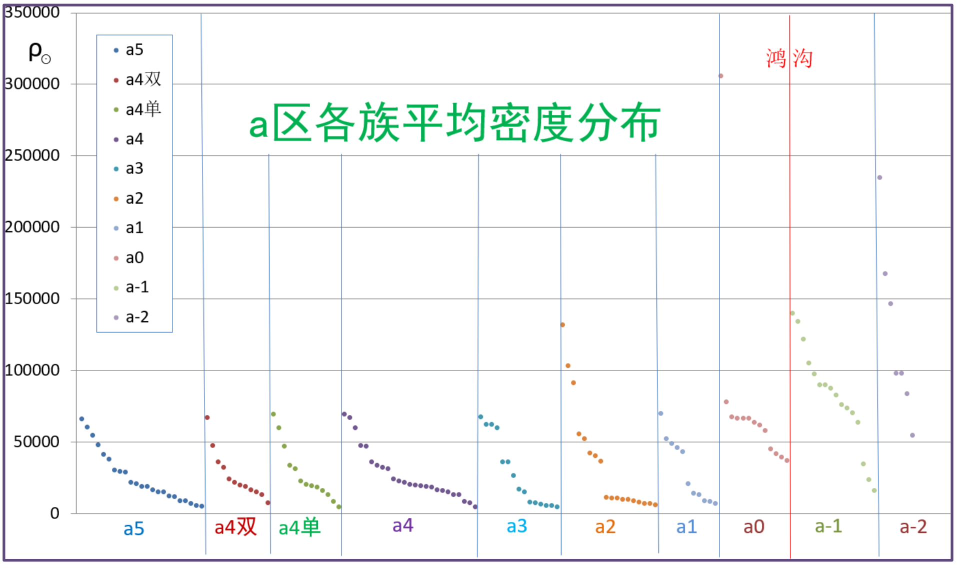


图 C8.3. *a* 区各族的平均密度分布

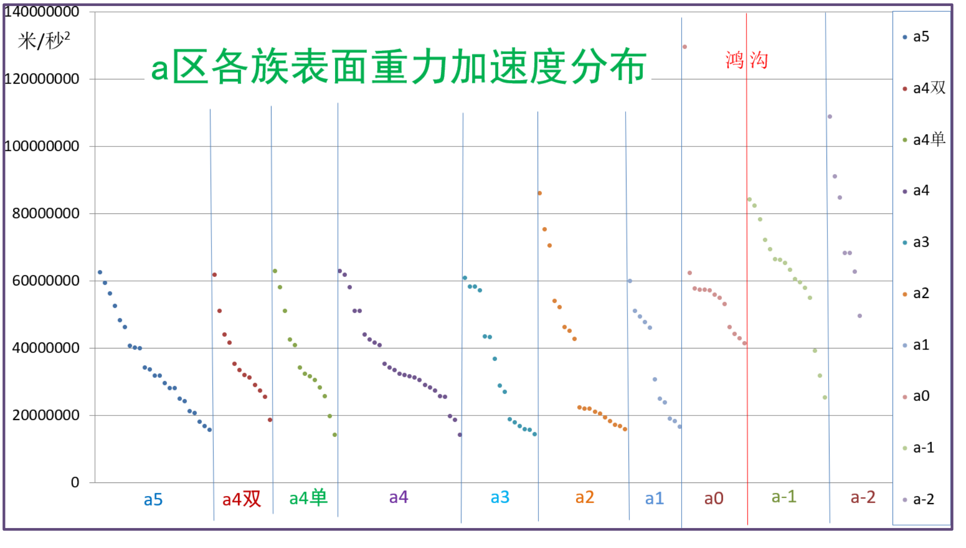


图 C8.4. *a* 区各族的表面重力加速度分布

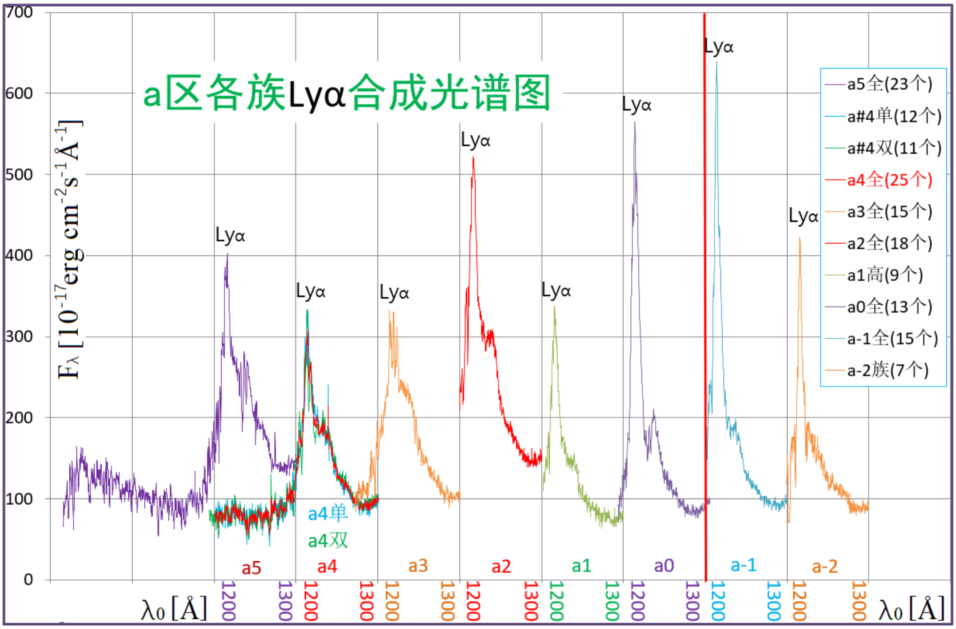


图 C8.5. *a* 区各族 Ly_{α} 谱线的变化

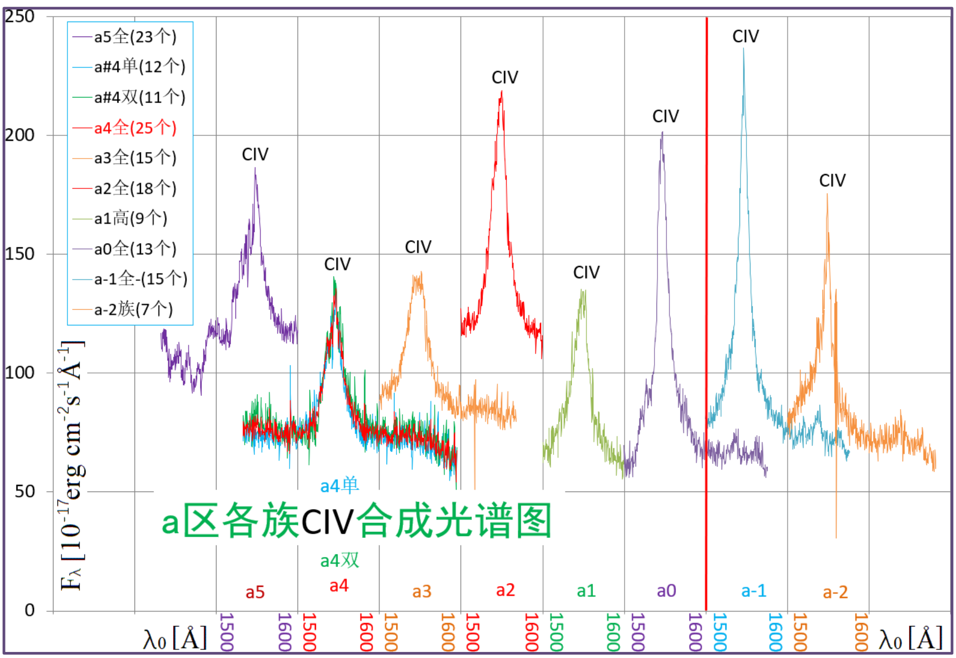


图 C8.6. *a* 区各族 CIV 谱线的变化

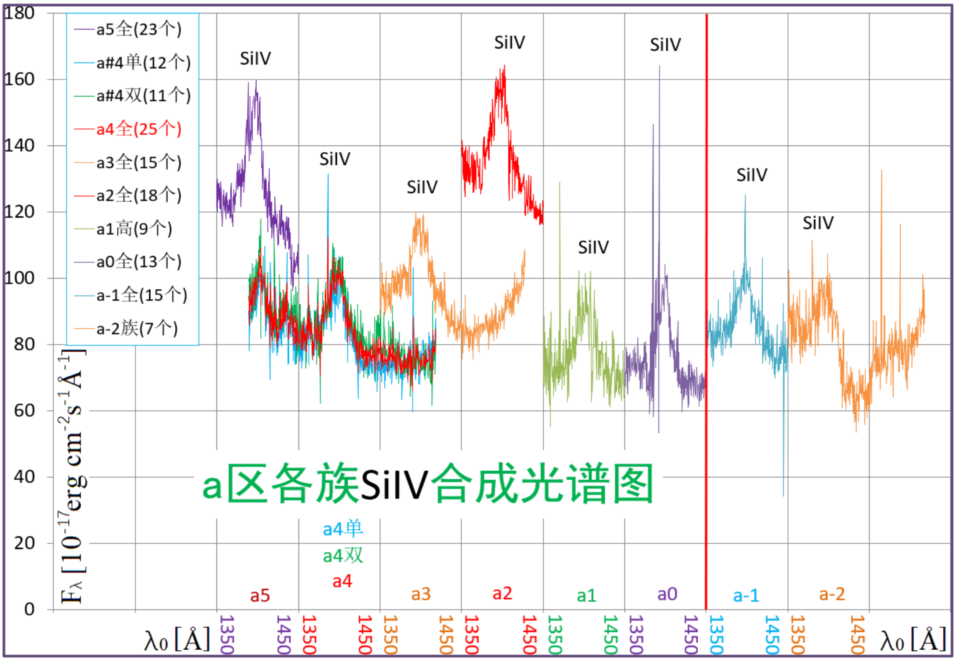


图 C8.7. *a* 区各族 SiIV 谱线的变化

综合上述(图 C8.1 至 C8.7)诸图分析，我们可以得出 *a*0 族至 *a*-1 族的鸿沟跳变中，发生了类星体的尺度坍缩，密度、温度、表面引力增强，Ly*α*、CIV 谱线增强，SiIV 谱线减弱。作者猜想，类星体核聚变是不同元素分层进行的，某层的核元素耗尽坍缩，却点燃其它层的核聚变的开始。

而鸿沟北岸 *a*0 族其实包含二种类星体，一种将要坍缩的类星体，引力红移要小些的；另一种是新的核聚变点燃后又膨胀返回的类星体，其引力红移要大些的。

根据其它族的情况分析，作者猜想，还存在隐性鸿沟，只不过隐性鸿沟处被其它非鸿沟的类星体复盖而成隐性鸿沟了。

C8.2. *b* 区各族参数在演化中的变化

为了研究 *b* 区各族各种参数在演化中的变化，把各参数标在依族序排

列的图中，图中用红竖线表达鸿沟的分界处，得到了以下各图：

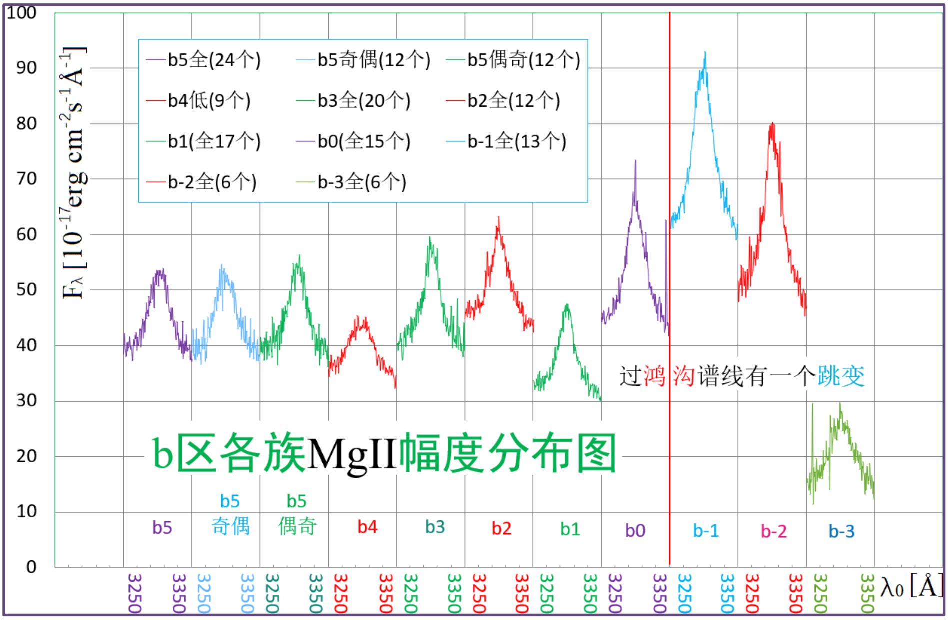


图 C8.8. *b* 区各族的 MgII 幅度分布

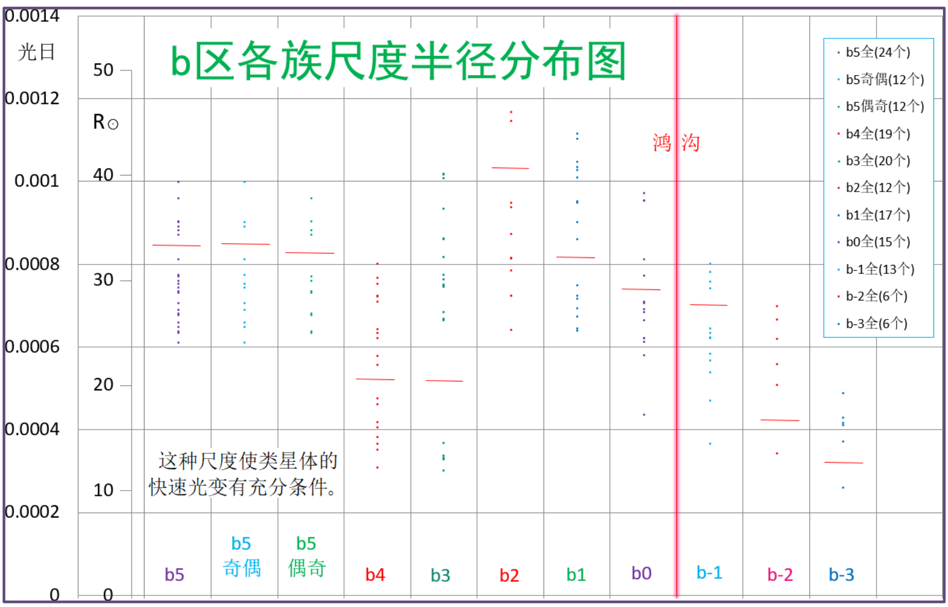


图 C8.9. *b* 区各族的尺度半径分布

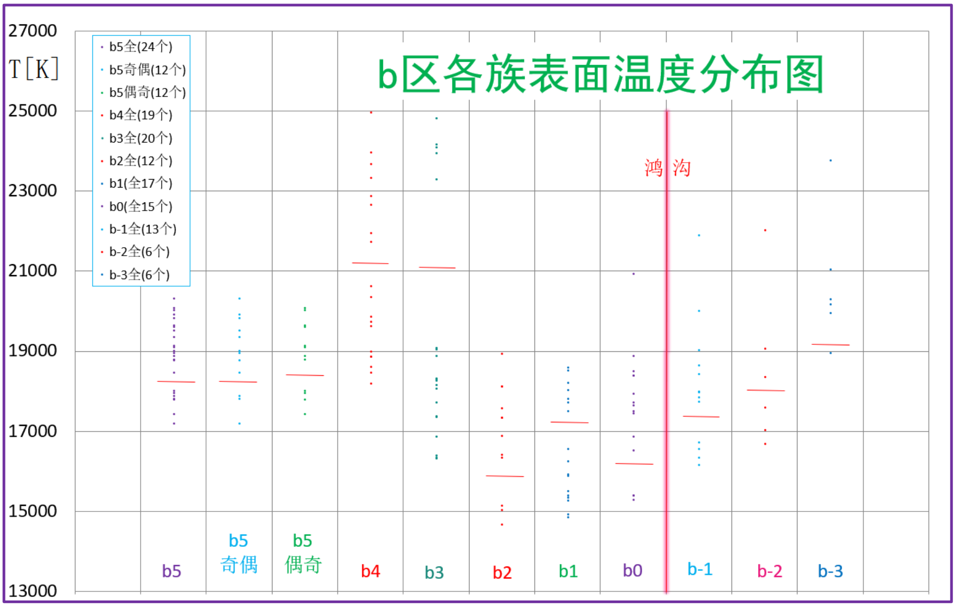


图 C8.10. *b* 区各族的表面温度分布

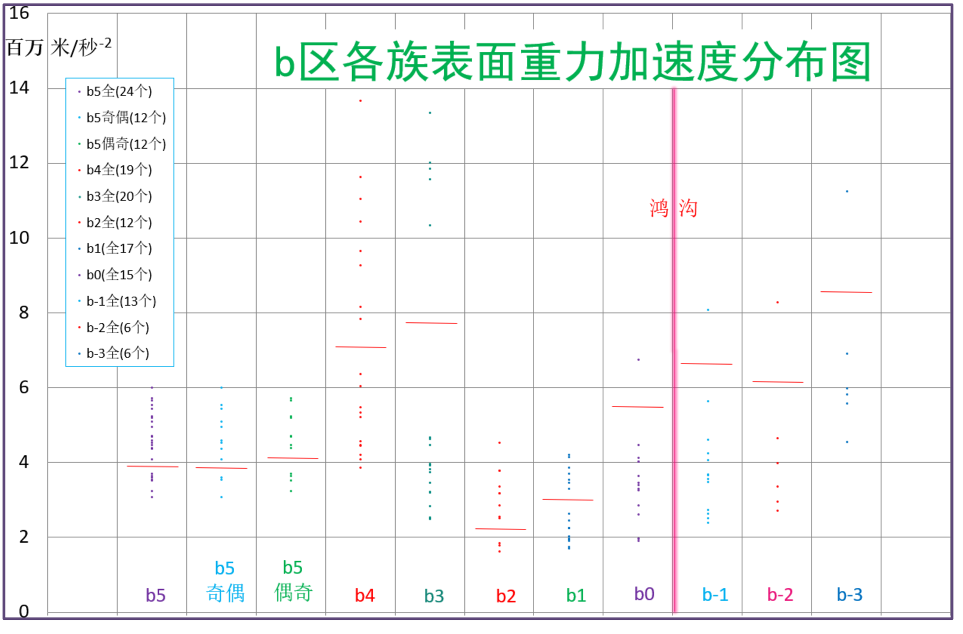


图 C8.11. *b* 区各族的表面重力加速度分布

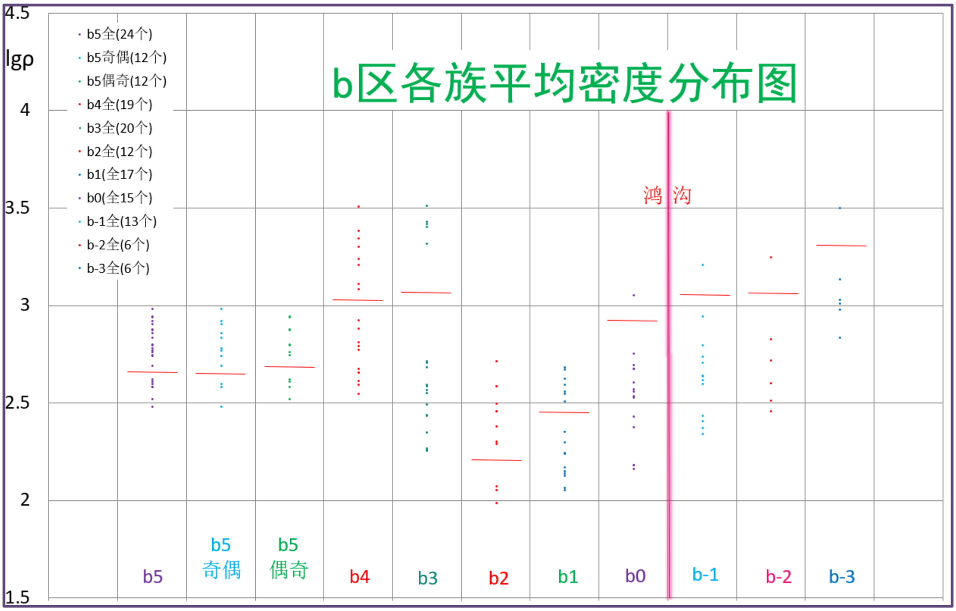


图 C8.12. *b* 区各族的平均密度分布

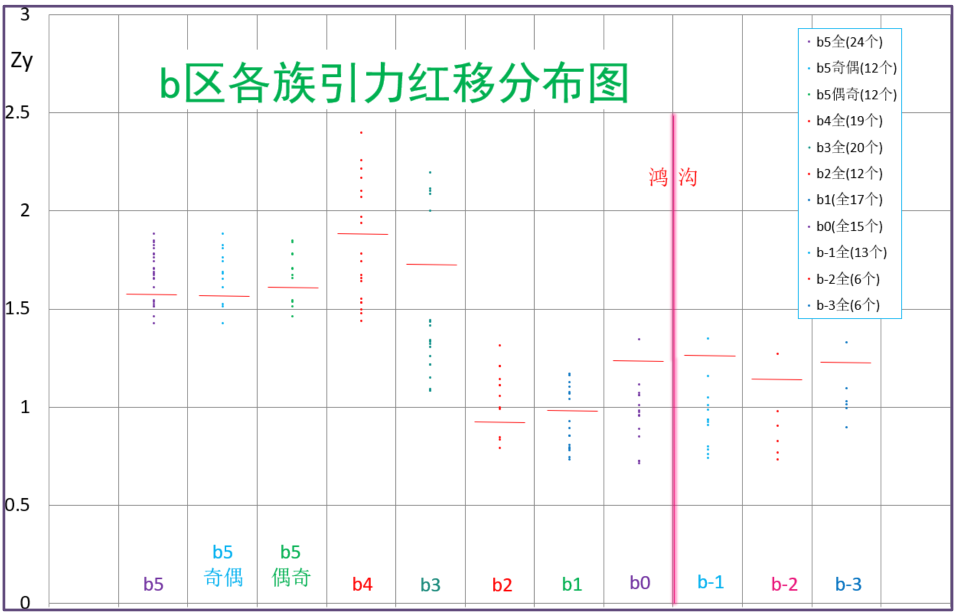


图 C8.13. *b* 区各族的引力红移分布

综合上述(图 C8.8 至 C8.13)诸图分析，我们可以得出 *b*0 族至 *b*-1 族的

鸿沟跳变中，发生了类星体的尺度坍缩，密度、温度、表面引力增强，MgII 谱线增强。作者猜想，类星体核聚变是不同元素分层进行的，某层的核元素耗尽坍缩，却点燃其它层的核聚变的开始。

而鸿沟北岸 *b*0 族其实包含二种类星体，一种将要坍缩的类星体，引力红移要小些的；另一种是新的核聚变点燃后又膨胀返回的类星体，其引力红移要大些的。

根据其它族的情况分析，作者猜想，还存在隐性鸿沟，只不过隐性鸿沟处被其它非鸿沟的类星体复盖而成隐性鸿沟了。*b*4 族和 *b*3 族之间就有一个类同与 *b*0 族和 *b*-1 族之间的跳变过程。因此，对 *b* 区的族参数进行计数统计，得到(图 C8.14)，明显看出有隐性鸿沟存在的痕迹。

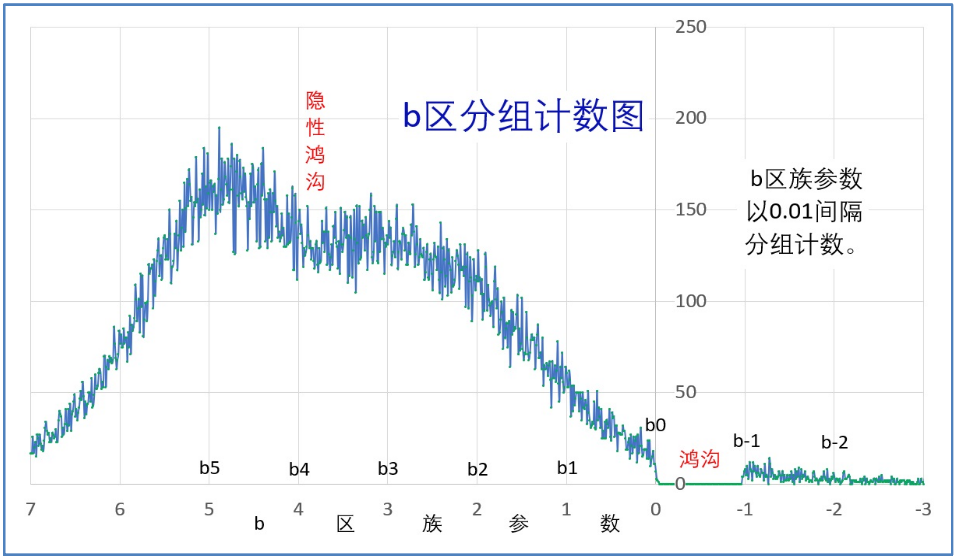


图 C8.14. *b* 区分组计数

C8.3. *c* 区各族参数在演化中的变化

为了研究 *c* 区各族各种参数在演化中的变化，把各参数标在依族序排列的图中，图中用红竖线表达鸿沟的分界处，得到了以下各图：

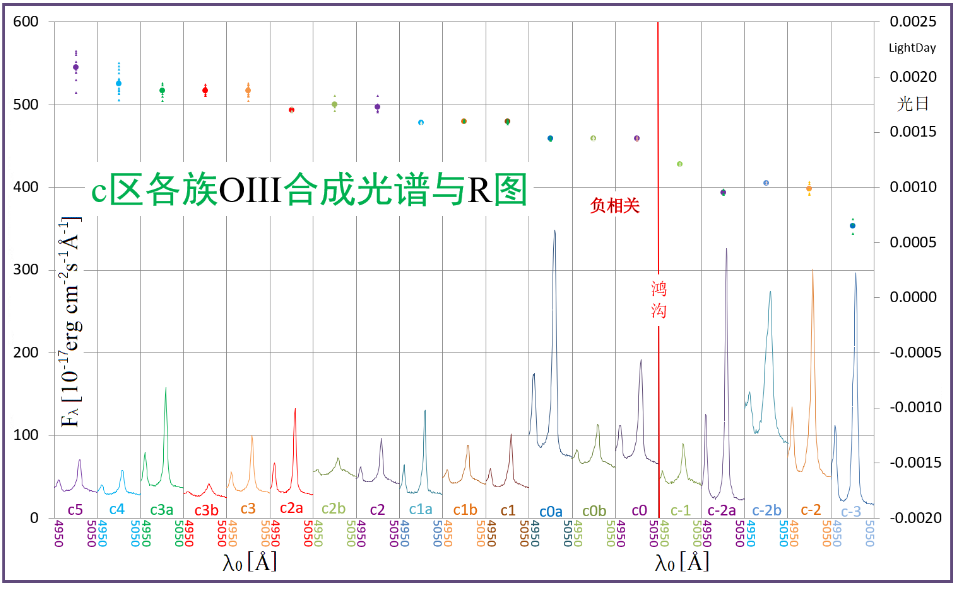


图 C8.15. *c* 区各族 OIII 谱线与半径 R 的变化

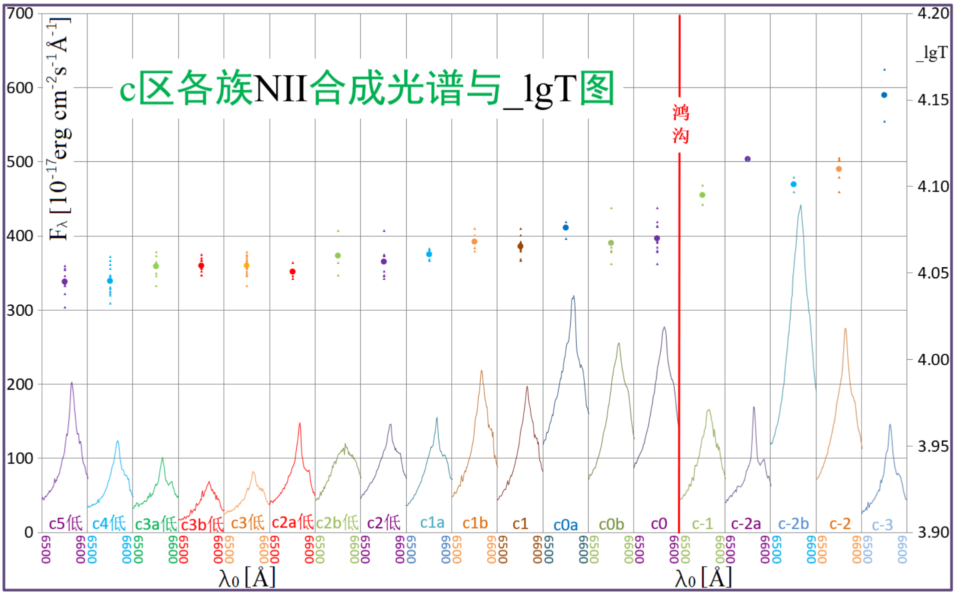


图 C8.16. *c* 区各族 NII 合成光谱与_lgT 图

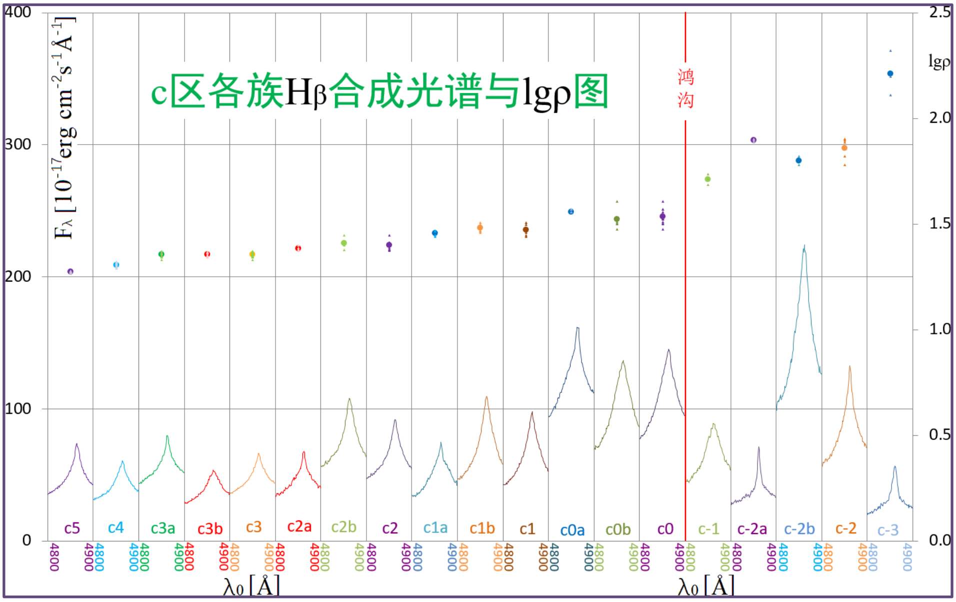


图 C8.17. *c* **区各族** H_β **谱线与平均密度对数** $\lg\rho$ **的变化**

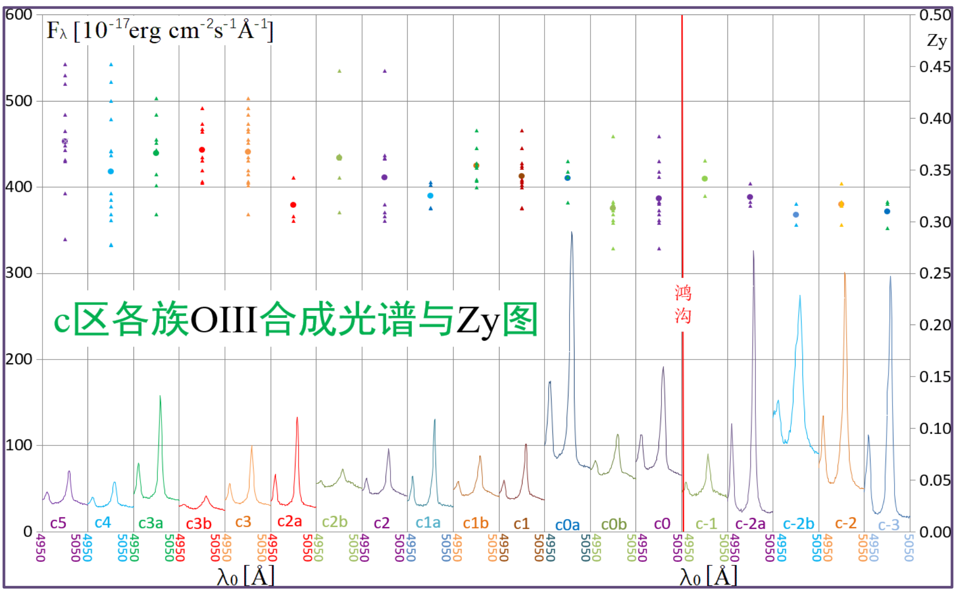


图 C8.18. *c* **区各族 OIII 谱线与引力红移** *Zy* **的变化**

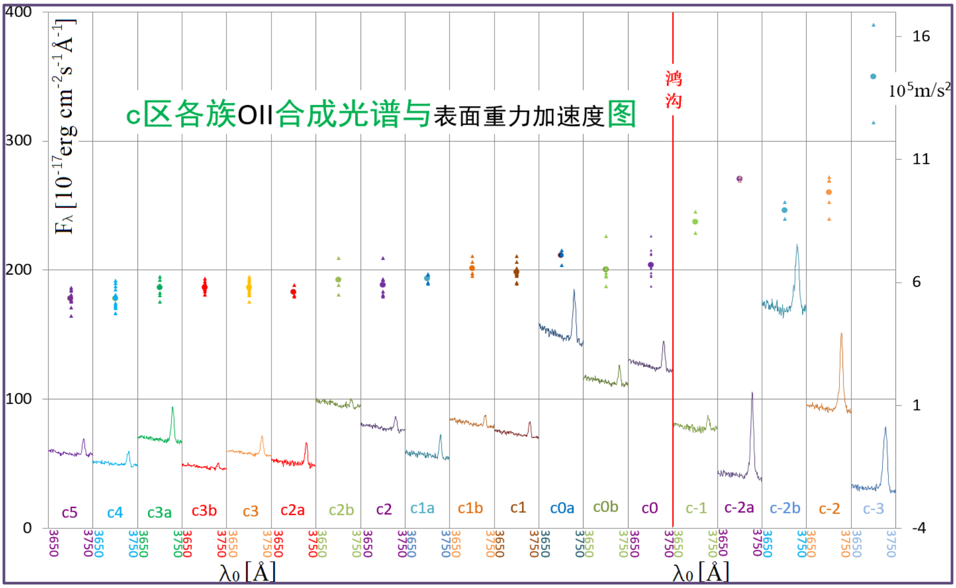
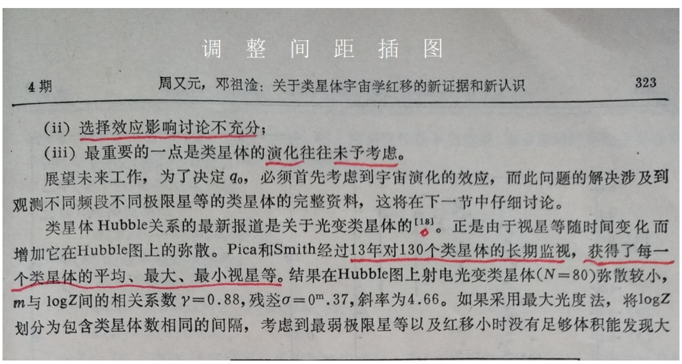


图 C8.19. *c* 区各族 OII 谱线与表面重力加速度的变化

综合上述(图 C8.15 至 C8.18)诸图分析，我们可以得出 *c*0 族至 *c*-1 族的鸿沟跳变中，发生了类星体的尺度坍缩，密度、温度、表面引力增强，OIII、OII、H_β 谱线减弱。作者猜想，类星体核聚变是不同元素分层进行的，某层的核元素耗尽坍缩，却点燃其它层的核聚变的开始。

而鸿沟北岸 *c*0 族其实包含二种类星体，一种将要坍缩的类星体，引力红移要小些的；另一种是新的核聚变点燃后又膨胀返回的类星体，其引力红移要大些的。


调 整 间 距 插 图

4 期　　周又元，邓祖淦：关于类星体宇宙学红移的新证据和新认识　　323

(ii) 选择效应影响讨论不充分；

(iii) 最重要的一点是类星体的演化往往未予考虑。

展望未来工作，为了决定 q_0，必须首先考虑到宇宙演化的效应，而此问题的解决涉及到观测不同频段不同极限星等的类星体的完整资料，这将在下一节中仔细讨论。

类星体 Hubble关系的最新报道是关于光变类星体的[18]。正是由于视星等随时间变化而增加它在Hubble图上的弥散。Pica和Smith经过13年对130个类星体的长期监视，获得了每一个类星体的平均、最大、最小视星等。结果在Hubble图上射电光变类星体($N=80$)弥散较小，m与 logZ间的相关系数 $\gamma=0.88$，残差$\sigma=0^m.37$，斜率为4.66。如果采用最大光度法，将logZ划分为包含类星体数相同的间隔，考虑到最弱极限星等以及红移小时没有足够体积能发现大

C8.4. 类星体在赫罗图上的演化轨迹

综合上述对 *abc* 三区各族的数据分析，得到类星体在赫罗图上的演化轨迹如(图 C8.19)。轨迹右边为前期方向，向左边后期方向演化。轨迹红蓝交接处为跨越鸿沟处，红蓝交接处自右向左，第 1、3、5 红蓝交接处为核心核燃料耗尽坍缩，第 2、4、6 处为新的核燃点燃，重新膨胀跨越鸿沟处。

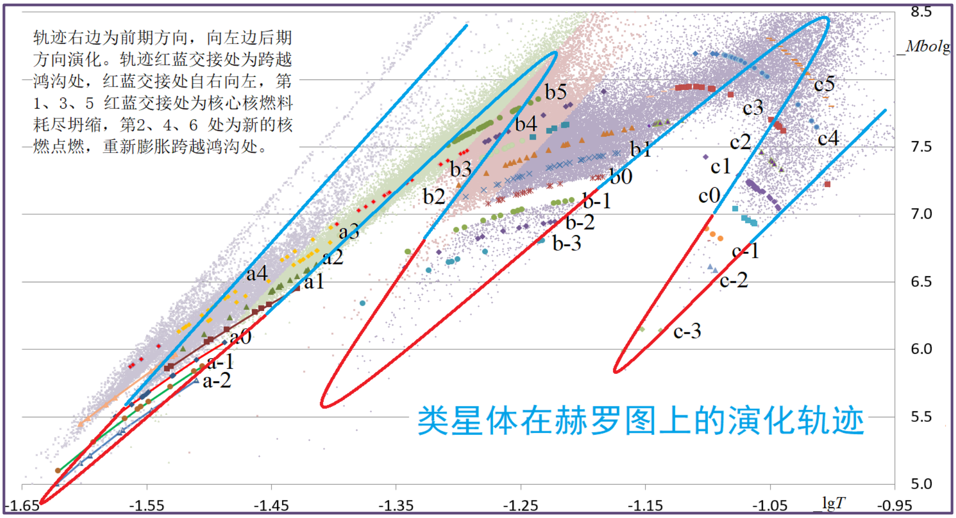


图 C8.20. 类星体在赫罗图上的演化轨迹

光度类星体这两种选择效应（图1），并考虑到类星体密度演化的改正，这 8 个间隔中最亮类星体的平均视星等与 $\log Z$ 相关性达 $\gamma=0.99$，$\sigma=0^{m}.28$，斜率为5.10。

众所周知，待证的视星等红移关系应为

$$m=M+5\log A(Z)-2.5(1+\alpha)\log(1+Z)+43.89, \qquad (1)$$

其中第三项为谱指数为 α 幂律分布下的 K 修正，H_0 选为 $50\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{Mpc}^{-1}$，而 $A(Z)$ 是光度距离

$$A(Z)=Z\left\{1+\frac{Z(1-q_0)}{[(1+2q_0Z)^{\frac{1}{2}}+(1+q_0Z)]}\right\}。 \qquad (2)$$

(2)式由Mattig 公式导出，但更方便地应用于 $q_0=0$ 情况。如考虑类星体的演化和选择效应，则(1)式中 M 也是 Z 的函数，欲知 $M=M(Z)$ 必须了解类星体演化性质。

另一方面，上述方法应用到射电宁静类星体(在类星体中占大多数)特别是类星体光学计数样品，还往往有些困难。图 2 是用有缝技术决定 5 个光学选择类星体巡天的Hubble图[19]，图 3 是用无缝技术决定0112—35天区光学选择类星体的Hubble图(数据取自[21])。他们的弥散相当大，目前测量其他特征量也是不现实的，一种巡天又往往取 Δm 较窄的范围。通常的

摘自：周又元，邓祖淦：关于类星体宇宙学红移的新证据　调整间距插图

C8.5. 类星体在空间上的分布

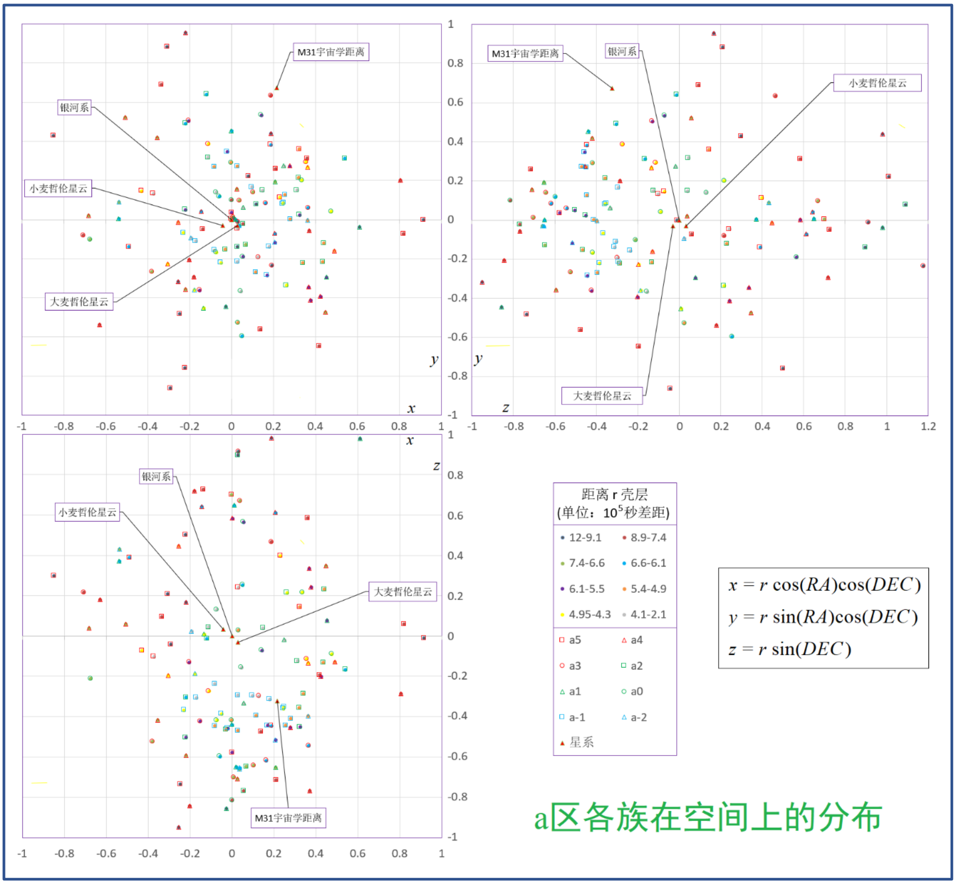


图 C8.21. *a* 区各族在空间上的分布

a 区各族在空间上的分布如(图 C8.21)，图中仅是选出部分 *a* 区样品；*b* 区各族在空间上的分布如(图 C8.22)，*c* 区各族在空间上的分布如(图 C8.23)，图中仅是选出部分 *c* 区样品。

从这 3 个图中可看出本星系群中充有很多类星体，但大爆炸宇宙学把怎么多的类星体都误认作它方，因此就感到了有太多的暗物质了。综合 *a* 区、*b* 区、*c* 区，作者认为图中周边有些类星体还应属本超星系团的成员。

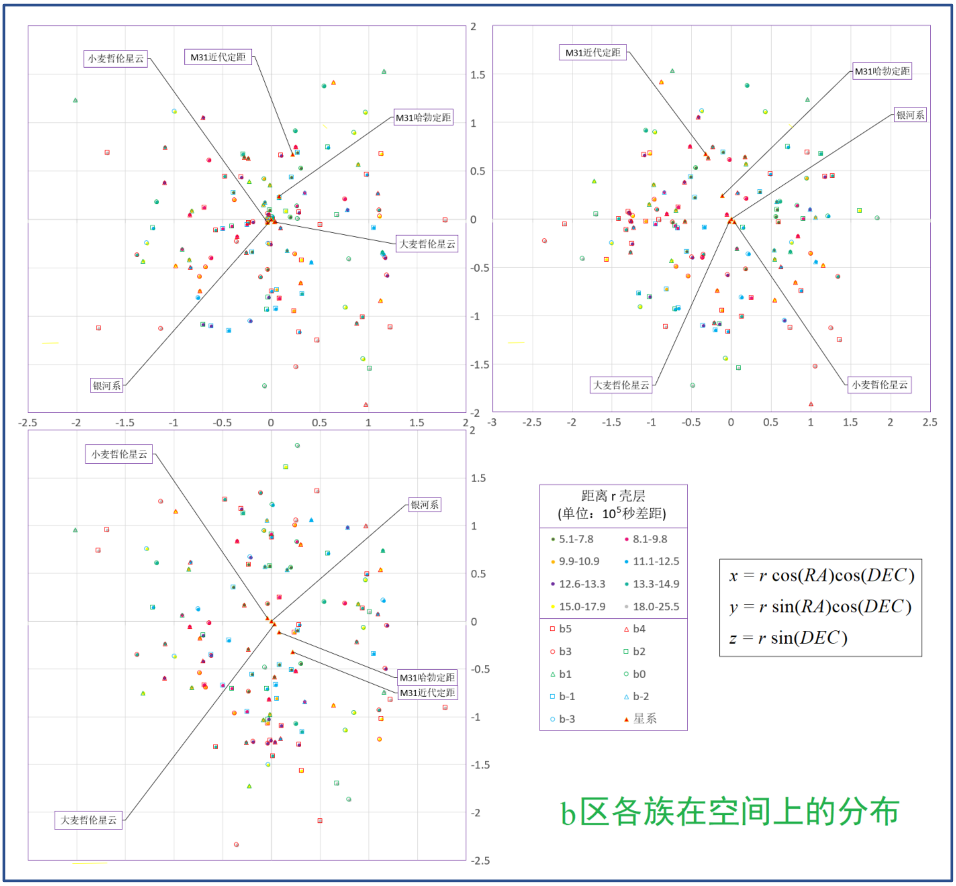
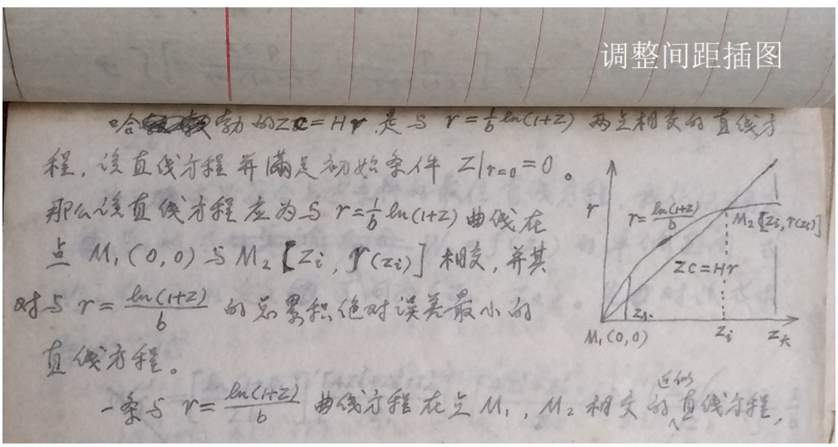


图 C8.22. *b* 区各族在空间上的分布



哈勃的 $Z_C=Hr$ 是与 $r=\frac{1}{b}\ln(1+z)$ 两点相交的直线方程，该直线方程并满足初始条件 $Z|_{r=0}=0$。那么该直线方程应为与 $r=\frac{1}{b}\ln(1+z)$ 曲线在点 $M_1(0,0)$ 与 $M_2[z_i, r(z_i)]$ 相交，并其对与 $r=\frac{\ln(1+z)}{b}$ 的总累积绝对误差最小的直线方程。

一条与 $r=\frac{\ln(1+z)}{b}$ 曲线方程在点 M_1，M_2 相交的近似直线方程，

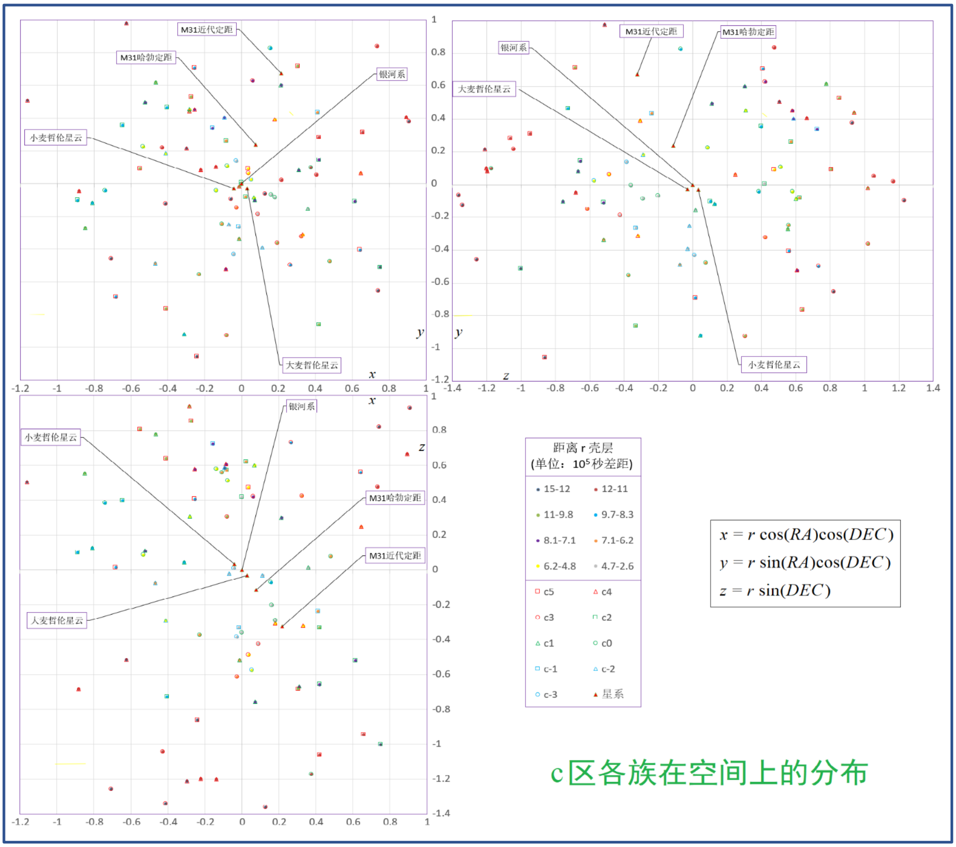


图 C8.23. *c* 区各族在空间上的分布

4 期　　黄克谅：类星体研究的某些进展　　317

$V_{max}\rangle$检验，这个方法是 Schmidt 于 1968 年提出的[54]，是目前最常用的检验方法。在$\langle V/V_{max}\rangle$检验中，V 指一组完整样品中某一类星体所占据的体积，即与其红移 Z 相对应的距离 r 所包含的体积。V_{max} 为该类星体可能占据的最大体积，即对应于最大红移 Z_{max}（或r_{max}）的体积。Z_{max} 是这样来确定的：如果该类星体的红移为 Z_{max}，则其流量（或视星等）正好等于该组完整样品的流量（或视星等）极限，也就是该类星体正好仍属于该组完整样品。Schmidt 指出，如果类星体的空间分布是均匀的，即空间密度与红移无关，则对于一组完整样品，V/V_{max} 的平均值$\langle V/V_{max}\rangle=0.5$。Avni 和 Bahcall[55] 更严格地讨论了$\langle V/V_{max}\rangle$检验，并把它推广到更复杂的情形。

Schmidt[54]讨论了 3CR 的 40 个类星体组成的完整样品，得出$\langle V/V_{max}\rangle=0.69$（取$q_0=0$）或 0.70（$q_0=1$）。以后，大量的研究（如Olson[56]，Wills 和 Lynds[57]对 4C 表中的类星体；Masson 和 Wall[58]，Wills 和 Lynds[57]对 PKS ± 4°的类星体；Schmidt 和 Green[51]对亮类星体以及许多其它样品）都表明$\langle V/V_{max}\rangle$并不等于 0.5，其值在 0.6—0.7 之间。更仔细的研究表明，$\langle V/V_{max}\rangle$值可能与类星体的次型有关：

(i) 射电平谱类星体的$\langle V/V_{max}\rangle$值相对较小，而射电陡谱类星体的值较大。如 3CR、4C 源的$\langle V/V_{max}\rangle$分别为0.64和0.69，但其中平谱类星体的$\langle V/V_{max}\rangle$为 0.52；PKS ± 4°源的$\langle V/V_{max}\rangle$为 0.62，但平谱源为 0.58 等等[59]。

(ii) 高光度类星体的$\langle V/V_{max}\rangle$较大，低光度的较小。Petrosian[60]根据 Linds 等人得到的光学选取的类星体样品，得到$\langle V/V_{max}\rangle=0.76$（高光度）和 0.55（低光度）。其他人的研究有类似的结果。

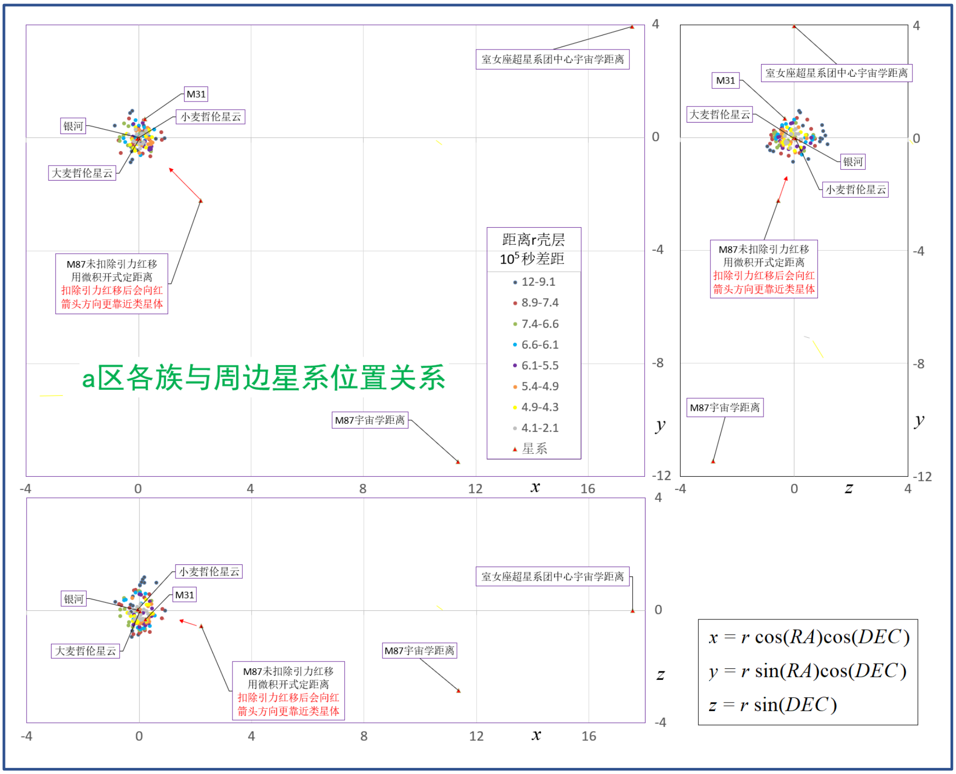


图 C8.24. *a* 区各族成员与周边星系位置关系

a 区各族成员相对于周边星系的位置关系如(图 C8.24)，M87 是本超星系团的成员，扣除引力红移后，就很接近 *a* 区各族的周边成员了，因此，*a* 区各族的周边成员很可能就是本超星系团的成员。

考虑了本超星系团中类星体的存在，本超星系团的中心位置今后还要重新认定。因 b_1 值今后还得作进一步的统计求值，作者认为 b_1 值很可能会是一个界于本文使用的二个值 1.69×10^9 至 1.107×10^{10} 秒差距之间并偏近前者。因此类星体的分布会比(图 C8.21)至(图 C8.26)中所示范围扩大些。

b 区各族成员相对于周边星系的位置关系如(图 C8.25)，M87 是本超星系团的成员，扣除引力红移后，就很接近 *b* 区各族的周边成员了，因此，*b* 区各族的周边成员的距离比 *a* 区更远，很可能就是本超星系团的成员。

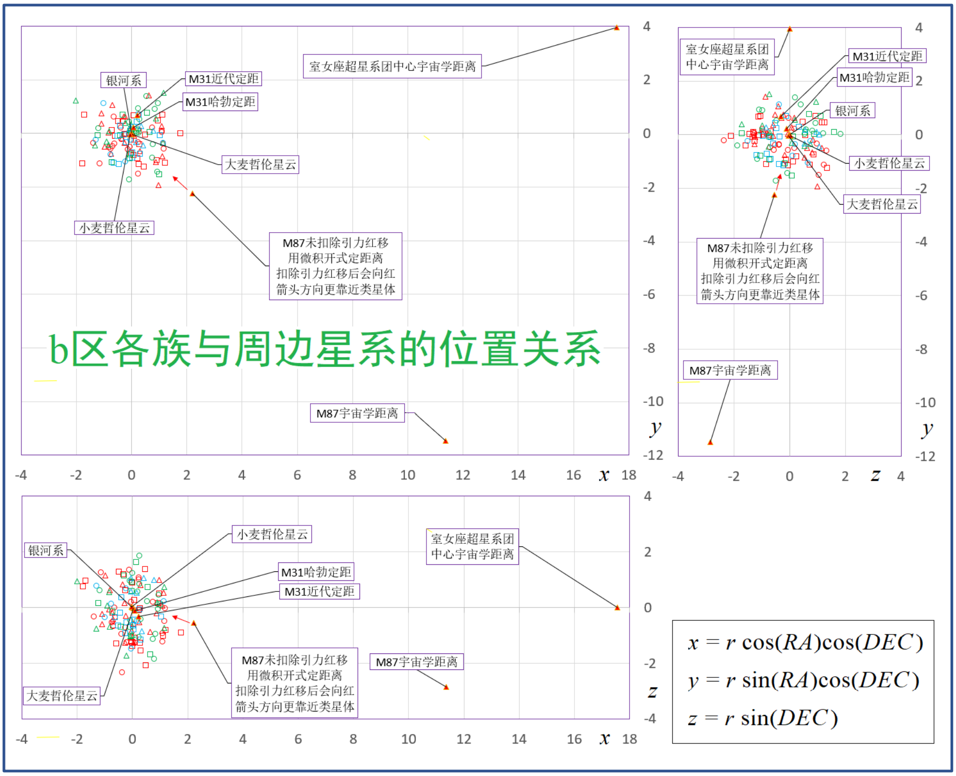


图 C8.25. *b* 区各族与周边星系位置关系

c 区各族成员相对于周边星系的位置关系如(图 C8.26)，M87 是本超星系团的成员，扣除引力红移后，就很接近 *c* 区各族的周边成员了，因此，*c* 区各族的周边成员的距离比 a 区更远，很可能就是本超星系团的成员。

SDSS DR7 中 10 万多类星体应当都是本超星系团的成员，按照 $b_1 = 1.69 \times 10^9$ 秒差距，$\mu = 142$ 估算 SDSS DR7 中类星体的总质量为 1.3×10^{12} 太阳质量。这仅是本超星系团中已经被观测到很少的一部分类星体。因此，类星体正是未找到的所谓暗物质的主要部分。

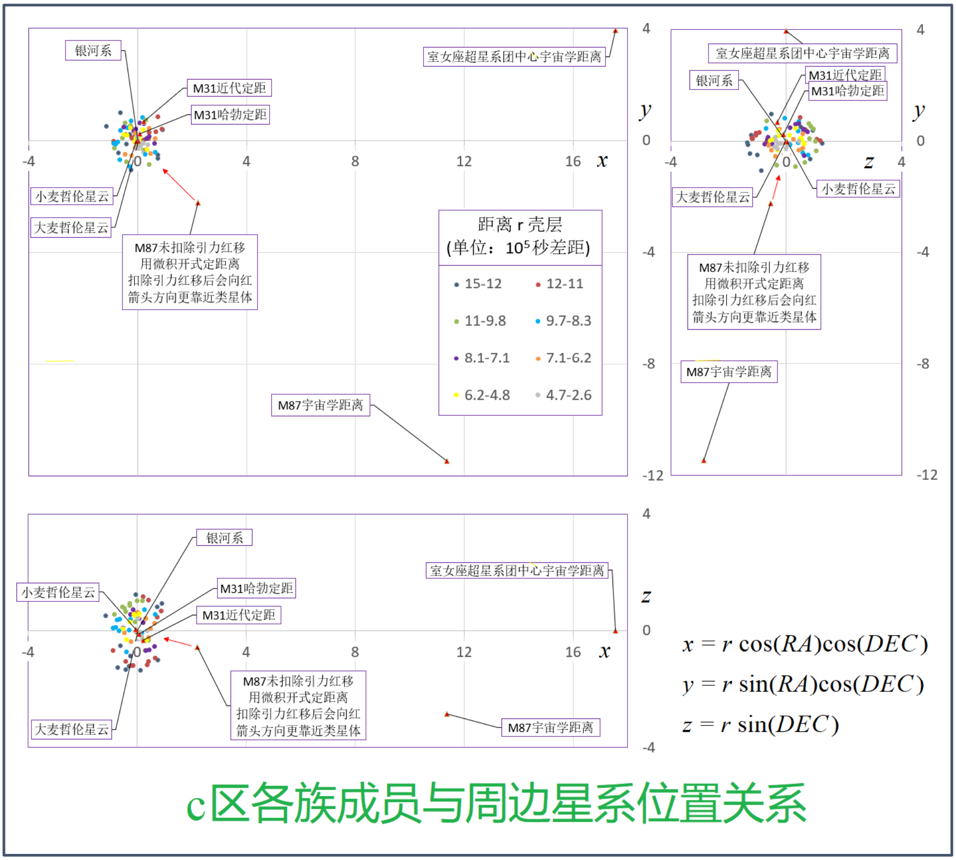


图 C8.26. *c* 区各族与周边星系位置关系

C9. 类星体绝大部分是灰洞型天体

近年来，大红移类星体的发现，给大爆炸宇宙与黑洞理论带来困难。类星体 SMSS J215728.21~360215.1 的红移量 Z = 16.9，至使该理论**要在很短的宇宙早期**已**吸积**如此**巨大产能**的**黑洞**难以自圆其说[8][9]。

因此，以下要论述类星体绝大部分是**灰洞**的理由。

本文因确定类星体质光比的数据太少，因此本文确定的类星体距离，只能说是数量级上的初期接近；但各类星体间的相对距离还是能显出有较

好相序关系，因此仍能揭示类星体的族特性。

而类星体是光变天体，因此揭示精确的类星体质光比随类星体光变变化的特性，是下步待解决的问题，有待下文论述。

目前计算得出：处于演化后期的 *a* 区类星体的半径全部在施瓦西半径内(图 C9.1)；而处于演化中期的 *b* 区类星体一部分半径在施瓦西半径内，一部分半径大于施瓦西半径(图 C9.2)；处于演化前期的 *c* 区类星体的半径全部大于施瓦西半径(图 C9.3)。因此，作者认为类星体绝大部分是灰洞型天体，点源赫罗图上灰洞成员的分布如(图 C9.4)。

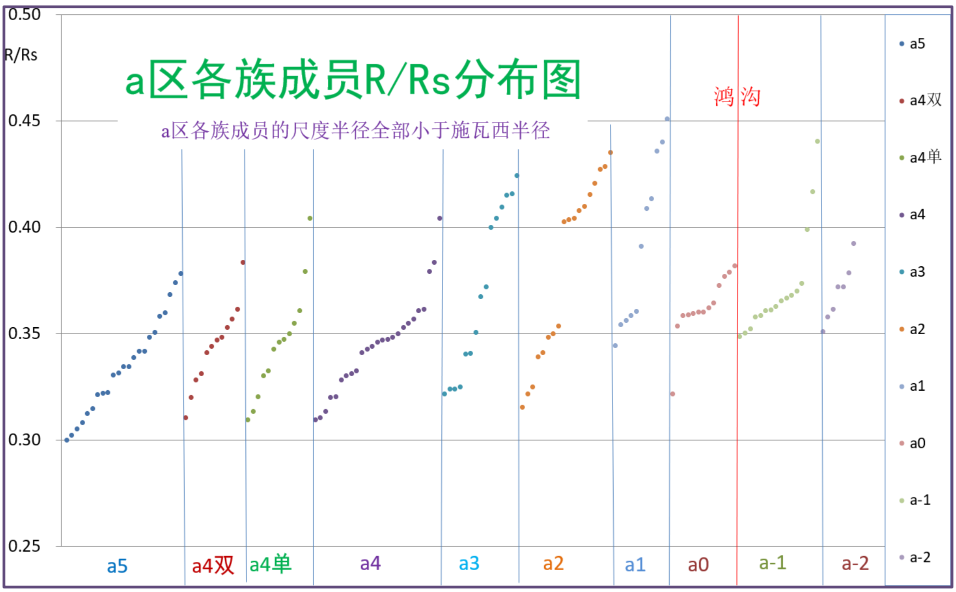


图 C9.1. *a* 区各族尺度半径分布

说明：*a* 区各族成员的尺度半径**全部**落入施瓦西半径内。

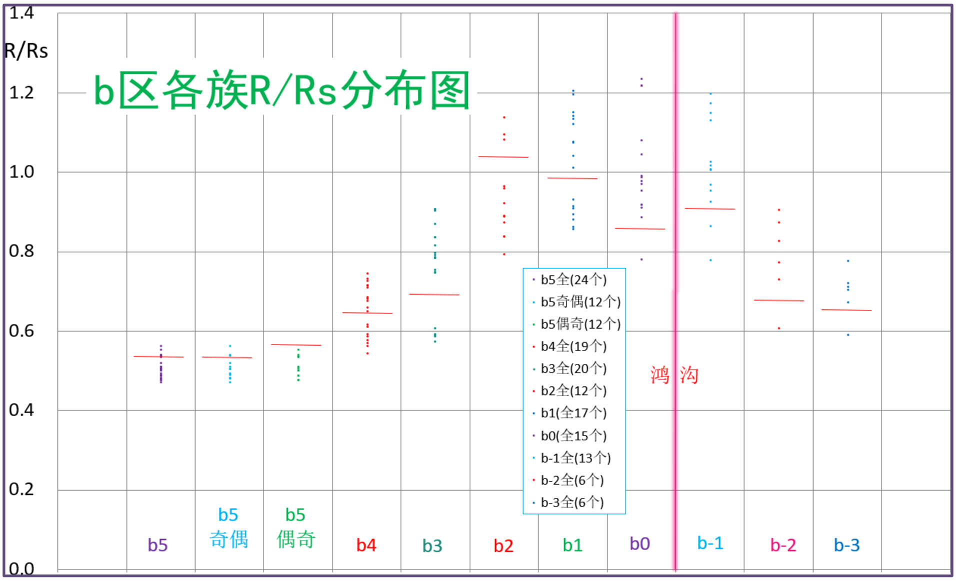


图 C9.2. *b* 区各族尺度半径分布

说明：*b* 区各族成员的尺度半径只有**一部分**落入施瓦西半径内。

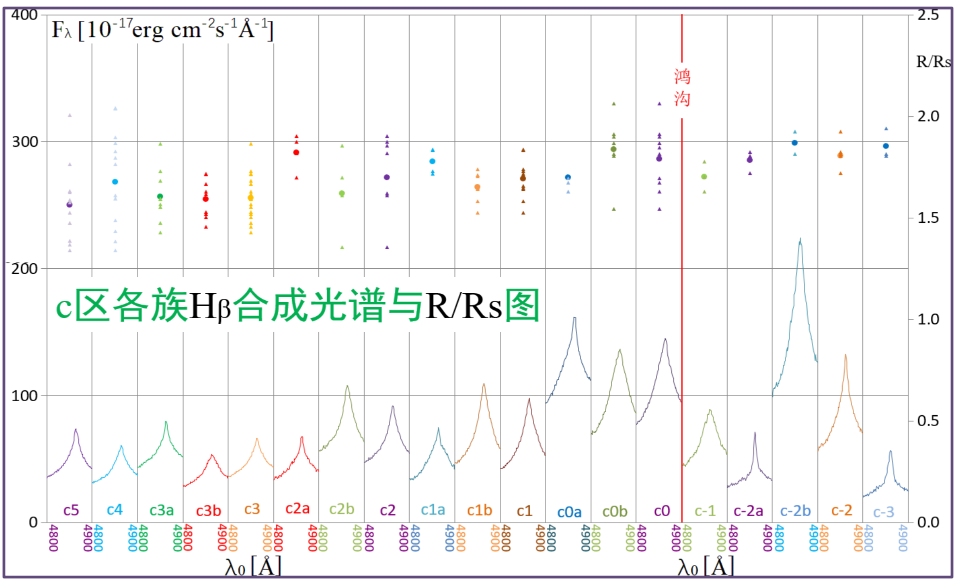


图 C9.3. *c* 区各族尺度半径分布

说明：*c* 区各族成员的尺度半径**全部不**落入施瓦西半径内。

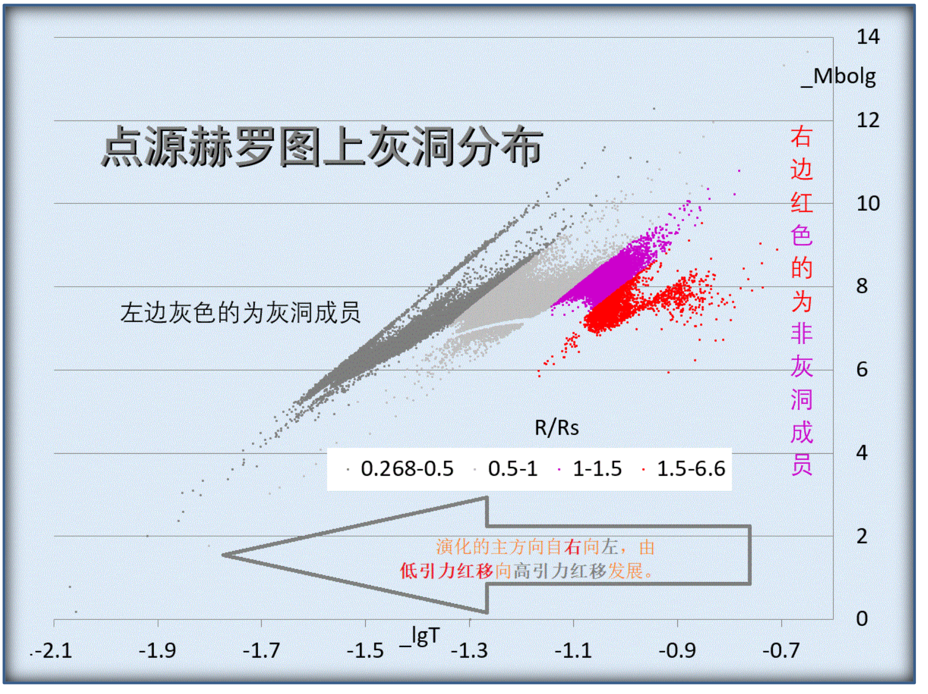
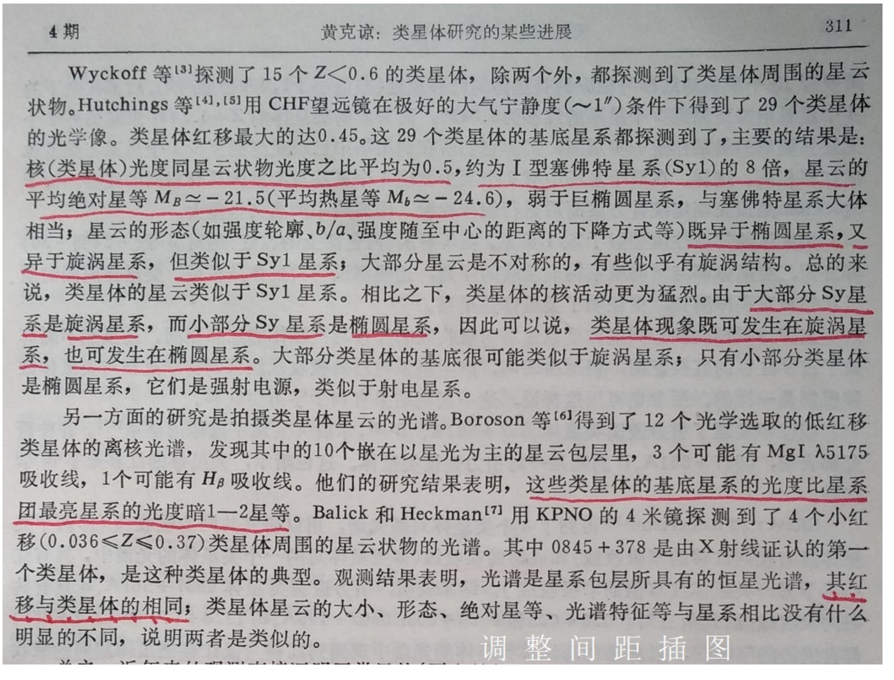


图 C9.4. 点源赫罗图上灰洞的分布



4 期　　　黄克谅：类星体研究的某些进展　　　311

Wyckoff 等[3]探测了 15 个 $Z<0.6$ 的类星体，除两个外，都探测到了类星体周围的星云状物。Hutchings 等[4],[5]用 CHF望远镜在极好的大气宁静度(～1″)条件下得到了 29 个类星体的光学像。类星体红移最大的达0.45。这 29 个类星体的基底星系都探测到了，主要的结果是：核(类星体)光度同星云状物光度之比平均为0.5，约为 I 型塞佛特星系(Sy1)的 8 倍，星云的平均绝对星等 $M_B\simeq-21.5$(平均热星等 $M_b\simeq-24.6$)，弱于巨椭圆星系，与塞佛特星系大体相当；星云的形态(如强度轮廓、b/a、强度随至中心的距离的下降方式等)既异于椭圆星系，又异于旋涡星系，但类似于 Sy1 星系；大部分星云是不对称的，有些似乎有旋涡结构。总的来说，类星体的星云类似于 Sy1 星系。相比之下，类星体的核活动更为猛烈。由于大部分 Sy 星系是旋涡星系，而小部分 Sy 星系是椭圆星系，因此可以说，类星体现象既可发生在旋涡星系，也可发生在椭圆星系。大部分类星体的基底很可能类似于旋涡星系；只有小部分类星体是椭圆星系，它们是强射电源，类似于射电星系。

另一方面的研究是拍摄类星体星云的光谱。Boroson 等[6]得到了 12 个光学选取的低红移类星体的离核光谱，发现其中的10个嵌在以星光为主的星云包层里，3 个可能有 MgI λ5175 吸收线，1个可能有 H_β 吸收线。他们的研究结果表明，这些类星体的基底星系的光度比星系团最亮星系的光度暗1—2星等。Balick 和 Heckman[7] 用 KPNO 的 4 米镜探测到了 4 个小红移($0.036\leqslant Z\leqslant0.37$)类星体周围的星云状物的光谱。其中 0845＋378 是由X射线证认的第一个类星体，是这种类星体的典型。观测结果表明，光谱是星系包层所具有的恒星光谱，其红移与类星体的相同；类星体星云的大小、形态、绝对星等、光谱特征等与星系相比没有什么明显的不同，说明两者是类似的。

调 整 间 距 插 图

C9.1. 纯引力灰洞的定义

如果一个质量为 M 的球状天体的尺度半径 R 小于施瓦西半径

$$R < R_S = \frac{2GM}{c^2}, \tag{C9.1}$$

或

$$\frac{R_S}{R} = \frac{2GM}{Rc^2} > 1, \tag{C9.2}$$

则称该天体为灰洞型天体。上式中 G 为万有引力常数，c 为光速。

C9.2. 纯引力灰洞的一个经典特例

用一实例数据：一天体质量

$$M = 3\times10^{42}\text{公斤},$$

半径

$$R = 4.45\times10^{15}\text{米},$$

符合灰洞的条件

$$\frac{2GM}{Rc^2} = 1.000941141 > 1, \tag{C9.3}$$

而该天体的表面重力加速度为

$$g_2 = \frac{GM}{R^2} = 10.107876783\left(\text{米}/\text{秒}^2\right), \tag{C9.4}$$

与地球的表面重力加速度相近，应当是我们非常熟悉的经典物理环境，可用经典物理推导分析。

在这种经典物理环境，光速非常接近于真空光速。因此，一束垂直于

该天体表面的光束，会一直以垂直于该天体表面的方向前进。而引力只对光子引起引力红移，而不会对光子减速。如果**硬说**引力场中光子会减速；那么该束光子随着远离该天体，引力的减弱后，速度会越来越快。

因此说，灰洞天体的每个发光点都至少存在一个辐射的活角锥，活角锥内辐射的光子都可离开该灰洞。

C9.3. 活角锥的定义

活角锥定义：如果灰洞表面的发光点以与径向夹角小于 γ 辐射都可以离开灰洞，那么在发光点以星体半径方向为轴，以 γ 角绕径向转一圈的角锥就称为活角锥(图 C9.5)。

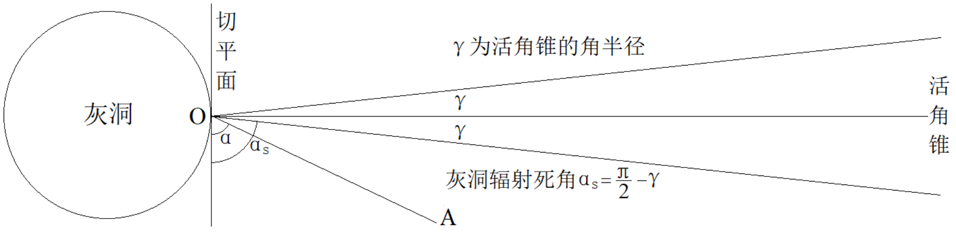


图 C9.5. 灰洞的活角锥示意图

目前，还求不出灰洞活角锥的解析表达式。只能数值求解。

辐射角定义：如(图 C9.5)辐射 OA 与灰洞切平面的夹角 α 称为辐射角。

那么，若辐射落在活角锥内应有

$$\frac{\pi}{2}-\alpha<\gamma, \tag{C9.5}$$

灰洞死角定义：把灰洞活角锥角半径 γ 的余角

$$\alpha_S<\frac{\pi}{2}-\gamma, \tag{C9.6}$$

称为灰洞的死角。

若辐射角

$$\alpha < \alpha_S, \tag{C9.7}$$

则辐射不能出**灰洞**，形象地说**灰洞**是个弱黑洞。

C9.4. 非经典灰洞的活角锥

现在把 9.2 纯引力灰洞的一个经典特例的半径从 $R = 4.45 \times 10^{15}$ 米，逐步地减少，直至减少到 $R = 4.45 \times 10^{12}$ 米，该天体的表面重力加速度变为

$$g_2 = \frac{GM}{R^2} = 1.0107876783 \times 10^7 \left(米/秒^2\right), \tag{C9.8}$$

是非经典环境了。

但在半径逐步地减少的过程中，每一步垂直于天体表面由径向发射的光，因各向同性，不会向任一方向偏转，总是至少存在一个活角锥。所以**非经典环境的灰洞仍存在活角锥**。

C10. 小结

综上撰述，因类星体引起的疑惑的主要问题，都已可得到合理的解释，所以本文所采用的理论是合理的。理论关键是以下 3 条：

1) 把类星体的红移分为二种主要成分距离红移 Zr 与引力红移 Zy，即

$$\lg(1+Zr) = \xi \lg(1+Z), \tag{C10.1}$$

$$\lg(1+Zy) = \lg(1+Z) - \lg(1+Zr), \tag{C10.2}$$

其中 ξ 为距离红移分量因子。

2) 距离计算公式为

$$r = b\lg(1+Zr), \tag{C10.3}$$

设

$$H=-\ln(1-b), \tag{C10.4}$$

该式的幂级数展开式，为

$$r=\frac{c}{H}Zr-\frac{c}{2H}Zr^2+\frac{c}{3H}Zr^3-\frac{c}{4H}Zr^4+\ldots\ldots, \tag{C10.5}$$

当 Zr 很小时，忽略高次项，保留一次项即化为哈勃定理。

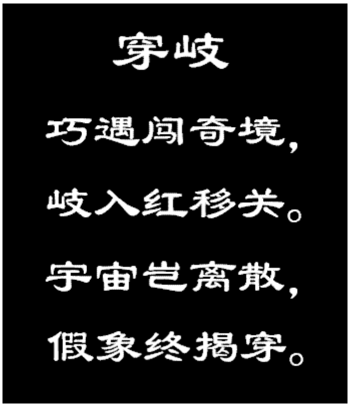
3) 引力红移计算公式为

$$z_y=-\frac{\Delta v}{v_0}=1-\exp\left(-\frac{GM}{c^2R}\right)$$

$$=\left(\frac{GM}{c^2R}\right)-\frac{1}{2!}\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^3-\frac{1}{4!}\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^4+\cdots\cdots+\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{GM}{c^2R}\right)^k+\cdots\cdots, \tag{C10.6}$$

当 $\dfrac{GM}{c^2R}$ 很小时，忽略高次项，保留一次项即化为相对论引力红移公式。

4) 作者得出上述计算式，完全如文中提到，是二次巧合，如果不是巧合作者是绝对不可能完成的。这小于百亿分之一概率的巧合落在作者身上，作者觉得公布这些理论与数据验证结果是作者的人生责任。因此作者曾感触作诗：



C11. 有待进一步解决的问题

C11.1. 类星体表面温度计算公式的改进

类星体表面温度计算公式(C3.6)虽然比式(B1.1)更精确了，但从(图 C4.2)看仍存在误差。因此，还得有待从理论推导或统计分析，求得更精确的计算式。

C11.2. 类星体质光比特性的确定

C11.2.1. 类星体质光比 2 阶逼近式

类星体质光比的变化关系计算式，目前还未知。作者猜想类星体质光比的变化应是与表面温度 T 及引力红移(1+Zy)相关的函数。先假设近似可用 2 阶函数逼近它，则类星体质光比

$$\mu = k_1 T + k_2 T^2 + k_3 T\left(1+Zy\right) + k_4\left(1+Zy\right)^2 + k_5\left(1+Zy\right) + k_6, \tag{C11.1}$$

其中 k_1，k_2，k_3，k_4，k_5，k_6 为待定系数。

若对某些光变类星体有多年的光变跟踪观测，可取已经得到有明显光变的 4 个时点参数值。因人类观测的时段相对于类星体的寿命几乎为 0，所以可近似认定在各时点类星体的质量未变，类星体的距离未变，仅光度与质光比变了。

那么，得到 4 个时点的已知量为 Z_n，B_n，V_n，再 T_n 为由式(C3.7)确定，m_{bolgn} 为由式(B1.11)确定，$n = 1$，2，3，4。

求解的 32 个未知量为 M，r，k_m，μ_n，ξ_n，Zy_n，M_{bolgn}，L_n，R_n，其中 $m = 1$，2，3，4，5，6；$n = 1$，2，3，4。

可建立由 32 条方程构成的方程组：

$$k_1T_n+k_2T_n^{\ 2}+k_3T_n\left(1+Zy_n\right)+k_4\left(1+Zy_n\right)^2+k_5\left(1+Zy_n\right)+k_6+\mu_n=0, \tag{C11.2}$$

$$\frac{1}{1+b_2\mu_n\exp\left[\ln 10\left(2\lg T_n-0.2m_{bolgn}\right)\right]}-\xi_n=0, \tag{C11.3}$$

$$b_1\xi_n\lg\left(1+Z_n\right)-r=0, \tag{C11.4}$$

$$m_{bolgn}+5-5\lg\frac{r}{r_1}-M_{bolgn}=0, \tag{C11.5}$$

$$42.36-10\lg T_n-5\lg R_n-M_{bolgn}=0, \tag{C11.6}$$

$$\exp\left[-0.4\ln 10\left(M_{bolgn}-M_{bol\odot}\right)\right]-L_n=0, \tag{C11.7}$$

$$\frac{M}{L_n}-\mu_n=0, \tag{C11.8}$$

$$\exp\frac{GM_\odot M}{c^2R_\odot R_n}-\left(1+Zy_n\right)=0. \tag{C11.9}$$

C11.2.2. 用于求解待定系数的数据

为确定待定系数 k_1，k_2，k_3，k_4，k_5，k_6，需找到有多时点观测的光变类星体数据。作者找到费米耀星的 SMARTS 光学/红外观测(SMARTS Optical/IR Observations of Fermi Blazars)数据[5]，该团队坚持十多年对光变类星体的跟踪观测，各个光变类星体都有数百个时点的观测数据，但遗憾的是数据仅有观测时点的 5 个波段 BVRJK 的光变星等值，没有提供类星体的红移量值。因此，用于对式(C11.2)至(C11.9)方程组的计算仍缺乏红移量数据。

但作者另又找到了有二个观测时点观测数据的 15 个光变类星体数据(表 11.1)，来源于用早期观测类星体的坐标值，在 SDSS DR7 中查找坐标相近的类星体，若角距小于 1″则判定为同一个类星体的不同时点数据。

在(表 11.1)中任取 4 个有 2 时点的类星体数据，可组成 1 组用于方程组

求解的原始数据，可有 1365 种不同的组合取法，构成 1365 组原始数据。只要其中有若干组能求得实数解，并这些解向量相近，不存在很大的偏差，可取这些解的平均值作为应用值。

表 11.1. 有 2 个观测时点观测数据的光变类星体

NAME/ID	PKS/SDSS J	z	V	V0	B-V	Av	RA (2000)	Dec	角距(″)
3C280.1	1258 + 40	1.65900	19.4400	19.3964	−0.1300	0.0436	195.13877	40.15214	0.01109
588017979433287750	130033.30 + 400907.6	1.67254	18.7936	18.7500	0.2236	0.0436	195.13877	40.15214	
3C275.1	1241 + 16	0.55700	19.0000	19.0000	0.2300		190.99021	16.38154	0.18973
587742901790048320	124357.65 + 162253.3	0.55512	18.1645	18.0905	0.0588	0.0740	190.99023	16.38149	
4C21.35	1222 + 21	0.43500	17.5000	17.4382	0.0600	0.0618	186.22691	21.37955	0.02984
587742059999723572	122454.46 + 212246.3	0.43351	15.9838	15.9220	−0.0054	0.0618	186.22692	21.37955	
3C270.1	1218 + 33	1.51900	18.6100	18.6100	0.1900		185.14115	33.72001	0.10987
587739507154354000	122033.86 + 334312.0	1.53268	18.6040	18.5710	0.5168	0.0330	185.14112	33.72001	
4C02.27	0932 + 02	0.65900	17.3900	16.7200	0.1300	0.6700	143.82581	2.07098	0.00990
587726032769581196	093518.19 + 020415.5	0.64910	16.9984	16.8851	0.1504	0.1133	143.82581	2.07098	
3C261	1132 + 30	0.61400	18.2400	18.2400	0.2400		173.72704	30.09064	0.04307
587741490910855193	113454.49 + 300526.3	0.61328	18.4999	18.4294	0.2786	0.0705	173.72705	30.09065	
3C208	0850 + 14	1.11000	17.4200	16.5900	0.3400	0.8300	133.28587	13.88194	0.14599
587742013262200933	085308.60 + 135254.8	1.11145	17.8753	17.7851	0.4984	0.0902	133.28586	13.88190	
3C288.1	1340 + 60	0.96100	18.1200	18.1200	0.3900		205.55531	60.36190	0.14552
588011230044253765	134213.26 + 602142.9	0.96408	17.6294	17.5798	0.3610	0.0496	205.55528	60.36193	
3C336	1622 + 23	0.92700	17.4700	16.9800	0.4400	0.4900	246.16286	23.75339	0.00749
587736619327553767	162439.08 + 234512.1	0.92742	18.2477	18.0556	0.4618	0.1921	246.16286	23.75339	
3C207	0838 + 13	0.68400	18.1500	17.1600	0.4300	0.9900	130.19828	13.20655	0.04555
587742061049872602	084047.58 + 131223.5	0.68037	18.3558	18.0960	0.4160	0.2598	130.19829	13.20654	

表 11.1 续

NAME/ID	PKS/SDSS J	z	V	V0	B-V	Av	RA (2000)	Dec	角距 (″)
PSK0922 + 14	0922 + 14	0.89600	17.9600	17.4100	0.5400	0.5500	141.28030	14.74048	0.04044
587745244161179654	092507.27 + 144425.6	0.89535	18.0694	17.9916	0.3610	0.0778	141.28029	14.74047	
3C323.1		0.26400	16.6900	16.3800	0.1100	0.3100	236.93141	20.87128	0.03875
587739814241632355	154743.53 + 205216.6	0.26461	15.5372	15.4235	0.1687	0.1137	236.93141	20.87129	
3C351		0.37100	15.2800	14.6000	0.1300	0.6800	256.17240	60.74181	0.09378
587725503946227775	170441.38 + 604430.5	0.37156	15.3150	15.2171	0.3519	0.0979	256.17243	60.74181	
3C232	0985 + 32	0.53300	15.7800	15.7800	0.6200		149.58729	32.40061	0.07921
587739158191145041	095820.94 + 322402.2	0.53055	15.9948	15.9551	0.2053	0.0397	149.58727	32.40062	
3C215	0903 + 16	0.41100	18.2700	17.6000	0.2100	0.6700	136.6328	16.76996	0.00000
588023239133429794	090631.87 + 164611.8	0.00323	17.8684	17.7636	0.1504	0.1048	136.6328	16.76996	

C11.2.3. 用 2 时点数据的类星体方程组

为使用 2 时点类星体数据须，对式(C11.2)至(C11.9)方程组进行改进。类星体质光比增加一个与 R 相关的项，改为

$$k_1T_n + k_2T_n^{\ 2} + k_3T_n\left(1+Zy_n\right) + k_4\left(1+Zy_n\right)^2 + k_5\left(1+Zy_n\right) + k_6 + k_7R_n^{\ 2} + \mu_n = 0, \tag{C11.10}$$

其中 k_1，k_2，k_3，k_4，k_5，k_6，k_7 为待定系数。

取 4 个有 2 时点的类星体数据，已知量为 Z_{nj}，B_{nj}，V_{nj}，再 T_{nj} 为由式(C3.7)确定，m_{bolgnj} 为由式(B1.11)确定，$n = 1$，2，3，4；$j = 1$，2。

求解的 64 个未知量为 b_1，M_n，r_n，k_m，μ_{nj}，ξ_{nj}，Zy_{nj}，M_{bolgnj}，L_{nj}，R_{nj}，其中 $m = 1$，2，3，4，5，6，7；$n = 1$，2，3，4； $j = 1$，2。

其中增加求解 b_1，是考虑到目前星系红移(图 C2.1)都未扣除引力红移，难于以星系红移统计求解 b_1 值，因此考虑在类星体方程组中直接求解 b_1 值。

而且此法若成功，那么**类星体可成为量天尺**来确定与其成协的星系的距离红移，扣除距离红移，可定出成协星系的引力红移。

可建立由 64 条方程构成的方程组为：

$$k_1T_{nj}+k_2T_{nj}^{\ 2}+k_3T_{nj}\left(1+Zy_{nj}\right)+k_4\left(1+Zy_{nj}\right)^2+k_5\left(1+Zy_{nj}\right)+k_6+k_7R_{nj}^{\ 2}+\mu_{nj}=0, \tag{C11.11}$$

$$\frac{1}{1+b_2\mu_{nj}\exp\left[\ln 10\left(2\lg T_{nj}-0.2m_{bolgnj}\right)\right]}-\xi_{nj}=0, \tag{C11.12}$$

$$B_1\xi_{nj}\ln\left(1+Z_{nj}\right)-r_n=0, \tag{C11.13}$$

其中

$$B_1=\frac{b_1}{\ln(10)}, \tag{C11.13b}$$

$$m_{bolgnj}+5-5\lg\frac{r_n}{r_1}-M_{bolgnj}=0, \tag{C11.14}$$

$$42.36-10\lg T_{nj}-5\lg R_{nj}-M_{bolgnj}=0, \tag{C11.15}$$

$$\exp\left[-0.4\ln 10\left(M_{bolgnj}-M_{bol\odot}\right)\right]-L_{nj}=0, \tag{C11.16}$$

$$\frac{M_n}{L_{nj}}-\mu_{nj}=0, \tag{C11.17}$$

$$\exp\frac{GM_\odot M_n}{c^2R_\odot R_{nj}}-\left(1+Zy_{nj}\right)=0. \tag{C11.18}$$

作者从(表 11.1)中选 12 组数据(每组各取 4 个有 2 时点观测数据的类星体数据)，用牛顿下降法求解上述式(C11.11)至(C11.18)方程组，在微机上运行试求解。各进程的下降速率各不相同，其中有 1 组数据第 200 万次迭代后就不再下降了；有 1 组数据第 100 万次迭代后就不再下降了；有 10 组数据的进程经数亿次迭代下降速率相互追逐，由每 10 万次迭代的取样数据分析，下降速率基本呈线性，由下降速率推测，若解存在也要若干年后才有

可能下降到零点。作者未得到求解结果，在此仅是把这个思路公布给有超算能力的部门参考。

表 11.2. SDSS DR7 的疑似微类星体

序号	ID	SDSSJ	RA(2000)	Dec	r(pc)
1	92382	160451.88 + 065456.1	241.2162	6.91559	5.83016E−31
2	65927	131159.90 + 134030.2	197.9996	13.67507	6.47339E−11
3	30012	094210.96 + 564606.6	145.5457	56.76852	6.34006E−06
4	34282	100404.99 + 111110.6	151.0208	11.18628	2.17748E−05
5	69227	133317.42 + 641718.1	203.3226	64.28838	0.024533138
6	21551	085830.53 + 055606.0	134.6272	5.935007	0.087325804
7	60700	124026.61−074939.6	190.1109	−7.827679	11.07523353
8	38753	103020.55 + 334558.3	157.5857	33.7662	18.64772983
9	104776	233426.56 + 011554.4	353.6107	1.265137	570.6533204
10	3630	012845.44 + 011620.8	22.18934	1.272462	712.2195595
11	69365	133406.56 + 032742.9	203.5274	3.461924	796.116262
12	103878	230728.90−011608.8	346.8704	−1.269119	872.4171248
13	102365	221813.12−001100.4	334.5547	−0.183445	899.9682236
14	63138	125425.52 + 554918.8	193.6064	55.82191	1085.210939
15	8033	031314.29−010402.4	48.30958	−1.067336	1100.980341
16	2581	010401.04 + 011523.4	16.00434	1.256512	1143.706328
17	41926	104804.51 + 095843.8	162.0188	9.978854	1192.223928
18	2746	010900.46−101534.8	17.25194	−10.25968	1251.604536
19	93039	160930.56 + 241955.2	242.3773	24.33202	1340.733661
20	92548	160607.95 + 240828.9	241.5332	24.14136	1342.387808
21	104360	232310.06 + 011558.7	350.7919	1.26632	1427.637063
22	101768	220113.90 + 003334.1	330.3079	0.559492	1507.422575
23	103582	225753.25 + 011600.1	344.4719	1.266711	1593.569082
24	103254	224614.67 + 011606.3	341.5611	1.268434	1624.084352
25	102561	222416.50−011556.4	336.0688	−1.265683	1642.988341
26	102896	223437.82 + 003133.5	338.6576	0.525997	1688.755986
27	41848	104736.94 + 090025.8	161.9039	9.007174	1809.871015
28	6712	023904.73 + 002035.8	39.76975	0.343282	1920.579912
29	101399	214901.20−073141.7	327.255	−7.528253	9159.493896
30	5308	020547.33−010701.5	31.44723	−1.117094	15080.45527

C11.3. SDSS DR7 中的微类星体

微类星体由于大部分位银河系内，距离红移相对于引力红移非常微小，距离红移分量因子很难求解得精确值，从而无法精确确定距离。虽然无法计算得精确距离，但却可把得出超小距离的类星体分类为微类星体(表 11.2)。至于，精确的距离要用三角视差法再求出，然后再计算出其它参数值。

希望有观测能力的有关部门能观测一下这些类星体的三角视差。

C11.4. 脉冲星光谱线认证中的引力红移修正

设有一颗 1.5 倍太阳质量、半径 10 公里、大气层厚 10 厘米的脉冲星，那么按相对论其引力红移为

$$z_y=-\frac{\Delta v}{v_0}=\frac{GM}{c^2R}=\frac{6.672\times10^{-11}\times1.5\times1.989\times10^{30}}{\left(2.99792458\times10^8\right)^2\times10^4}=0.221483141,\quad \text{(C11.19)}$$

而按微积开引力红移公式，则引力红移为

$$z_y=-\frac{\Delta v}{v_0}=1-\exp\left(-\frac{GM}{c^2R}\right)=1-\mathrm{e}^{-0.221483141}=0.1986705684,\quad \text{(C11.20)}$$

再用式(C11.19)与式(C11.20)的差分式近似计算：

按相对论其大气层顶层与底层引力红移差为

$$\begin{aligned}\Delta z_y&=-\frac{GM}{c^2R^2}\Delta R\\&=-\frac{6.672\times10^{-11}\times1.5\times1.989\times10^{30}}{\left(2.99792458\times10^8\right)^2\times\left(10^4\right)^2}\times0.1\\&=-2.21483141103\times10^{-6},\end{aligned}\quad \text{(C11.21)}$$

而按微积开引力红移公式，则其大气层顶层与底层引力红移差为

$$
\begin{aligned}
\Delta z_y &= -\frac{GM}{c^2R^2}\exp\left(-\frac{GM}{c^2R}\right)\Delta R \\
&= -\frac{6.672\times10^{-11}\times1.5\times1.989\times10^{30}}{\left(2.99792458\times10^{8}\right)^2\times\left(10^4\right)^2}\times\exp\left(-\frac{6.672\times10^{-11}\times1.5\times1.989\times10^{30}}{\left(2.99792458\times10^{8}\right)^2\times10^4}\right)\times0.1 \\
&= -1.7748095951\times10^{-6},
\end{aligned}
\tag{C11.22}
$$

式(C11.19)与式(C11.20)比较，二者有 10%以上的偏差，式(C11.20)与式(C11.21)比较，二者有近 20%的偏差。在脉冲星光谱线认证的引力红移修正中，应采用正确的引力红移公式，才能得出正确的光谱线认证。只有光谱线得到认证，才能确定脉冲星的光谱红移值，才可以对脉冲星作出更精细的研究。希望脉冲星研究工作者能作出判断。

C11.5. 类星体光谱线认证中的引力红移修正

类星体光谱中有非常多的吸收线，它们的红移往往与主光谱红移不同。有人认为是星际介质吸收产生，问题是星际介质能产生那么多的吸收线吗？应当是只有极少的一部分是星际介质吸收产生的。它们中的绝大部份是类星体本身不同高度层介质吸收产生的，不同高度产生了不同的引力红移(图 C11.1)。用引力红移修正去认证这些光谱线，这也是检验哪个引力红移理论更正确的检验方法。

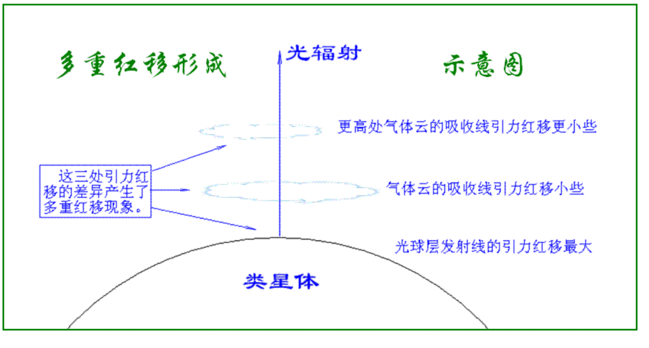


图 C11.1. 类星体多重红移吸收线的成因示意图

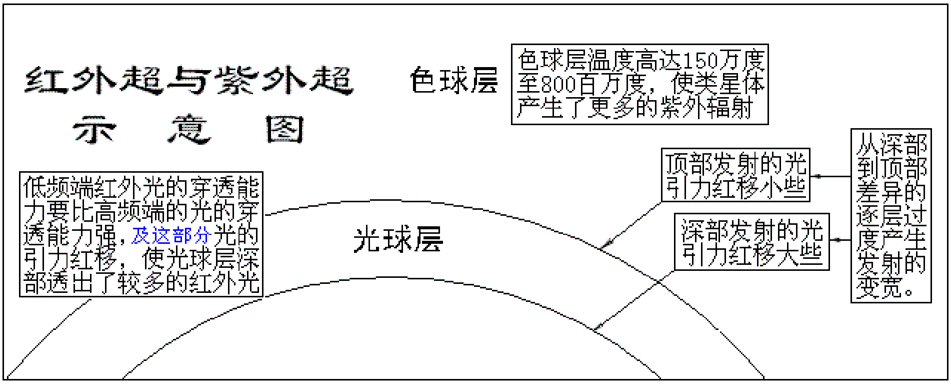
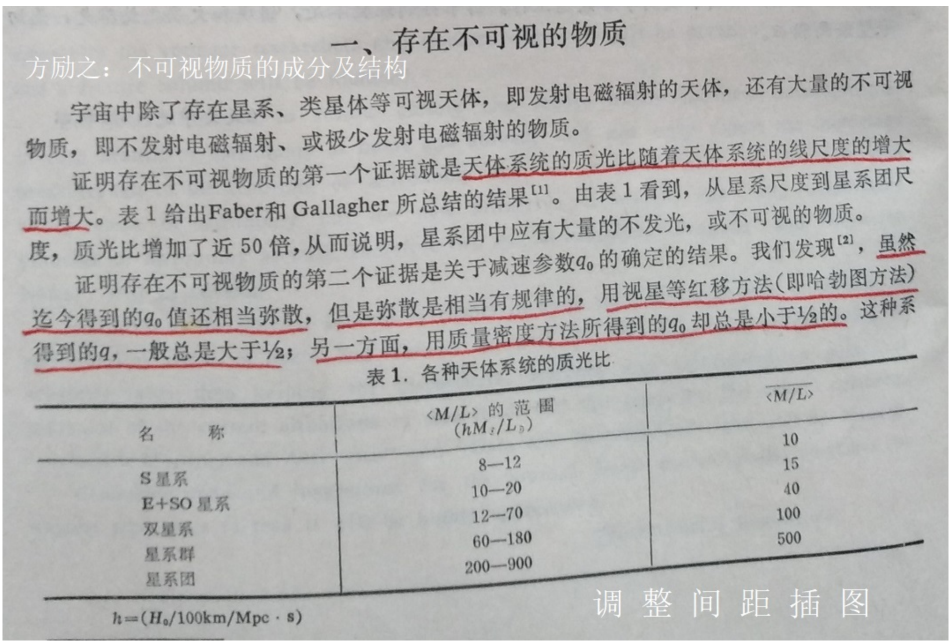


图 C11.2. 类星体光球层色球层示意图

类星体光谱宽发射线，有人认为速度弥散引起，是否合理？作者认为主要是类星体光球层底层至顶层间不同高度引力红移差异引起的(图 C11.2)。用发射线的宽度来分析光球层的厚度，这也是检验哪个引力红移理论更正确的检验方法。



一、存在不可视的物质

方励之：不可视物质的成分及结构

宇宙中除了存在星系、类星体等可视天体，即发射电磁辐射的天体，还有大量的不可视物质，即不发射电磁辐射、或极少发射电磁辐射的物质。

证明存在不可视物质的第一个证据就是天体系统的质光比随着天体系统的线尺度的增大而增大。表 1 给出Faber和 Gallagher 所总结的结果[1]。由表 1 看到，从星系尺度到星系团尺度，质光比增加了近 50 倍，从而说明，星系团中应有大量的不发光，或不可视的物质。

证明存在不可视物质的第二个证据是关于减速参数q_0的确定的结果。我们发现[2]，虽然迄今得到的q_0值还相当弥散，但是弥散是相当有规律的，用视星等红移方法(即哈勃图方法)得到的q_0一般总是大于½；另一方面，用质量密度方法所得到的q_0却总是小于½的。这种系

表 1. 各种天体系统的质光比

名　　称	⟨M/L⟩ 的 范 围 ($hM_\odot/L_\odot$)	$\overline{\langle M/L\rangle}$
S 星系	8—12	10
E+SO 星系	10—20	15
双星系	12—70	40
星系群	60—180	100
星系团	200—900	500

$h=(H_0/100\mathrm{km/Mpc\cdot s})$

调 整 间 距 插 图

参考文献：

[1] 星系 NED-D8.1.0(1 万多有红移数据星系). http://ned.ipac.caltech.edu/Library/Distances/NED23.7.1-D-8.1.0-20130731.csv

[2] 类星体 SDSS DR7 (10 多万类星体). http://das.sdss.org/va/qsocat/dr7qso.dat

[3] Chongshan Zhao & Heidi Jo Newberg, Transformation From SDSS Photometric Systemto Johnson-Morgan-Cousins，arXiv:astro-ph/0612034v11Dec2006.

[4] [美]埃德温·哈勃著，伍任译，河外星云的距离和视向速度之间的关系，自然辨证法杂志，1975 年第 4 期，第 155 页。

[5] SMARTS Optical/IR Observations of Fermi Blazars http://www.astro.yale.edu/smarts/glast/tables/3C273.tab

[6] 胡宜宁与巩岩，星模拟器星光颜色模拟的初步研究，光电工程，2010 年 2 月第 37 卷第 2 期，第 65 页。

[7] SDSSDE7 光谱数据. http://skyserver.sdss.org/dr7/en/tools/quicklook/setEq.asp?ra=1&dec=1

[8] Christian Wolf 等, Discovery of the most ultra-luminous QSO using Gaia, SkyMapper and WISE. https://arxiv.org/pdf/1805.04317.pdf

[9] Onken Christopher A 等，Thirty-Four Billion Solar Mass Black Hole in SMSS J2157-3602, the Most Luminous Known Quasar. https://arxiv.org/pdf/2005.06868.pdf

附录D　SDSS DR7各族的其它合成光谱

说明：SDSS DR7 各族原始的每个类星体光谱数据来源为 http://skyserver.sdss.org/dr7/en/tools/quicklook/setEq.asp?ra=1&dec=1

读者想了解各个类星体光谱数据，可通过上述链接下载，或观看光谱波形。下面再作些其它光谱合成图分析(图 D1-图 D29)，因有些族的数据缺乏，因此不能作较系统的分析。

D1. a 区各族谱线 Lyα 峰基准合成光谱

为排除因各类星体距离不同、光度不同的差异。以每个类星体光谱中的谱线 Lyα 峰为基准 1 来定其它谱线的幅度（图 D1-图 D9)。

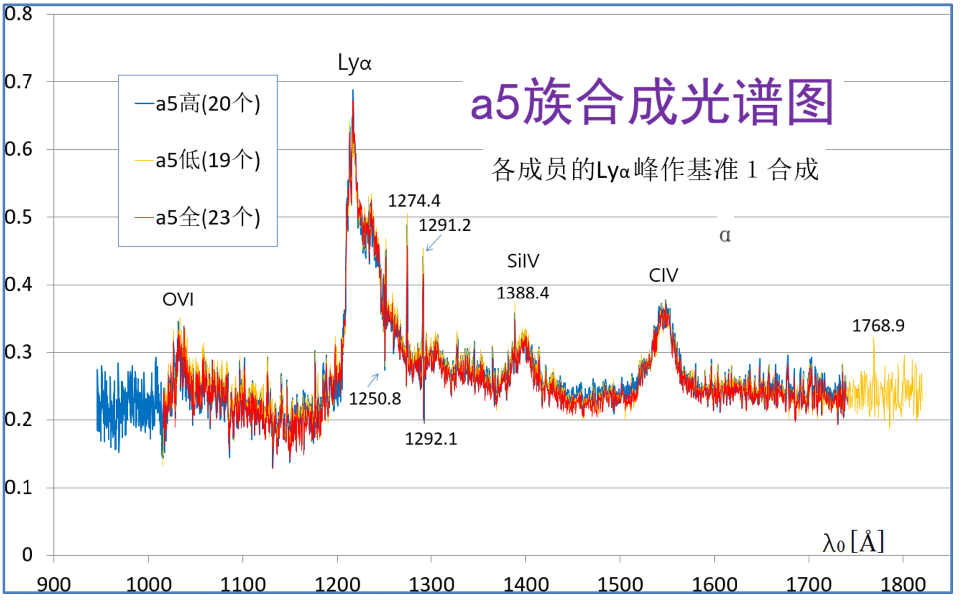


图 D1. a5 族(Ly_{α} 峰基准)合成光谱

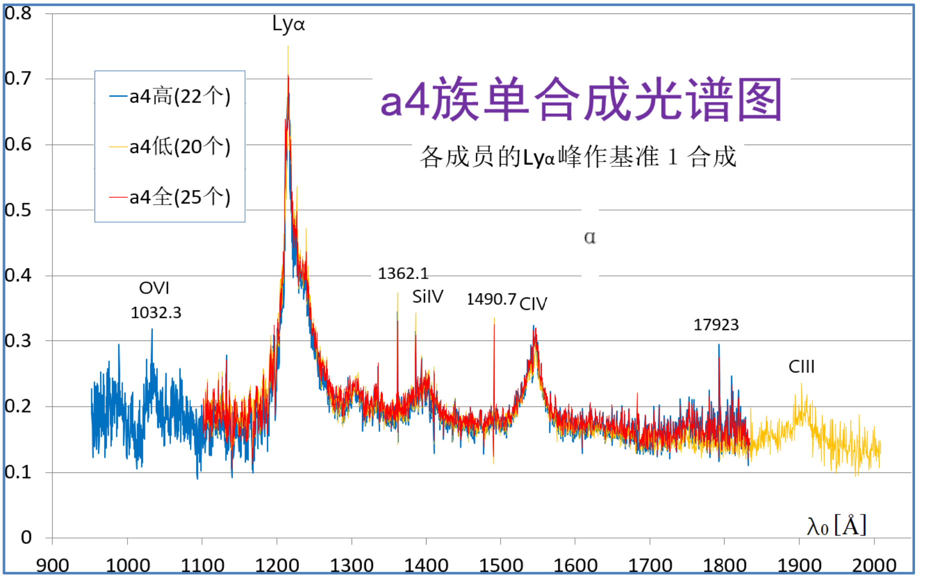


图 D2. a4 族单(Ly_α 峰基准)合成光谱

说明：为了解 a4 族合成光谱有无其个性，把 a4 族 25 个样品引力红移排序分为 13 个单号成员与 12 个双号成员分别作合成光谱，以了解他们有无共性。

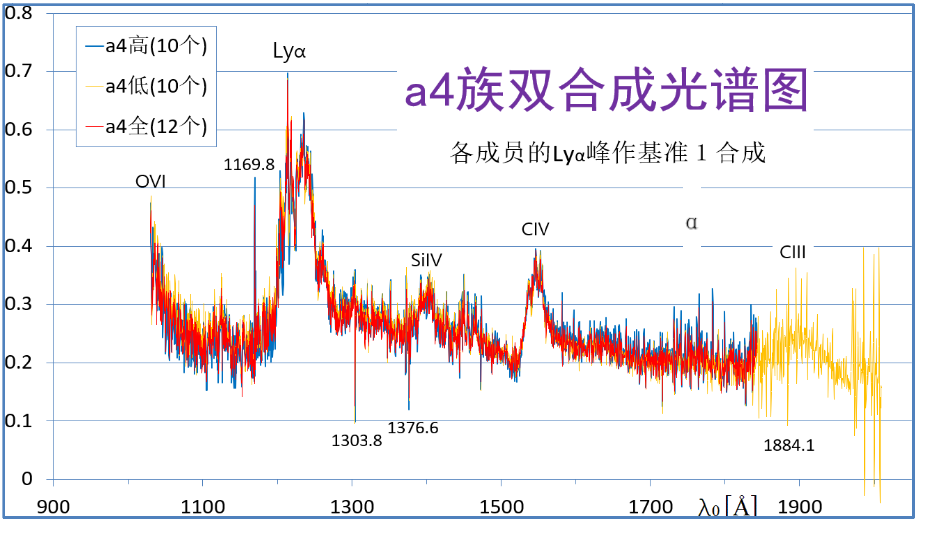


图 D3. a4 族双(Ly_α 峰基准)合成光谱

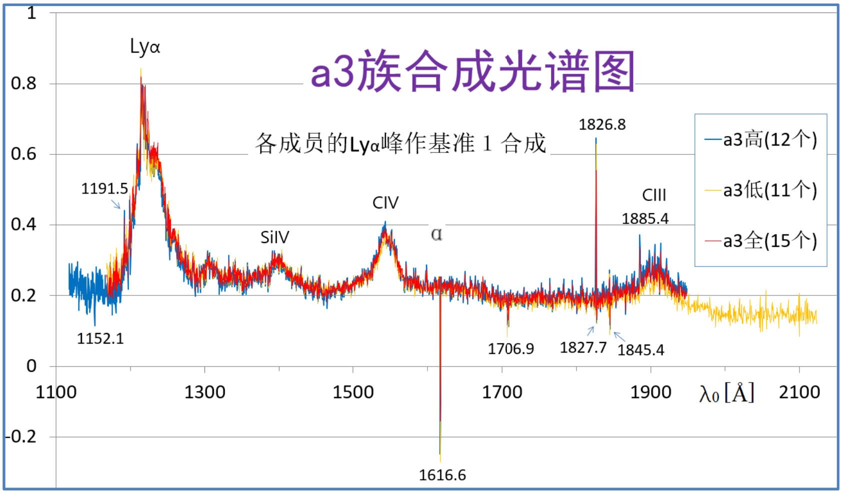


图 D4. a3 族(Ly_α 峰基准)合成光谱

说明：各类星体以谱线 Lyα 峰为基准 1，但合成光谱中谱线 Lyα 峰却不是 1，这是因为各类星体的谱线 Lyα 的峰值波长略有差异，未能叠加在一起。叠加后谱线 Lyα 峰的幅度越接近 1，说明各类星体谱线 Lyα 的峰值波长偏差越小。

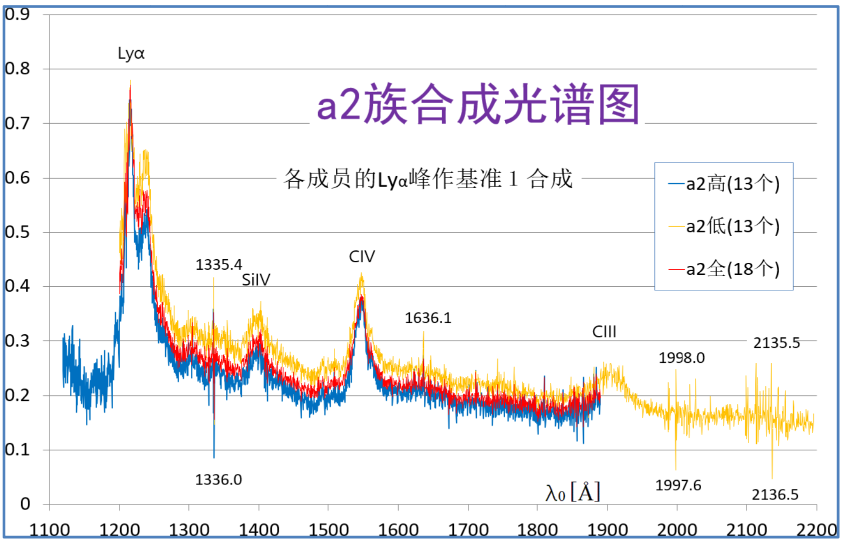


图 D5. a2 族(Ly_α 峰基准)合成光谱 1

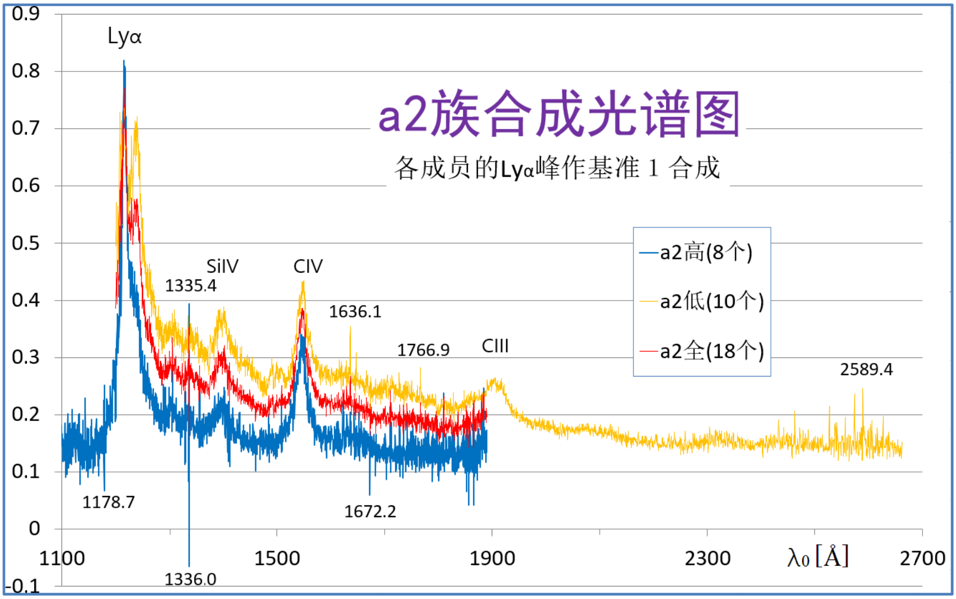


图 D6. a2 族(Ly_{α}峰基准)合成光谱 2

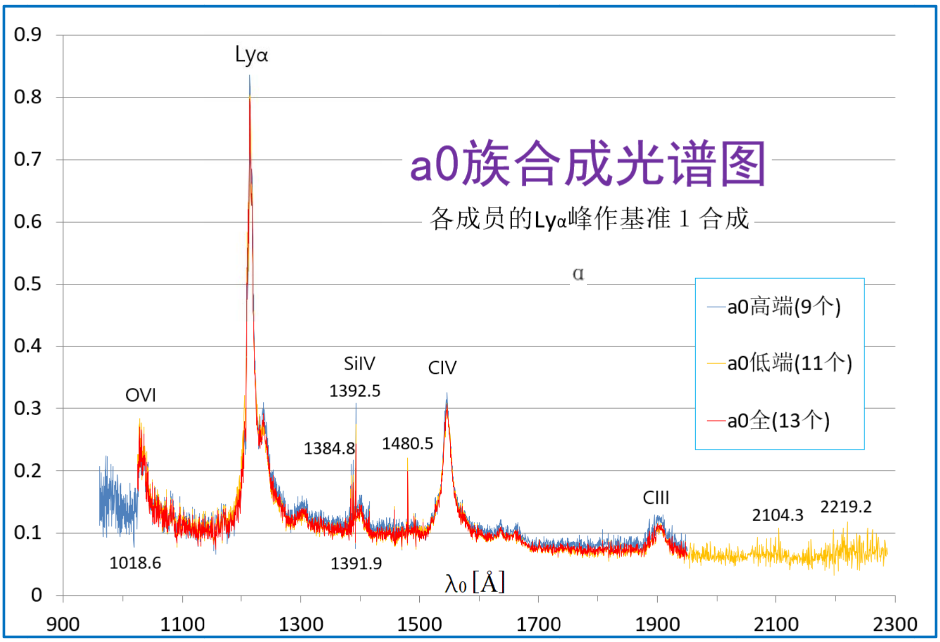


图 D7. a0 族(Ly_{α}峰基准)合成光谱

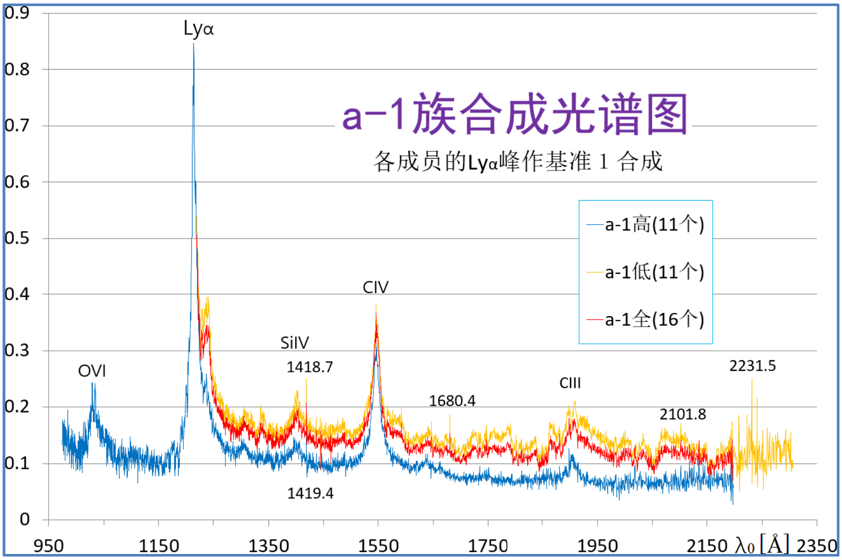


图 D8. a-1 族(Ly_α 峰基准)合成光谱

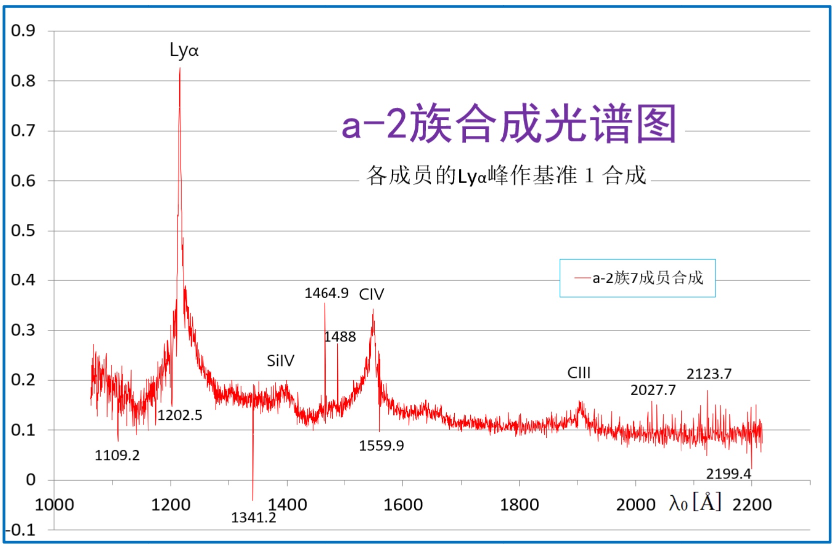


图 D9. a-2 族(Ly_α 峰基准)合成光谱

D2. a 区 a1 族谱线 CIV 峰基准合成光谱

以类星体光谱中的谱线 CIV 峰为基准 1 来定其它谱线的幅度(图 D10)。

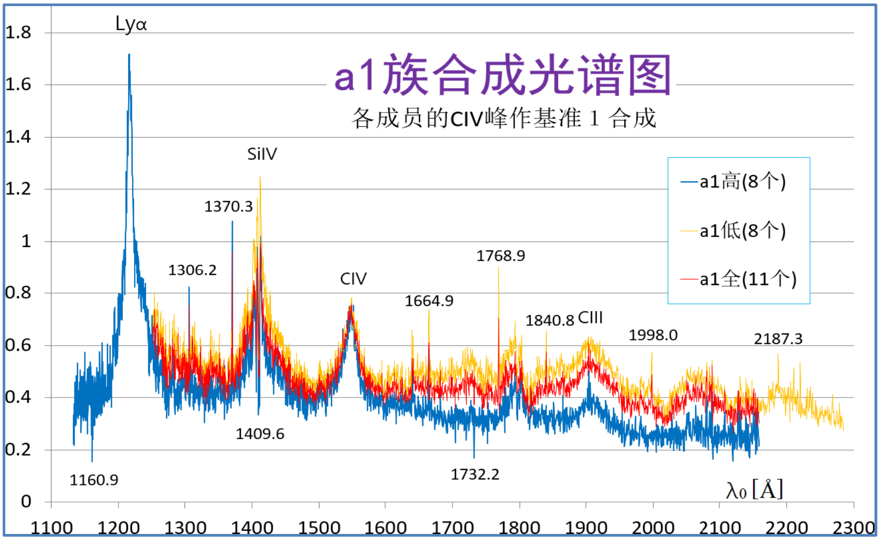


图 D10. a1 族(CIV 峰基准)合成光谱

D3. a 区 a1 族谱线 SiIV 基准合成光谱

以类星体光谱中的谱线 **SiIV** 峰为基准 1 来定其它谱线的幅度(图 D11)。

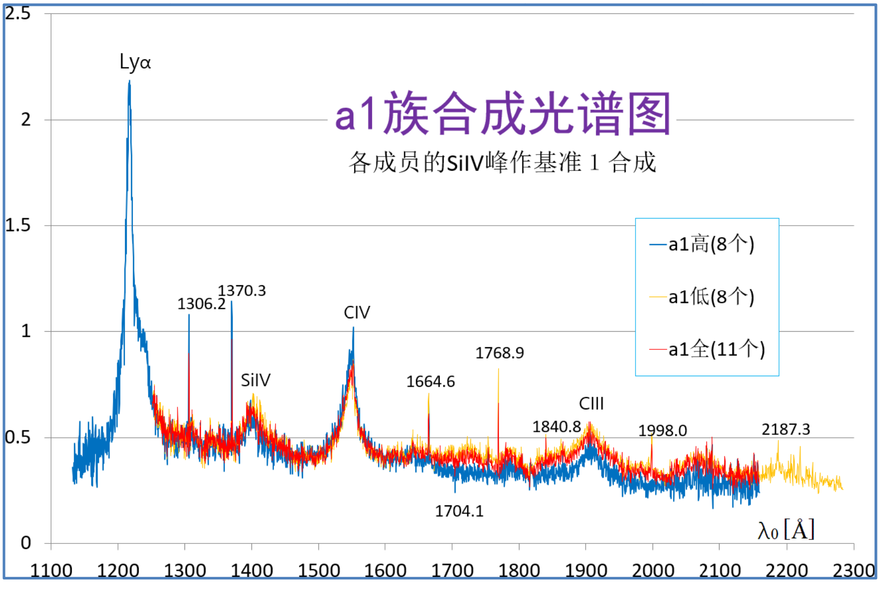


图 D11. a1 族(SiIV 峰基准)合成光谱

D4. b 区北岸各族谱线 MgII 基准合成光谱

为排除因各类星体距离不同、光度不同的差异。以每个类星体光谱中的谱线 MgII 峰为基准 1 来定其它谱线的幅度(图 D12-图 D20)。

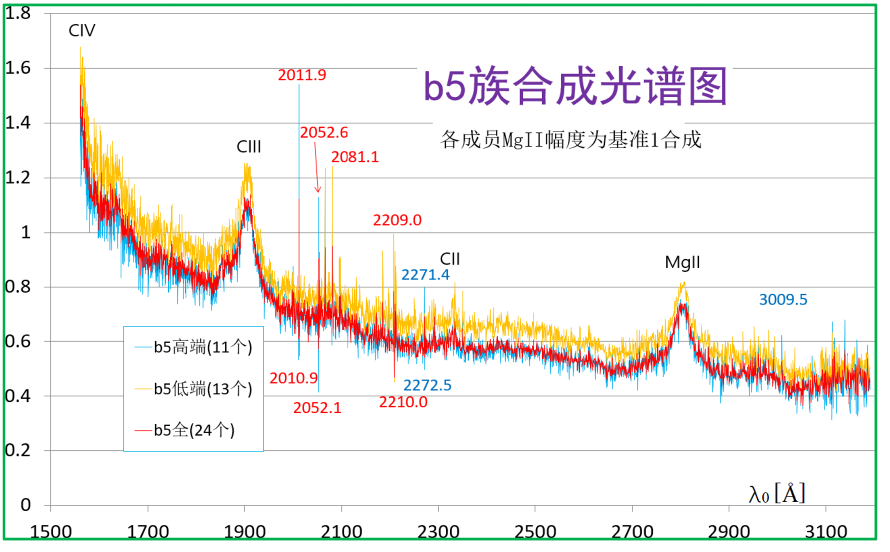


图 D12. b5 族(MgII 峰基准)合成光谱

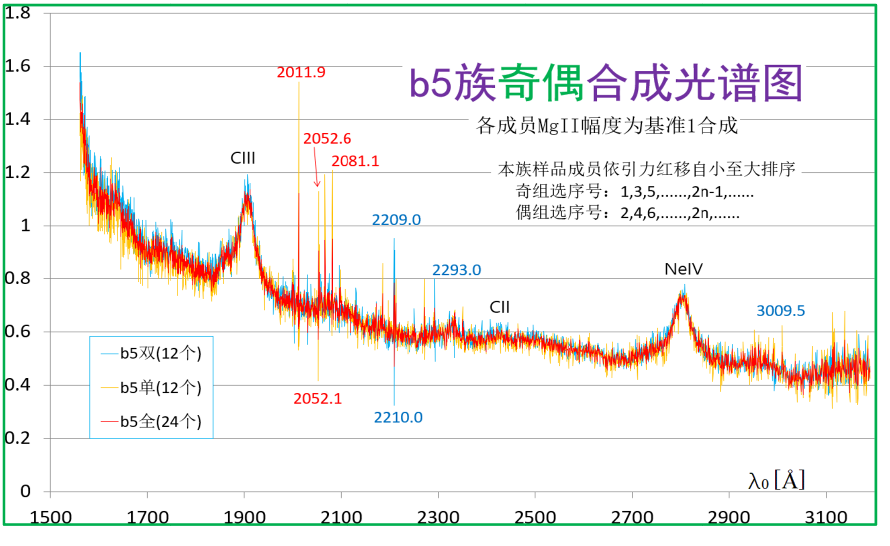


图 D13. b5 族(MgII 峰基准)奇偶合成光谱

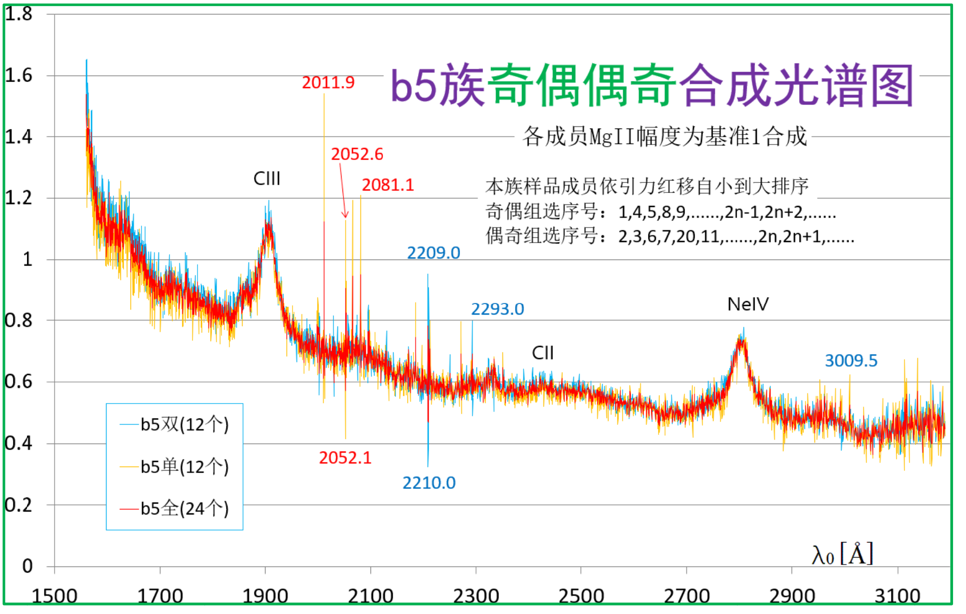


图 D14. b5 族(MgII 峰基准)奇偶偶奇合成光谱

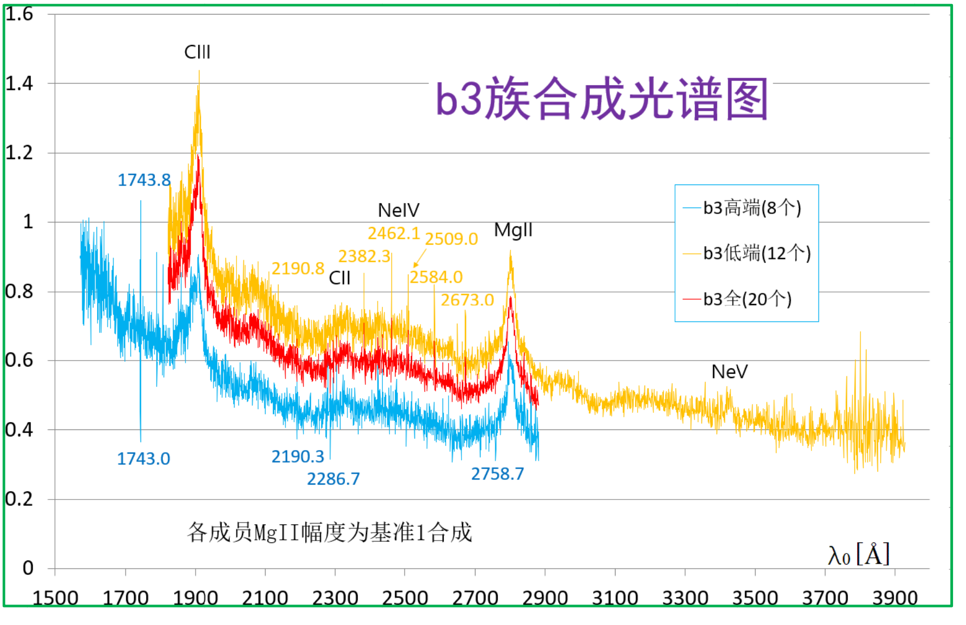


图 D15. b3 族(MgII 峰基准)合成光谱

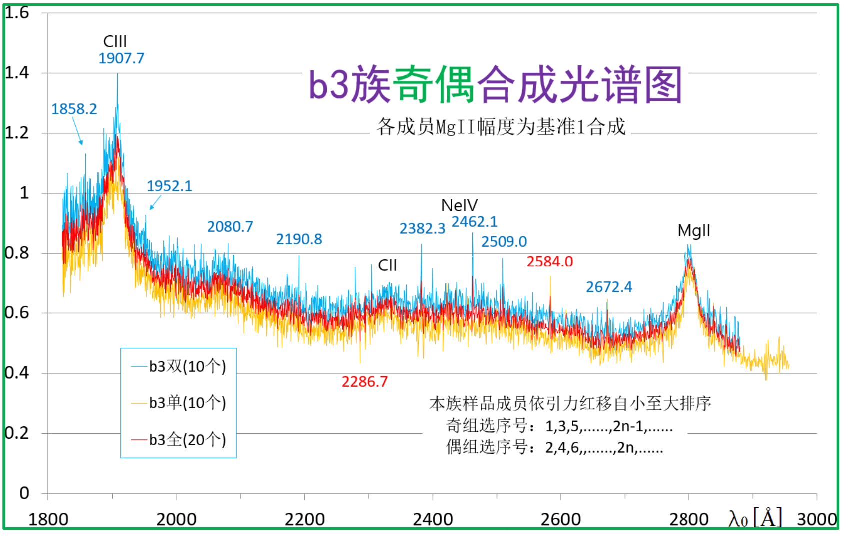


图 D16. b3 族(MgII 峰基准)奇偶合成光谱

说明：各类星体以谱线 MgII 峰为基准 1，但合成光谱中谱线 MgII 峰却不是 1，这是因为各类星体的谱线 MgII 的峰值波长略有差异，未能叠加在一起。叠加后谱线 MgII 峰的幅度越接近 1 说明各类星体谱线 MgII 的峰值波长偏差越小。

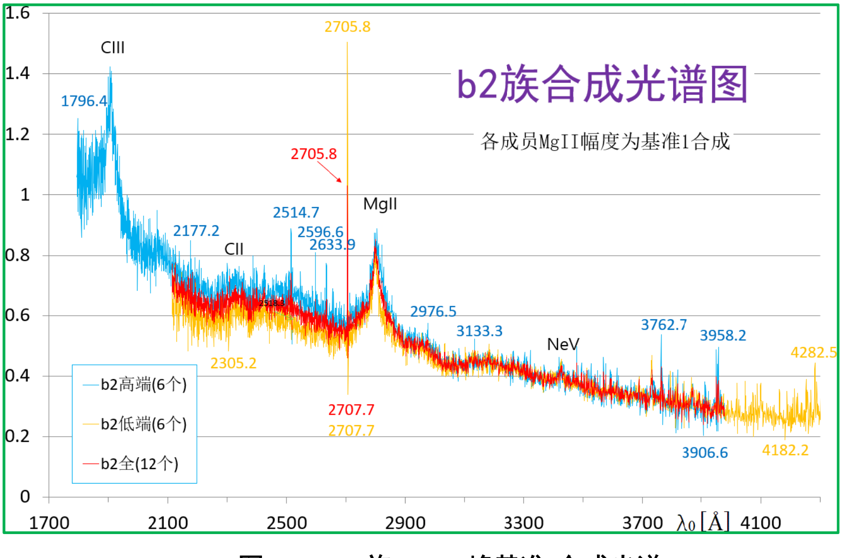


图 D17. b2 族(MgII 峰基准)合成光谱

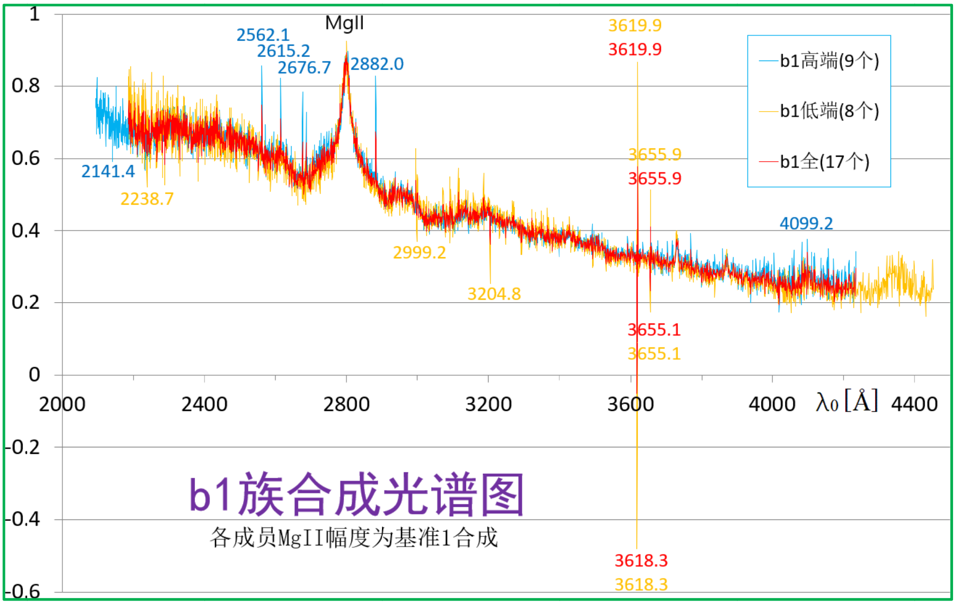


图 D18. b1 族(MgII 峰基准)合成光谱

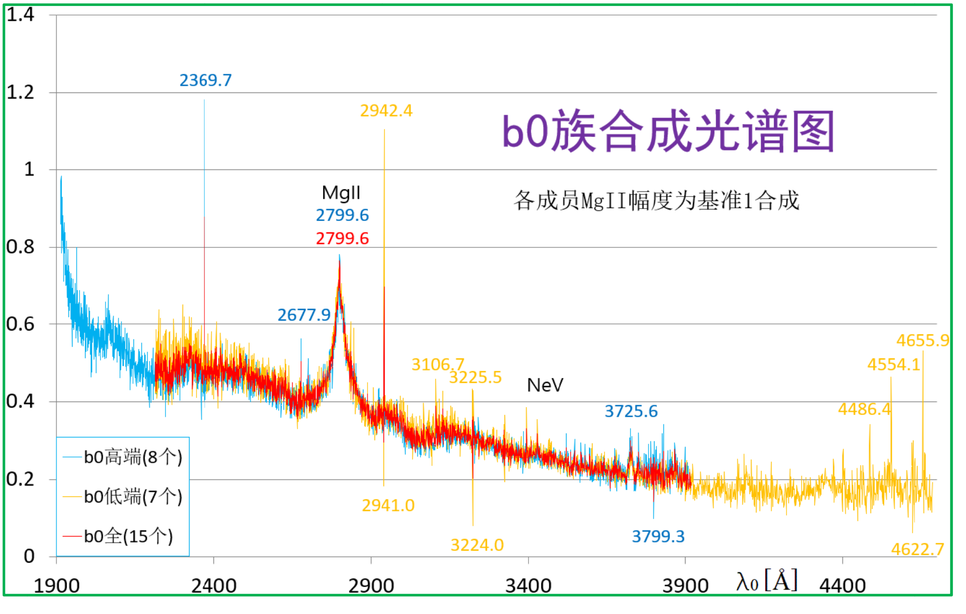


图 D19. b0 族(MgII 峰基准)合成光谱

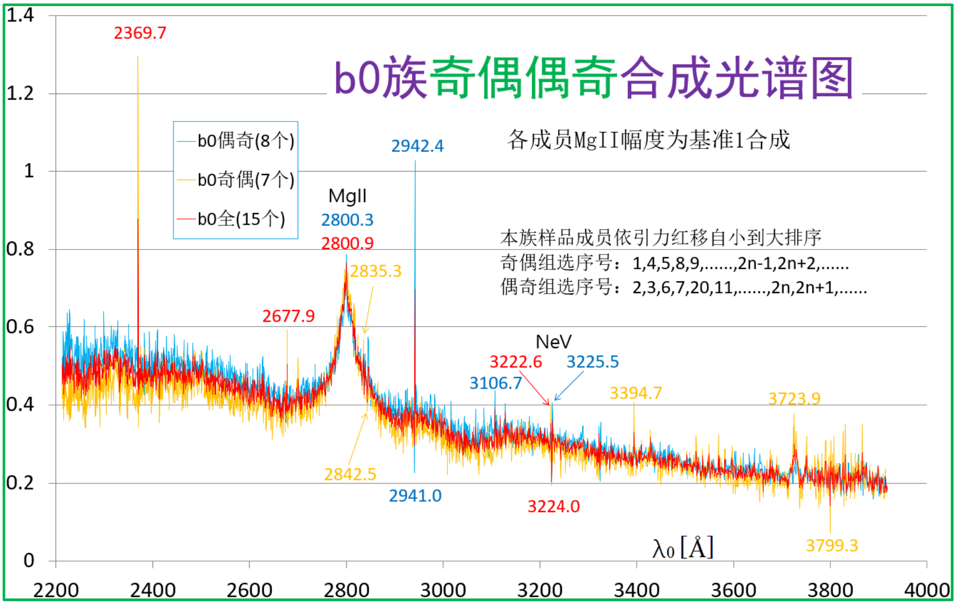


图 D20. b0 族(MgII 峰基准)奇偶合成光谱

D5. b 区北岸各族谱线 CIII 峰基准合成光谱

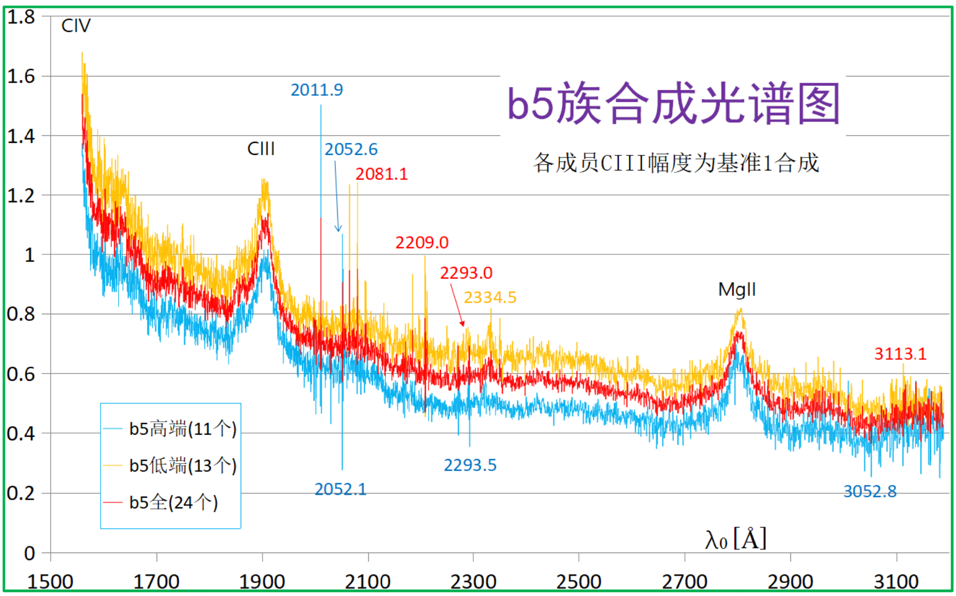


图 D21. b5 族(CIII 峰基准)合成光谱

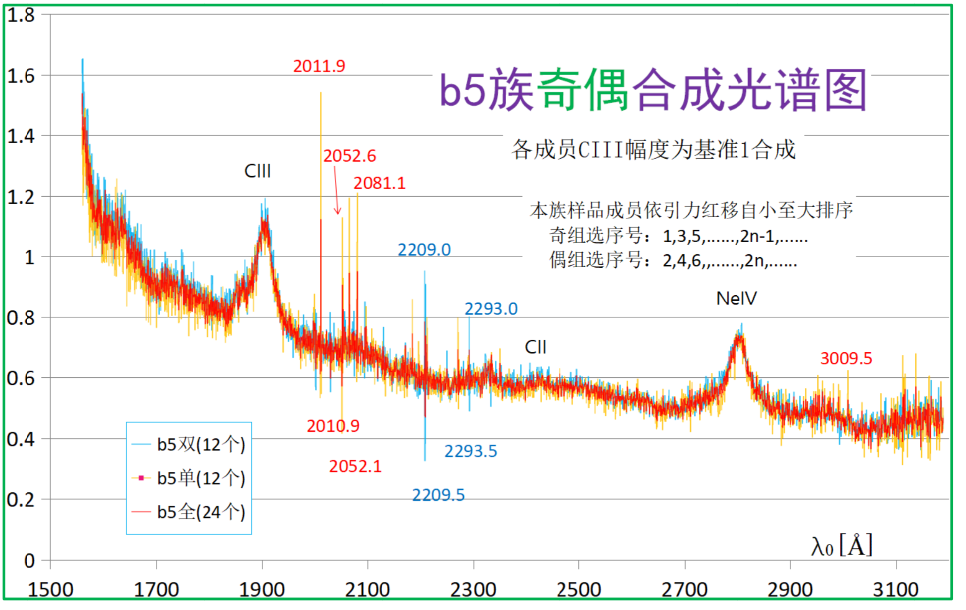


图 D22. b5 族(CIII 峰基准)奇偶合成光谱

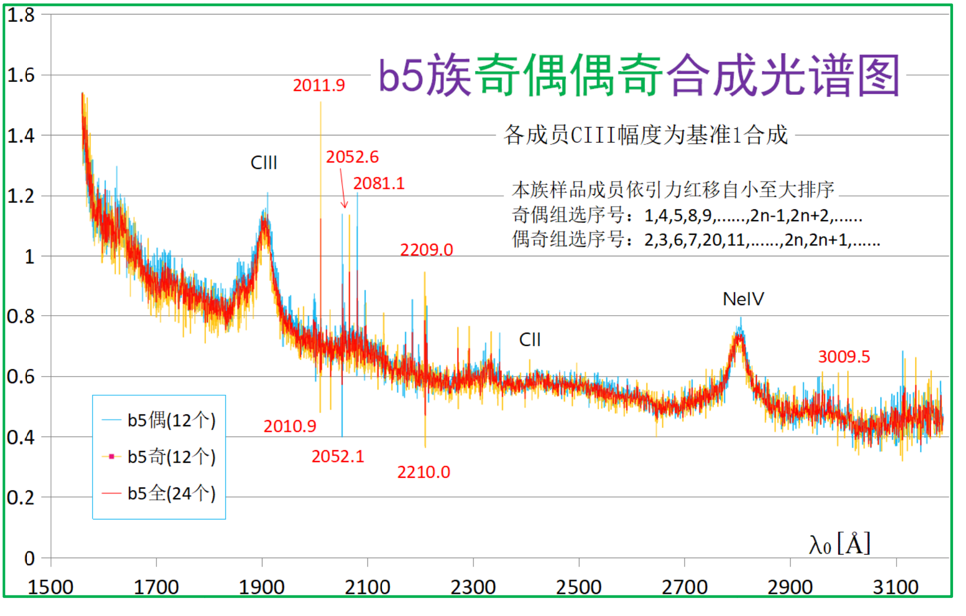


图 D23. b5 族(CIII 峰基准)奇偶偶奇合成光谱

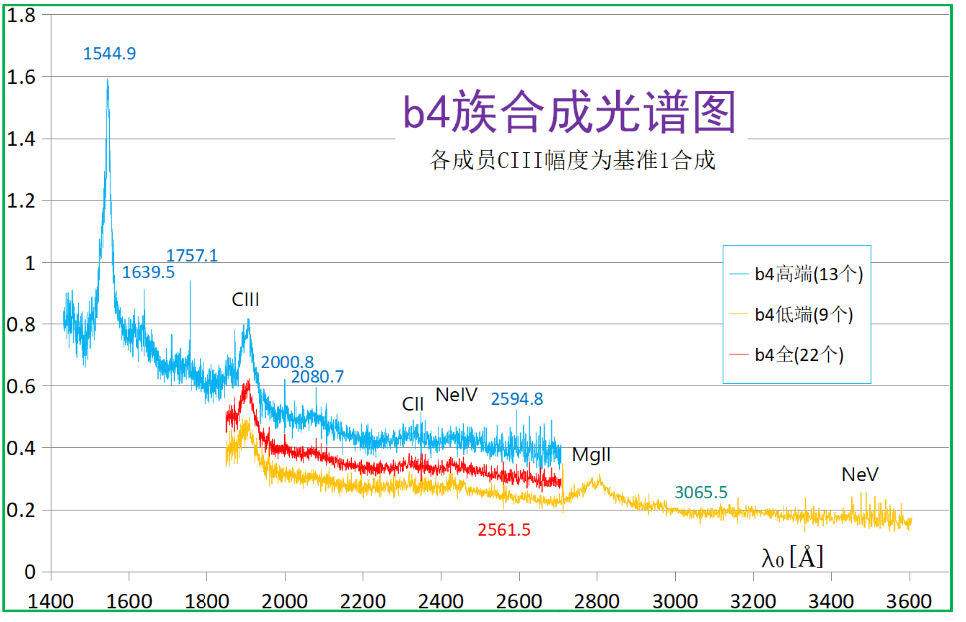


图 D24. b4 族(CIII 峰基准)合成光谱

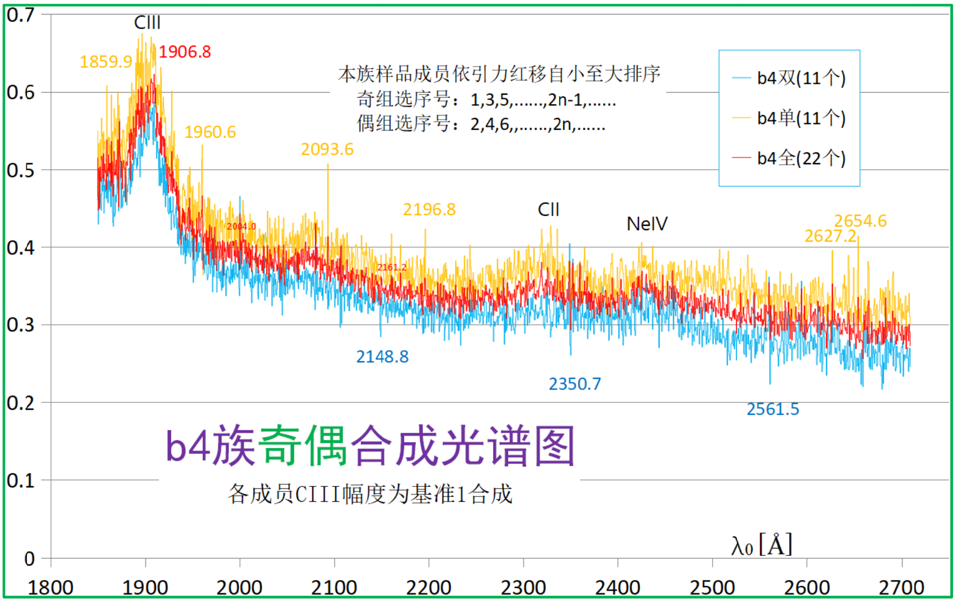


图 D25. b4 族(CIII 峰基准)奇偶合成光谱

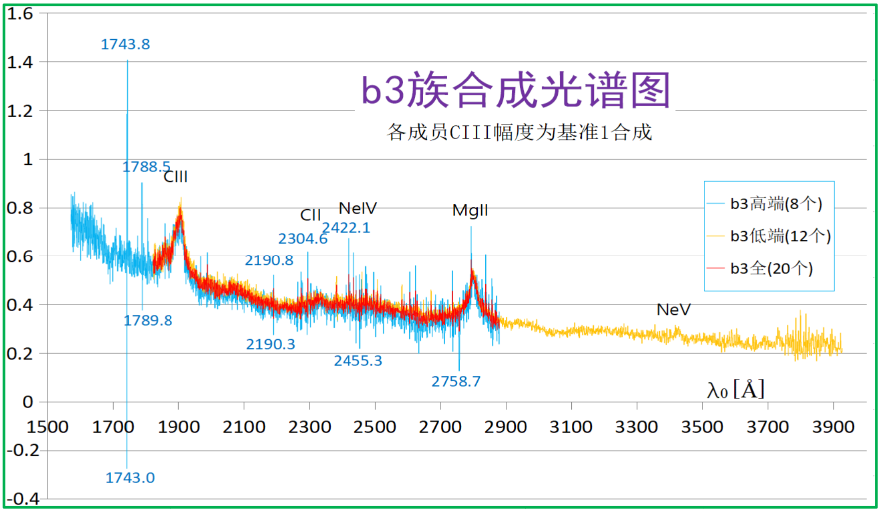


图 D26. b3 族(CIII 峰基准)合成光谱

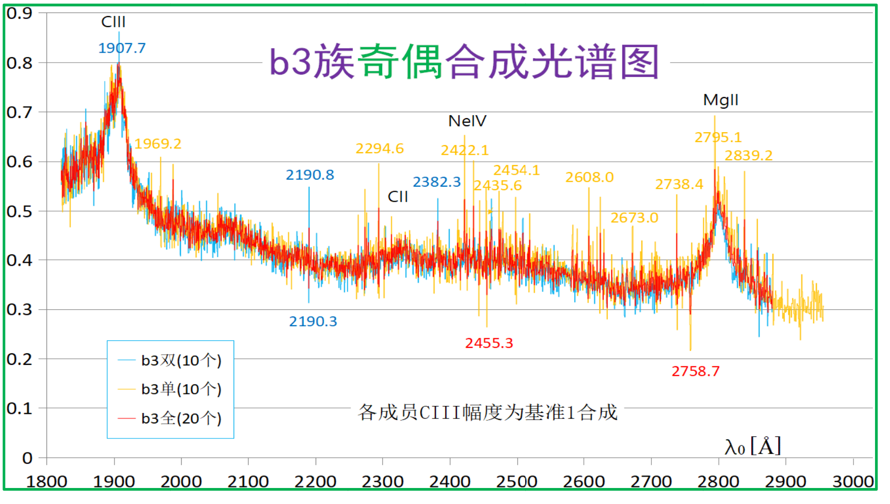


图 D27. b3 族(CIII 峰基准)奇偶合成光谱

D6. c 区各族分组合成光谱

说明：把 c 区各族成员按 H_β 峰>OIII 峰与 H_β 峰<OIII 峰的不同分为二组，分别合成光谱(图 D28-图 D37)。这也说明在同一族中存在着：向南岸方向演化的类星体，与演化方向为从南岸返回的类星体(图 D38)。

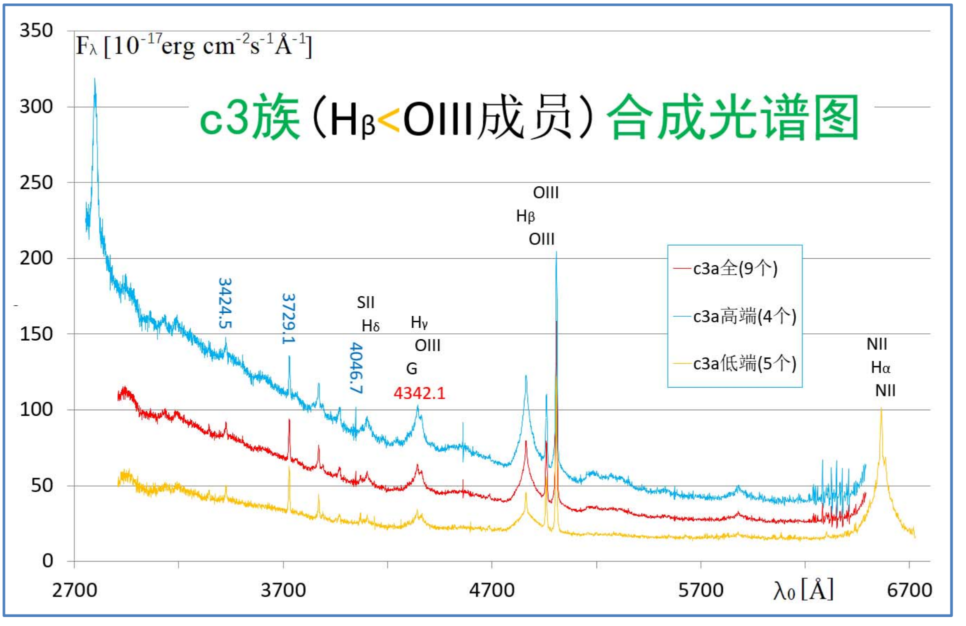


图 D28. c3 族(H_β < OIII 成员)合成光谱图

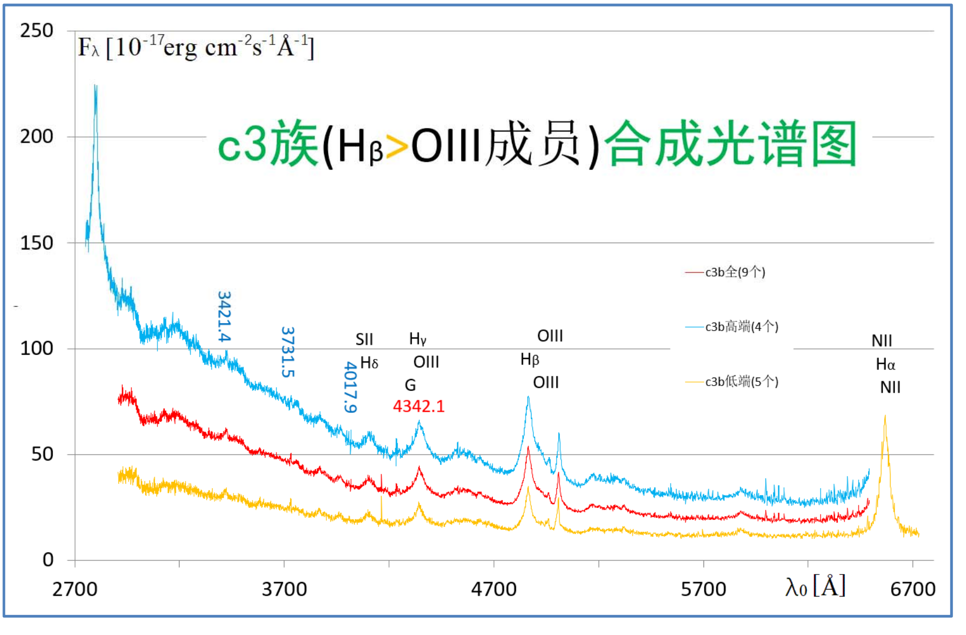


图 D29. c3 族(H_β > OIII 成员)合成光谱图

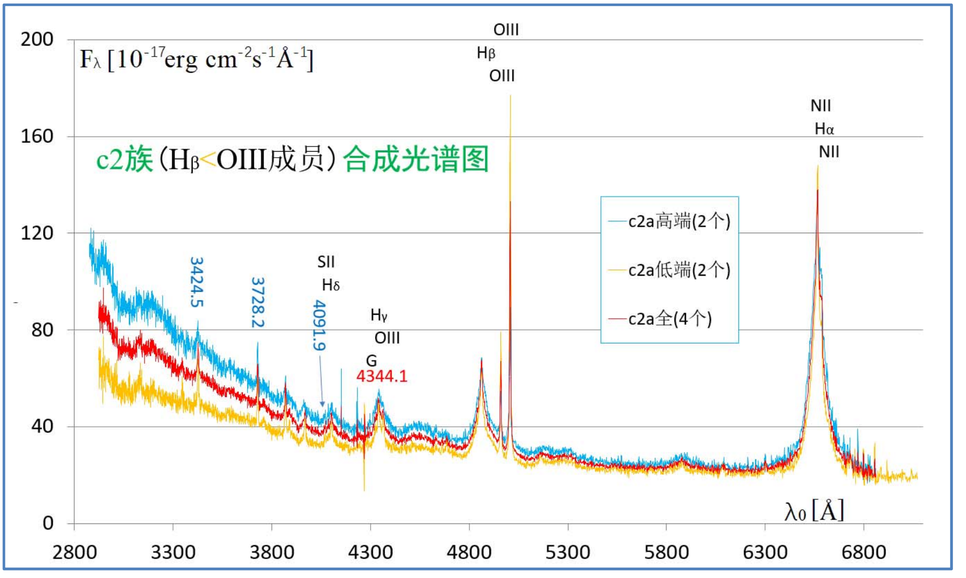


图 D30. c2 族(Hβ<OIII 成员)合成光谱图

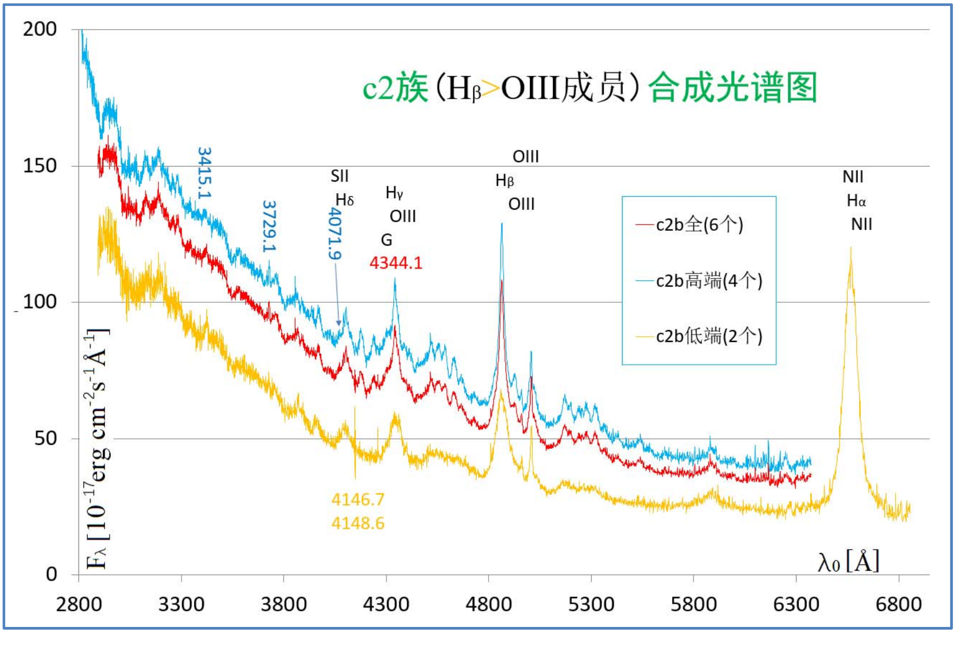


图 D31. c2 族(Hβ>OIII 成员)合成光谱图

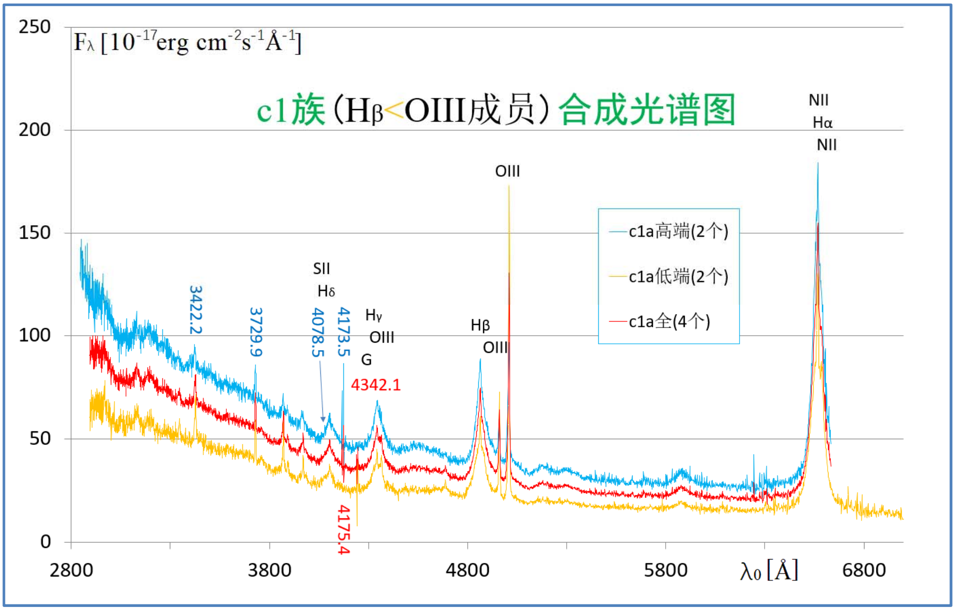


图 D32. c1 族(H_β < OIII 成员)合成光谱图

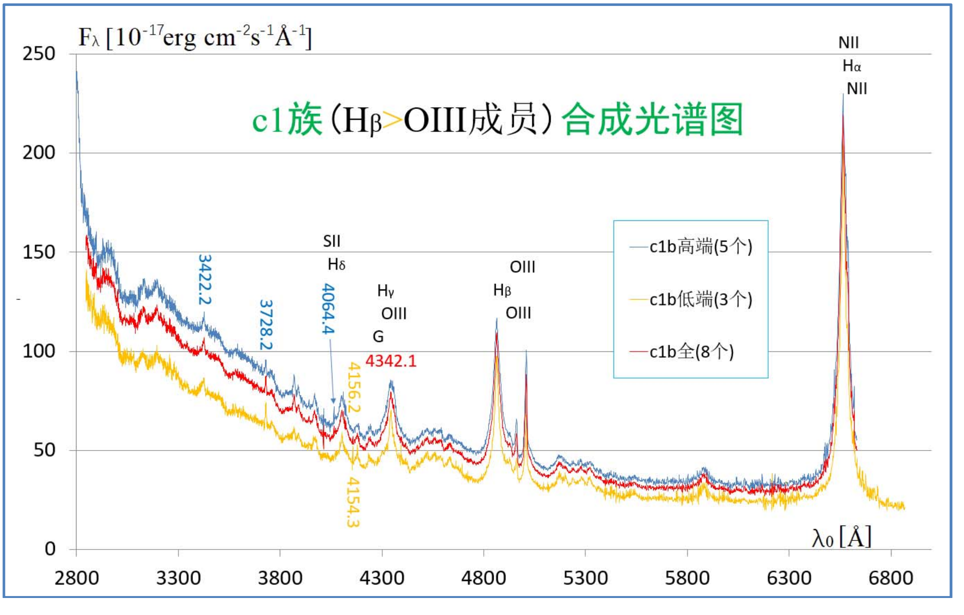


图 D33. c1 族(H_β > OIII 成员)合成光谱图

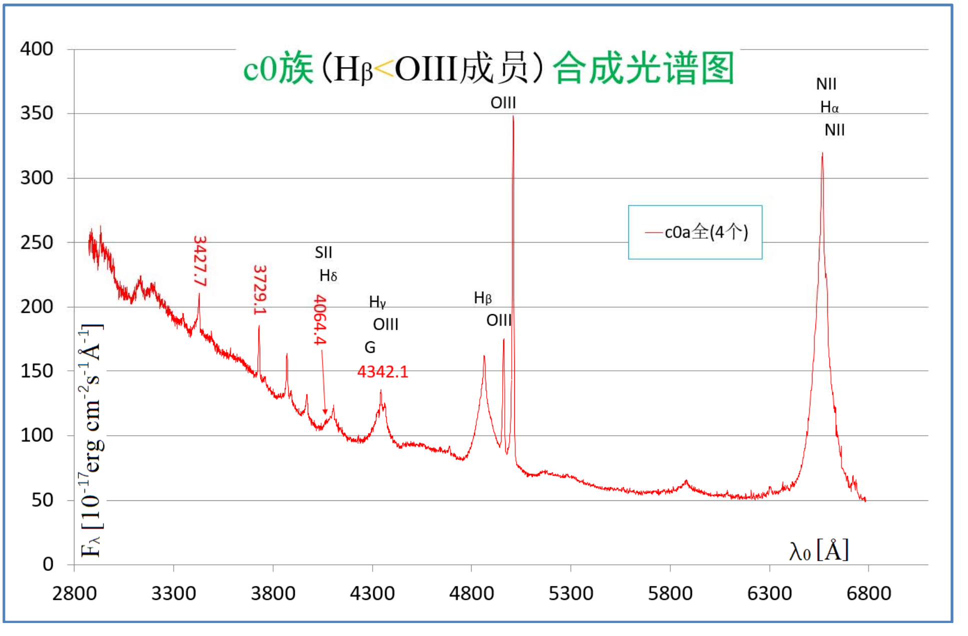


图 D34. c0 族(H_β < OIII 成员)合成光谱图

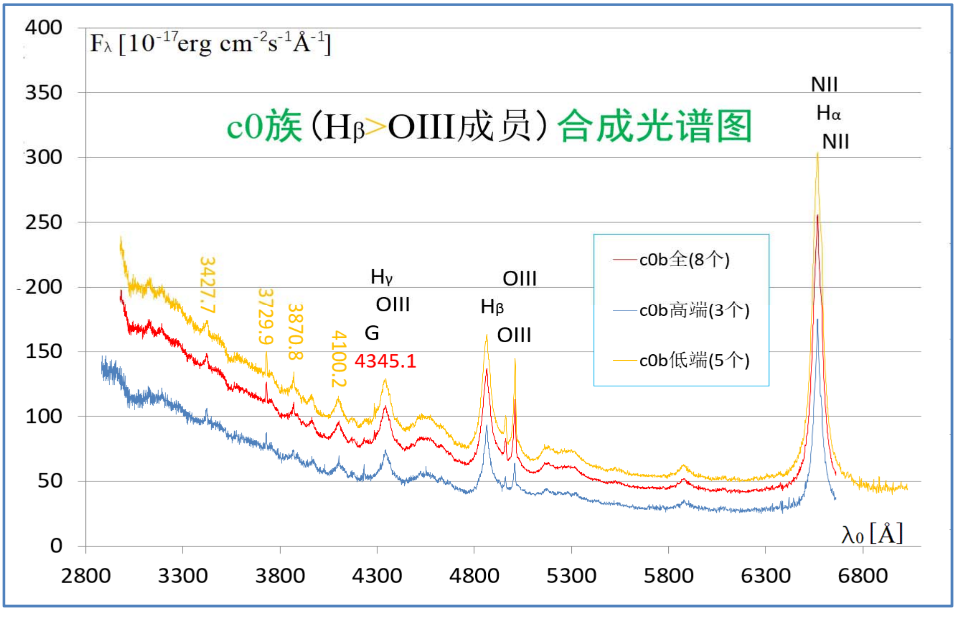


图 D35. c0 族(H_β > OIII 成员)合成光谱图

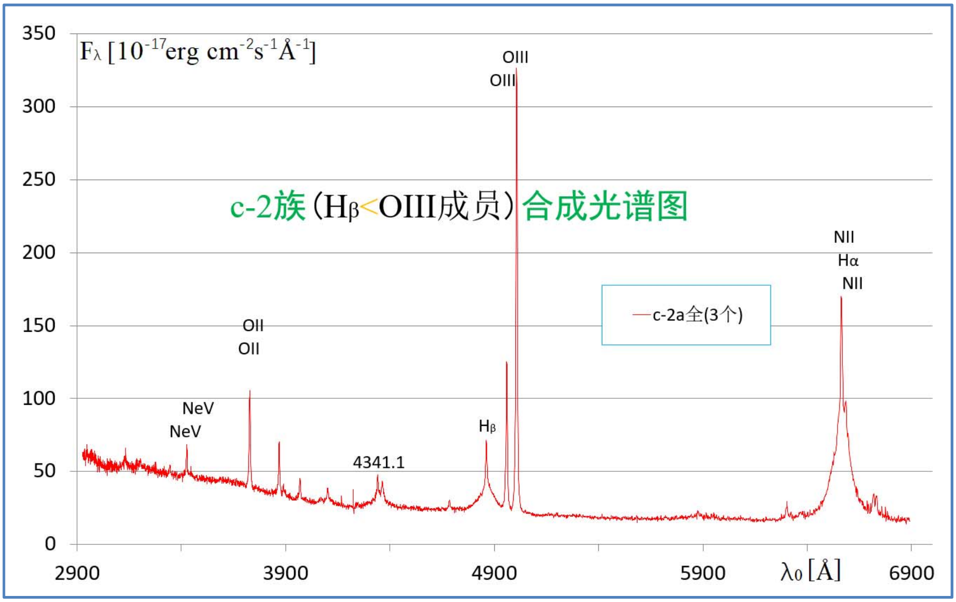


图 D36. c-2 族(H_β < OIII 成员)合成光谱图

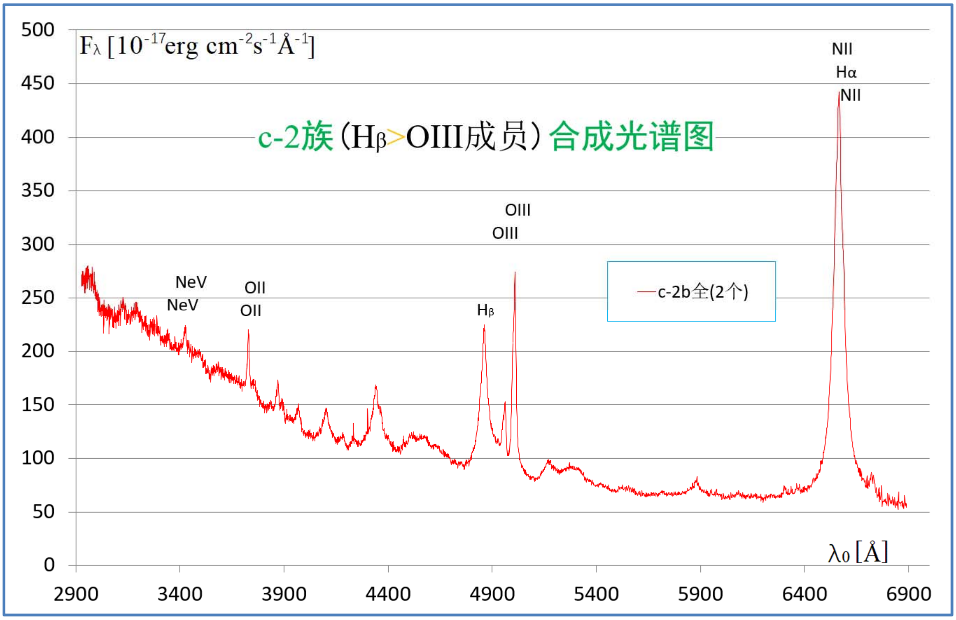


图 D37. c-2 族(H_β > OIII 成员)合成光谱图

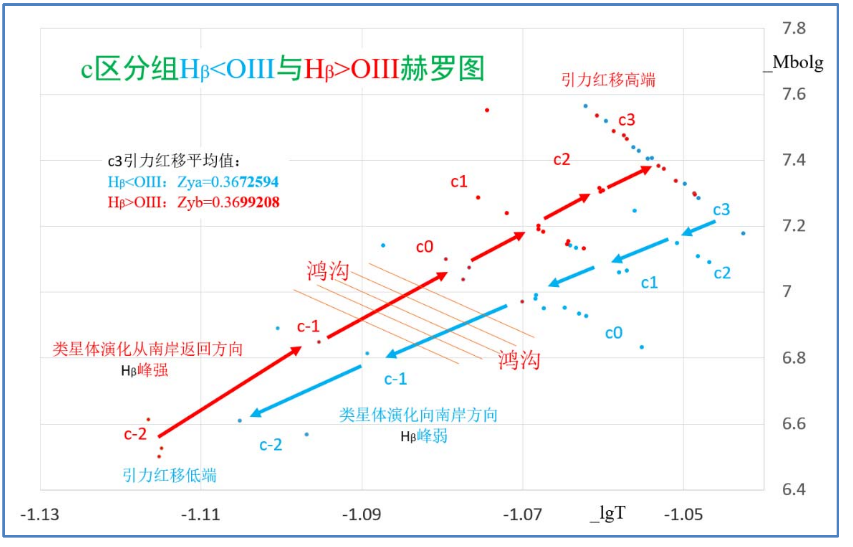


图 D38. c 区分组 H_β < OIII 与 H_β > OIII 赫罗图

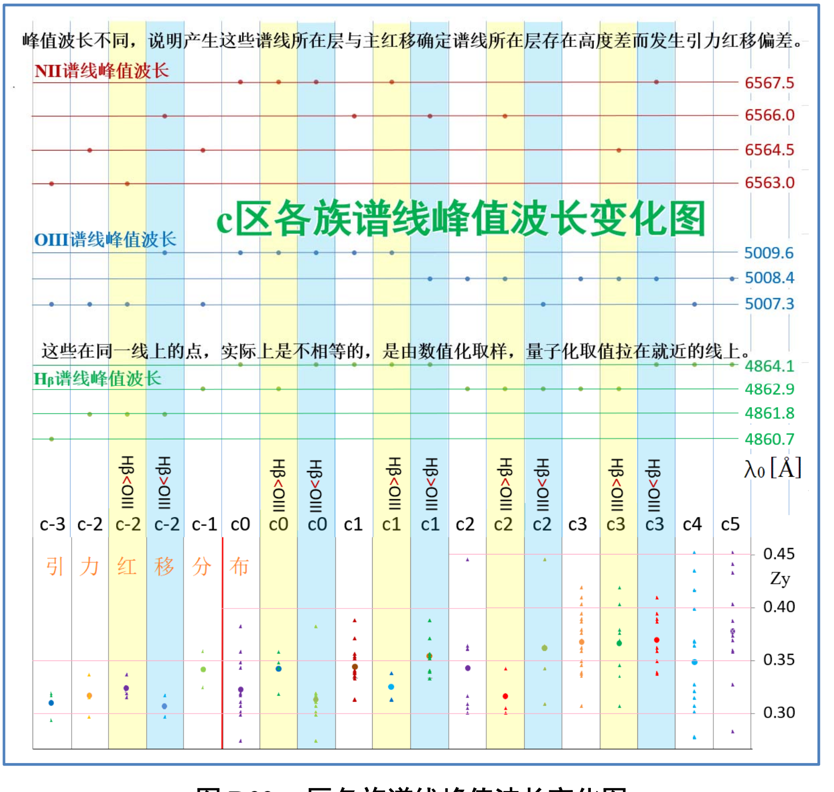


图 D39. c 区各族谱线峰值波长变化图

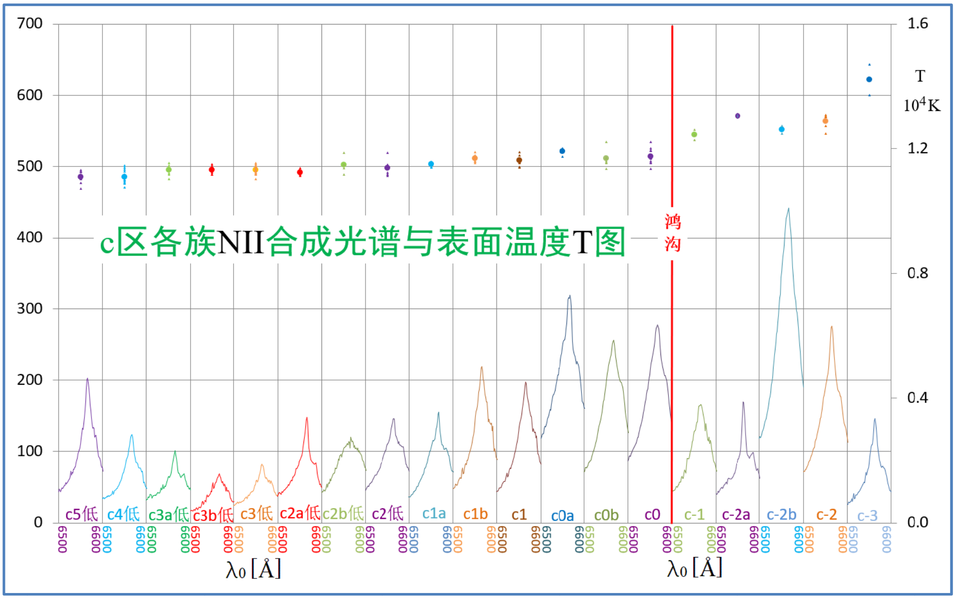
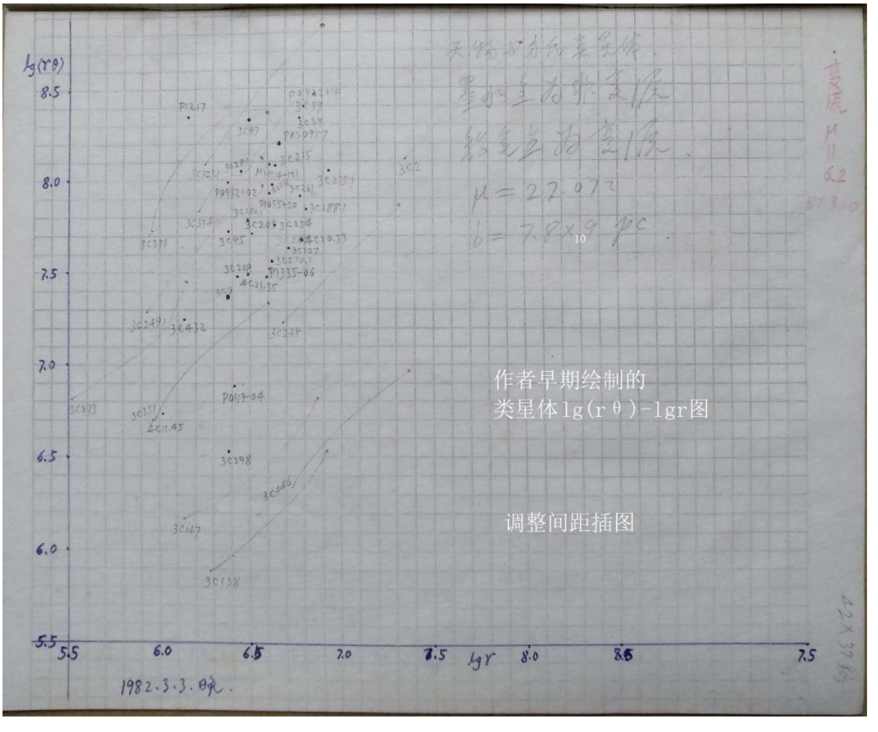


图 D40. c 区各族 NII 合成光谱与表面温度 T 图



写的，W星人对地球文明熟识程度令德善感触太深了，德善激动地说：“……这些资料非常宝贵，……”

五、 货色检验识真理　　第 22 页

“天无绝人之路呀，……”德善教授说，“W星人已为我们提供了一条计算类星体距离的公式，这条公式非常复杂，要不是我们已对它进行过验证，鬼才相信这条公式会有意义呢。”

六、 众议会上先科普　　第 26 页

红叶微笑着对大家说：“为科普W星人带来的科学知识，不仿让大家对类星体提些问题，由我根据W星人带来的知识来回答大家吧。”

七、 银河也有演化史　　第 35 页

细长的尾巴象一条波导管，冲击的振荡波在这条细长尾巴中传播，并形成一些驻波，最后细长尾巴的物质在引力聚集的作用下凝成了一串有一定规律间距的小霎珠，这串小霎珠形成了九大行星。……在小行星带因驻波最强，……

八、 超光通讯联W星　　第 39 页

“地球人，您们好！祝贺您们超光速通讯的成功！”五百光年远的回音即刻就听到了。我们W星先锋飞碟舰将再次出航地球，给你们送去超光速宇航技术。”

九、 超光宇航浪漫游　　第 43 页

“等会儿是要谈谈这次大家关心的蜜月中的喜事，先还是谈一下我们这次旅程中的一些新奇的见闻吧。”

调整间距插图

附录E　关于德布罗意波的猜想

E1. 粒速与德布罗意波的波速不相等说明什么

德布罗意在当年得出速度为 v 的粒子的德布罗意波的波速为[1] [2]

$$V=\frac{c^2}{v}, \tag{E1.1}$$

即

$$V>v, \tag{E1.2}$$

粒子的速度与粒子的德布罗意波的波速不相等。

这个不相等说明德布罗意波是一种要离开粒子的辐射波，正是这种德布罗意波要消耗能量，粒子的速度越大德布罗意波的辐射越大，这也许是粒子速度越大加速越困难的原因。

按相对论，粒子速度越大加速越困难的原因是粒子的质量增加，质量增加即对应于引力对粒子的作用更大。因此也说明德布罗意波有可能也是产生引力的原因。

E2. 行船对水的激波与粒子对真空的激波

行船对水会产生激波，通常激波波速也不等于船的速度。如果以船的坐标建立激波的方程，作者猜想激波的各个不同频率的分量的合成波包会与船速相等，与船同行。

作者猜想，作一模型，让船过二倍船宽的桥洞后，若远处设一个屏障让船冲撞。设船偏离桥洞中心值是随机的，冲撞的次数可足够多，那么船对屏障的冲撞，可撞出波动分布的撞击点。

这个实验的效率较低，若作一支自动射击枪连续射击子弹，过一个二倍子弹直径的缝隙，在远处靶上也可撞出波动分布的撞击点。

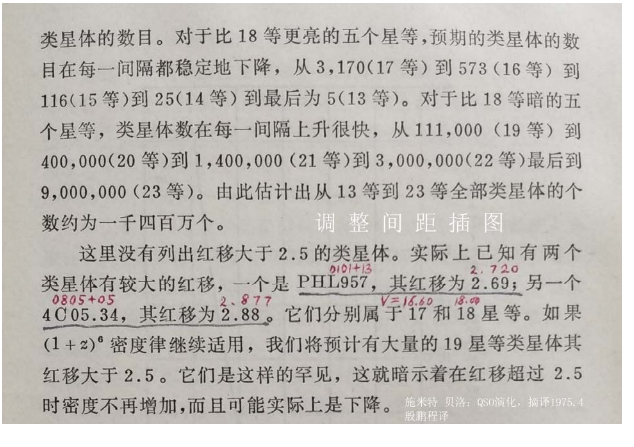
但模型船也有其优点，水面波动直观，还可录像慢回放观察细节，只要能让船出发的弹射方向与桥洞中心的偏离可精确定位。为便于录像观察，桥洞上面的桥可不要。那么观察偏离值与船的轨迹关系就可以了。

作者猜想，粒子运动对真空(迪拉克海洋)也会产生激波——德布罗意波。

E3. 粒子的激波——德布罗意波在单孔衍射中的作用

粒子辐射的德布罗意波会与单孔壁返回的德布罗意波以及单孔壁辐射的德布罗意波发生作用。设粒子辐射的德布罗意波相位与接收的德布罗意波相位同相时会产生排斥力，用负值表示；若反相则产生吸引力，用正值表示(图 E3.1)。

作用的结果就如(图 E3.2)产生了单孔衍射，经过路径 0 的光子，因二侧的德布罗意波作用力对称相等，所以走中间的直线；经过路径 1、2、3 的光子，因二侧的德布罗意波作用力不相等，受到偏离中间的力，走偏离中间的路径；经过路径 4 的光子，因二侧的德布罗意波作用力不相等，受到返回中间的力，走返回中间的路径。



类星体的数目。对于比 18 等更亮的五个星等，预期的类星体的数目在每一间隔都稳定地下降，从 3,170(17 等)到 573(16 等)到 116(15 等)到 25(14 等)到最后为 5(13 等)。对于比 18 等暗的五个星等，类星体数在每一间隔上升很快，从 111,000(19 等)到 400,000(20 等)到 1,400,000(21 等)到 3,000,000(22 等)最后到 9,000,000(23 等)。由此估计出从 13 等到 23 等全部类星体的个数约为一千四百万个。

这里没有列出红移大于 2.5 的类星体。实际上已知有两个类星体有较大的红移，一个是 PHL957 (0101+13)，其红移为 2.69 (2.720)；另一个 4C05.34 (0805+05)，其红移为 2.88 (2.877)。它们分别属于 17 (V=16.60) 和 18 (18.00) 星等。如果 $(1+z)^6$ 密度律继续适用，我们将预计有大量的 19 星等类星体其红移大于 2.5。它们是这样的罕见，这就暗示着在红移超过 2.5 时密度不再增加，而且可能实际上是下降。

施米特 贝洛：QSO演化，摘译1975.4
殷鹏程译

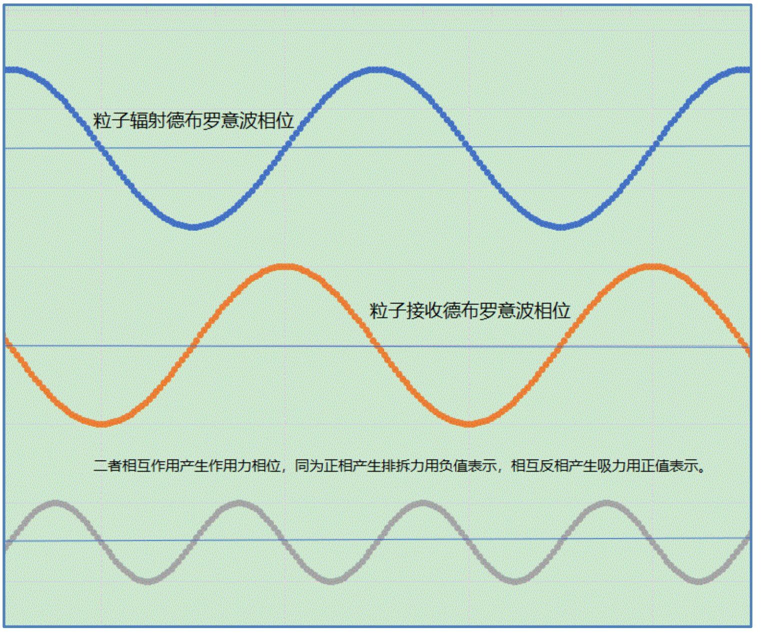


图 E3.1. 德布罗意波相互作用的相位关系图

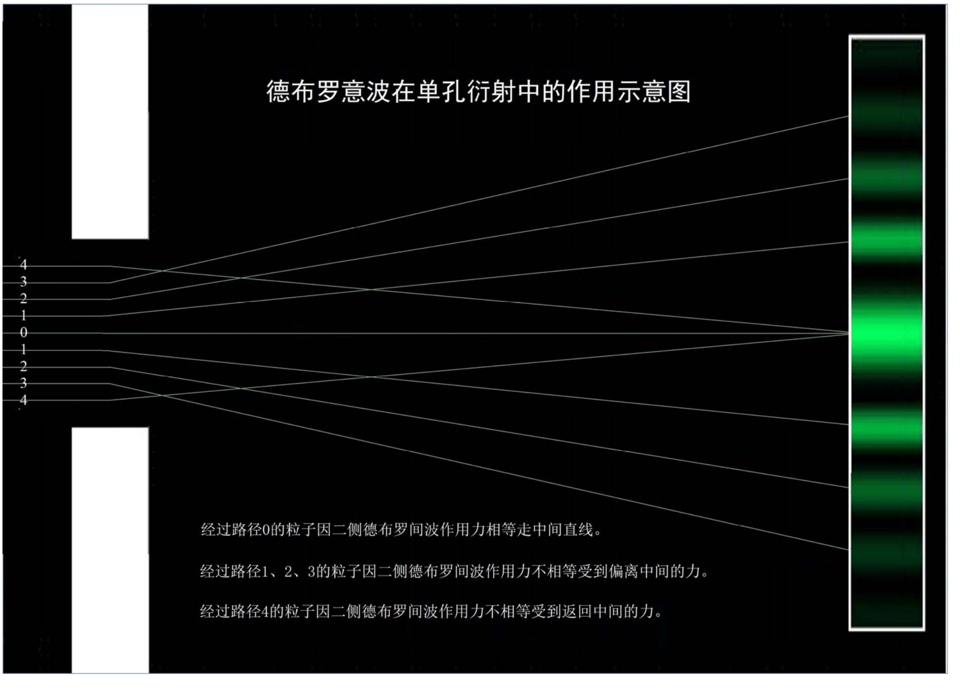


图 E3.2. 德布罗意波单孔衍射中作用示意图

E4. 德布罗意波在原子中电子轨道中的作用

电子在绕原子核运转不仅受到核正电荷的作用，还受原子核与电子各自的德布罗意波相互作用。在可行的轨道上除绕转外，在德布罗意波相互作用下还作接近核与外离核的波动；为说明问题，把波动的中线称为基轨道。若基轨道偏离可行的轨道，接近原子核，则会受到德布罗意波对基轨道的外推作用力，让基轨道返回可行的轨道；若基轨道偏离可行的轨道，外离原子核，则会受到德布罗意波作用对基轨道的内拉力，让基轨道返回可行的轨道。

E5. 德布罗意波在相干粒子间的作用

相干粒子间德布罗意波是完全谐振的同频德布罗意波，因此，各自特性受到相互制约。

E6. 光子的德布罗意波

光子也具有波粒二重性，只不过其粒速等于光速，代入式(D1.1)求得光子的德布罗意波的波速为

$$V=\frac{c^2}{v}=\frac{c^2}{c}=c\,, \tag{E6.1}$$

光子是一种粒速与德布罗意波波速相等的粒子。

光子辐射德布罗意波也需要消耗能量，传播过程中就产生了光谱红移，因此在微积开概念中推导产生了一条距离红移公式：

$$r=c\log_{(1-b)}\left(\frac{1}{1+Z}\right). \tag{1.1.5}$$

作者猜想由天文数据统计得出的 b 值，也许将来建立合理的光子结构

模型后可用于确定光子的精细结构。

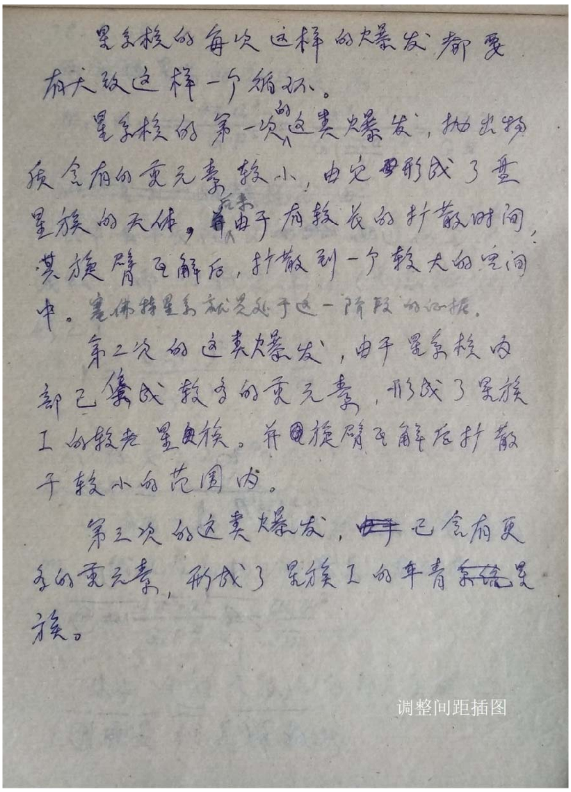
E7. 结束语

以上仅是作者未经验证的猜想，希望能给读者起到抛砖引玉的作用。

参考文献：

[1] 倪光炯李洪芳著，近代物理，上海科学技术出版社，1979 年 8 月版，第 146 页。

[2] 王正行编著，近代物理学，北京大学出版社，1995 年 1 月版，第 101 页。


星系核的每次这样的爆发都要有大致这样一个循环。

星系核的第一次的这类爆发，抛出物质含有的重元素较小，由它形成了亚星族的天体，元素由于有较长的扩散时间，其旋臂瓦解后，扩散到一个较大的空间中。塞佛特星系就是处于这一阶段的证据。

第二次的这类爆发，由于星系核内部已集成较多的重元素，形成了星族Ⅰ的较老星族。并旋臂瓦解后扩散于较小的范围内。

第三次的这类爆发，~~由于~~已含有更多的重元素，形成了星族Ⅰ的年青~~系统~~星族。

心的红移——类星体浪漫游

心的红移一一类星体浪漫游 1. 2

德善去为红叶泡茶。

红叶见桌上有一本名为《类星体》的书，就拿起来翻看。

德善为红叶端来了茶。

“‘类星体’是什么？”红叶问。

“类星体是 1960 年至 1963 年发现的一类天体。”德善望着红叶充满疑问的脸说。

“怎么要用 4 年长的时间发现它？”红叶望着德善的眼中，闪烁出一个姑娘的好奇眼光。

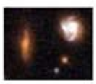


图 1　　　　　　　　　图 2

德善指着书上的图解释说：“因为，如图 1 下方的蓝点是一个类星体，蓝点的右上方黄点是一个恒星。类星体它在望远镜里看起来是一个光点，好象平常天上看到的恒星。所以一直未意识到其与恒星的不同，所以产生了一个特殊的发现过程。”

“那么，后来是怎么发现的呢？” 红叶问。

“我们坐沙发上说吧。” 德善指着沙发说。

红叶走向沙发坐下，德善过来坐在旁边，红叶抱住他给了他一个吻，说：“这是谢谢你的！给我这么多耐心的讲解。”

7　调整间距插图

附录F　主要变量符号表

BC_1 红移热星等改正

BC_2 热星等改正

b 光子的能量损耗率

b_1 距离公式常数

b_2 距离分量因子公式常数

c 光速

E 光子能量

E'观察到光子的能量

E_0 光子初始能量

G 万有引力常数

H 哈勃常数

h 普郎克常数

L 光度

$L_\odot$太阳光度

M 天体质量

$M_\odot$太阳质量

M_{bolg} 改正绝对热星等

$M_{bol\odot}$太阳的绝对热星等

m 光子质量

m_{bol} 热视星等

m_{bolg} 改正热视星等

m_0 光子初始质量

pc 秒差距

R 天体半径

$R_\odot$太阳半径

$R(t)$人口函数

r 距离

r_0 以秒差距为单位的距离数

$r(\theta)$极坐标的模

T 表面温度

T_Z 观测色温度

v 粒子的速度

v_0 粒子的初始速度

Z 红移量

Zr 距离红移量

Z_u 随机速度红移量(负值为紫移)

Zy 引力红移量

z 广义相对论定义的红移

λ 光子波长

λ_0 光子初始波长

μ 质光比

ν 光子频率

ν_0 光子初始频率

ξ 距离红移分量因子

ξ_i 小区间中点

$^\vee$微对数符号

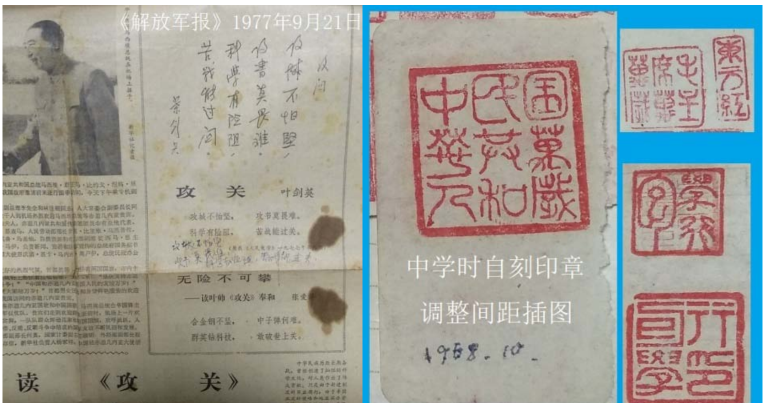
$^\wedge$微根符号

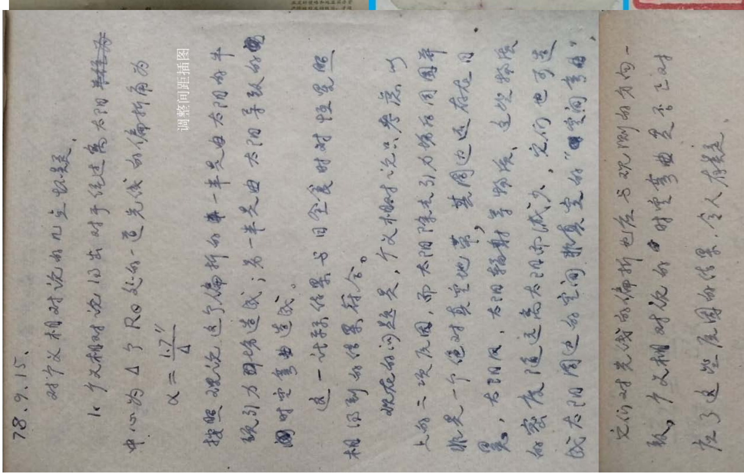
∇增率符号

∱ 乘积分符号

$\int$微积开符号

d 微开符号





鸣谢

四十多年来，“微积开概念”的主文与附文及概念形成过程等征询了非常多专家、学者、朋友的意见，促使“微积开概念”完善。

本文的写作过程中先后征得了南京紫金山天文台**恒星室**老师，温州职业技术学院的**章绍东**老师，温州房产管理局的**王超俊**老师，温州电子技术研究所的**缪晓胜**老师，温州大学的**朱丰毅**老师，浙江大学应用数学教研组的**林主任**老师，温州师范大学的**郑亦庄**老师，浙江大学应用数学教研组的**叶茂东**老师，温州计算机学会的**李桂芳**老师，温州建筑设计院的**翁庆华**老师，温州农工民主党的**李建敏**老师，清华大学数学教研组的**一教员**老师，温州大学的**徐正惠**老师，温州业余科技大学的**顾炎之**老师、**余进贤**老师，文成县人民医院的**夏镜清**老师，复旦大学的**谷超豪**老师，温州大学数学教研组的**徐承煌**老师，温州业余科技大学的**金来东**老师，复旦大学的**苏步青**办公室，温州教师进修学院数学教研组的**柳老师**，温州业余科技大学的**绍荣震**老师，温州大学数学教研组的**吴挺**老师，中国科技大学**天体物理组**，上海第二医学院数学教研组的**苏炳华**老师、**郑一鸣**老师，温州医学院附一院的**谷定英**老师，温州第十二中学的**王海丽**老师，新疆气象台的**张学文**老师，武夷山大学物理教研组的**师教民**老师，美国亚特兰大的**王海旭**老师、**刘可文**老师，温州大学的**王靖庶**老师、**黄明光**老师、**王胜初**老师，浙江省电力设备总厂的**张捷**老师，等老师的宝贵意见。在网络论坛讨论中得到了网友**张玮**老师，**宝泉老人**老师，**青春如歌**老师，**面粉厂司务长**老师，**环滁皆山也**老师，**燕博士**老师，**学海苇航**老师，**林安石**老师的宝贵意见。

还要感谢温州医学院的**缪天荣**老师，是他让我认识了**缪晓胜**老师、**朱丰毅**老师、**叶茂东**老师、**李桂芳**老师；是他给了我聆听**谷超豪**老师讲座的机会。还要感谢温州市图书馆的**柳树椿**老师，他不仅提供馆藏文献服务，

还热心帮助联系有关专家；还要感谢为我办理了借书证的**蔡钢琴**老师。还要感谢温州电视台的**彭志华**老师热心帮助联系有关专家。还要感谢温州药检所的**夏国霖**老师赠送我一本译自苏联的《高等数学教程》。还要感谢我在温州业余科技大学的**姜强**同学、**王剑波**同学、**王飞云**同学、**张洪宏**同学、**杨焕春**同学等同学的热心帮助与联系有关专家。还要感谢早期借给我荧光计算器的**鲁炳武**老师；还要感谢早期借给我手摇计算机的**朱丰毅**老师；还要感谢早期借给我莱塞计算机的**袁谦**老师。还要感谢温州离子注入技术研究所的**马俊**老师为我提供早期 AppleII 计算机使用机时。还要感谢 SDSS、NED 等开放数据，感谢为这些数据热心付出的工作者与老师。还要感谢为电脑软硬件、互联网及作出贡献的**科学家**，给我们工作生活带来便利。还要感谢**百度**、**google** 等搜索网、**中文 PDF** 网、**诺贝尔学术**网、**小木虫学术**网、知乎网等等提供的文献服务。还要感谢郭守敬望远镜的**李荫碧**老师为我提供了开放了的观测数据。

特别要感谢南京紫金山天文台**恒星室**，给予我最早的反馈意见。特别要感谢**章绍东**老师四十多年来多次提出宝贵意见；在我产生微积开概念的初期，在他的影响下我开始学习高等数学，并后来考取了温州业余科技大学。特别要感谢**谷超豪**老师在访温时接见了我，并聆听了他的《几何学、引力论和时空观念的变革》讲座。特别要感谢中国科技大学**天体物理组**，与我进行了半年左右的通信交流，并提出了**量纲问题**。特别要感谢**绍荣震**老师，他推荐我加入中国数学会运筹学会，让微积开概念在学会中作了交流。特别要感谢**苏炳华**老师，他最早指出微积开是新概念应予发表。特别要感谢**张学文**老师，他将我的微积开概念在潜科学网站上作了介绍。特别要感谢**师教民**老师，在他出版的著作中介绍了微积开的有关讨论。

还要感谢我的家人：感谢我的**父亲包廷钊**对我自幼的启蒙教育，感谢我的**母亲夏爱珠**对我成长的照顾，感谢我的**妻子王海容**为我承担了更多的家务。

还要感谢勇于冲在抗疫第一线的**白衣天使**；正在本书准备出版期间，却爆发了新冠疫情，不得不推迟了本书的出版；是以**钟南山**、**张文宏**、**李兰娟**为首的一批白衣天使的努力控制了我国的疫情，让我们又回到平安的环境。还要感谢为保卫国家和平、社会稳定、以及维护世界和平作出无私奉献的**军人**，使我们不再受恐怖战乱的影响。

还要感谢伟大的领袖**毛泽东**主席；在否定文革的思潮期间，我曾怪他让我们下乡支边失去学业；但社会发展需要一批打破常规学习的人，正是他的伟大战略思想让我们打破常规。正是失去学业让我有一条不同于常规的学习路径，正是这条不同于常规的学习路径让我产生了微积开概念。还要感谢伟大的大自然，让我遇上了几个巧合点，是这些巧合引导我产生了微积开概念。

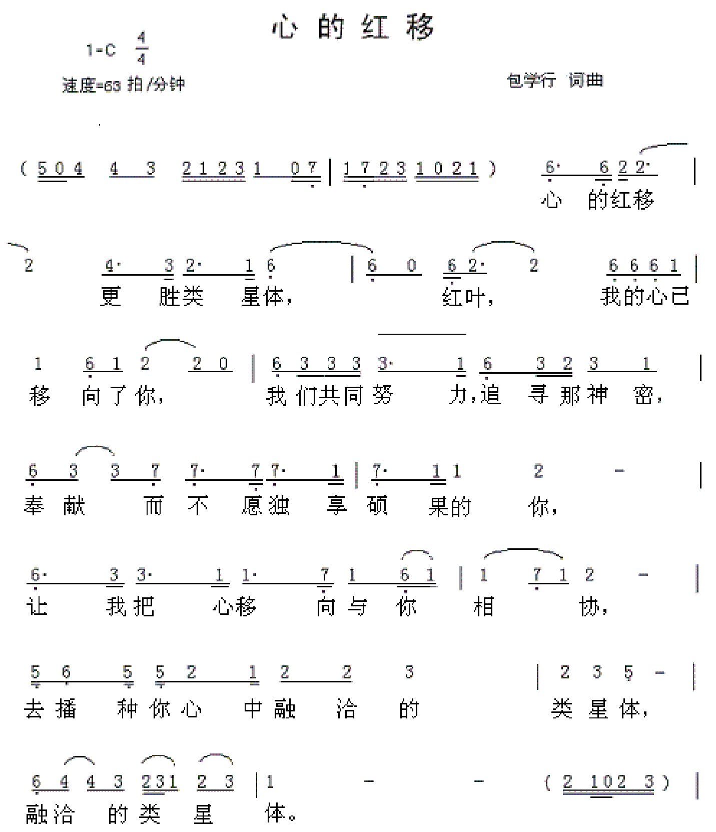
还要感谢汉斯出版社的诸位工作者，为本书自 2016 年在汉斯出版社发布 预印版至此次正式出版中为审查、编辑、排版的辛勤付出。

对以上所有我要感谢的人，谨在此表示衷心的感谢！

包学行

2020 年 **10** 月定稿于温州

心的红移——类星体浪漫游



可发Email至592519806@qq.com索取伴奏。

调整间距插图

后记：用活动星系核等数据辅助验证

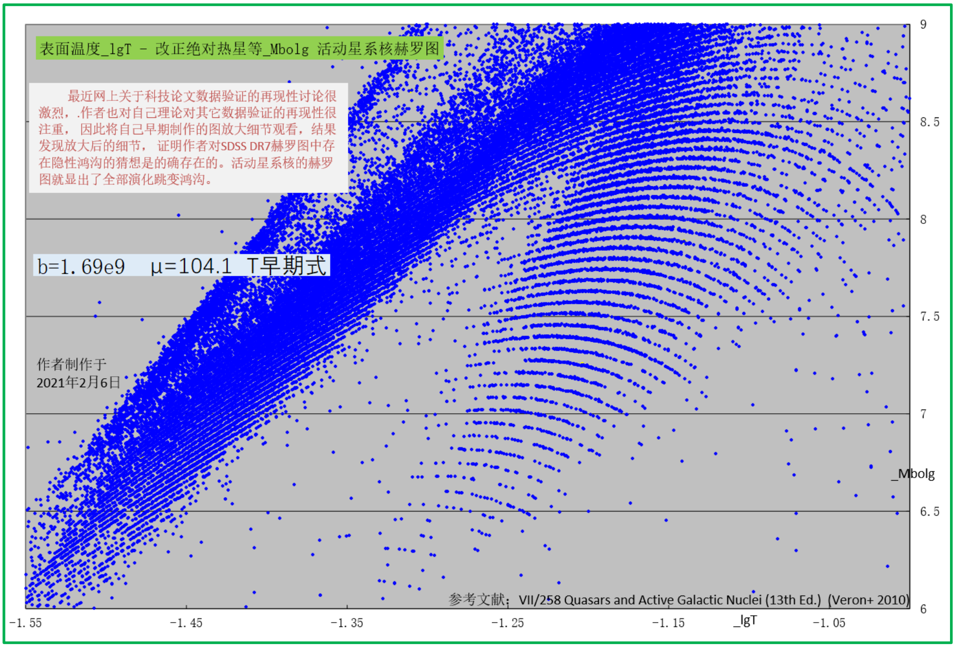


图 H1. 活动星系核赫罗图

作者是 2010 年 2 月下载了活动星系核数据[1]，而该数据是 UBV 测光的，比较适合作者建立的类星体公式的计算。因此首先在 12 吋 1024 × 768 分辨率的电脑显示屏上制作的活动星系核的赫罗图(图 H2)，当时就没有发现有鸿沟存在。

$$\frac{\lg(1+Zr)}{\lg(1+Z)}=\frac{1}{1+b_1\mu 10^{b_3+2\lg T-0.2m_{bolg}}},$$

其中

调整间距插图

$$b_3=\lg\left(\frac{b_2}{b_1}\right)=\lg\left(\frac{GM_\odot}{c^2 r_1 R_\odot \ln 10}\right)-9.472+0.4M_{bol\odot}.$$

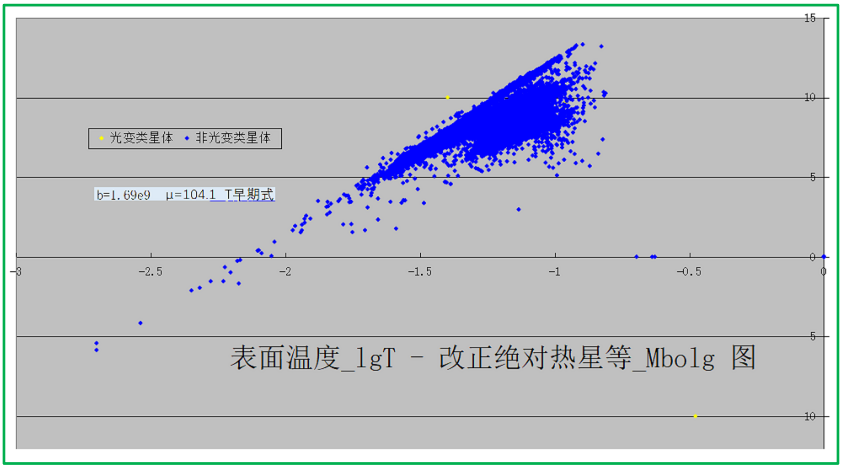


图 H2. 早期制作的活动星系核赫罗图

因最近网上关于科技论文数据验证的再现性讨论很激烈，激发了作者想了解对照活动星系核[1]赫罗图是否有类同的鸿沟，因此放大制作了(图 H1)，发现活动星系核赫罗图中竟有精细结构的鸿沟。

那么在 SDSS DR7 赫罗图中怎么未发现有类同于活动星系核赫罗图中的精细结构的鸿沟呢？因为作者采用的类星体表面温度计算式是通过 UBV 测光的色指数计算的。活动星系核是 UBV 测光的，所以计算精度高些 而 SDSS DR7 是 ugriz 测光的，不能直接用 UBV 测光的色指数计算的。当时作者希望在网上能搜索到 ugriz 测光色指数表达的色温计算式，但未找到。改为搜索 ugriz 至 UBV 的转换关系式，也未找到。唯一仅找到 $u^*g^*r^*i^*z^*$ 至 UBV 的转换关系式，只好先采用。是存在偏差与残差的，因此模糊了与活动星系核赫罗图中的精细结构鸿沟的走向类同鸿沟。尽管粗糙但还是能发现类星体在赫罗图上的二种分族特性。

近几天，作者又在网上搜索 u，g，r，i，z 测光色指数表达的色温计算式，但仍未找到。改为搜索 u，g，r，i，z 至 U，B，V 的转换关系式，这次找到了《测光系统转换 u，g，r，i，z---U，B，V，R，I》一文。对于 z < 2.1 的类星体 u，g，r，i，z 至 U，B，V，R，I 的转换关系式及(转换 RMS 残

差)为[2]：

$$U - B = 0.75(u - g) - 0.81, (0.03) \quad (H1)$$

$$B - V = 0.62(g - r) + 0.15, (0.07) \quad (H2)$$

$$V - R = 0.38(r - i) + 0.27, (0.09) \quad (H3)$$

$$Rc - Ic = 0.72(r - i) + 0.27, (0.06) \quad (H4)$$

$$B = g + 0.17(u - g) + 0.11, (0.03) \quad (H5)$$

$$V = g - 0.52(g - r) - 0.03. (0.05) \quad (H6)$$

作者把活动星系核与 SDSS DR7 及 3C273 光变数据[3]用相同的参数与新 T 算式计算制作赫罗图对照如(图 H3)。其中 SDSS DR7 的 ugriz 测光数据先作 ugriz 至 UBV 转换[2]。

在(图 H3)下方出现了引力红移分族的鸿沟，这些鸿沟的斜率与活动星系核左上方的密集长条的斜率也相近，这些鸿沟的斜率也与 3C273 的光变轨迹[3]的斜率相近(因 3C273 光变数据中各时点缺红移值，用早期的单一红移值 0.158 值代替)。

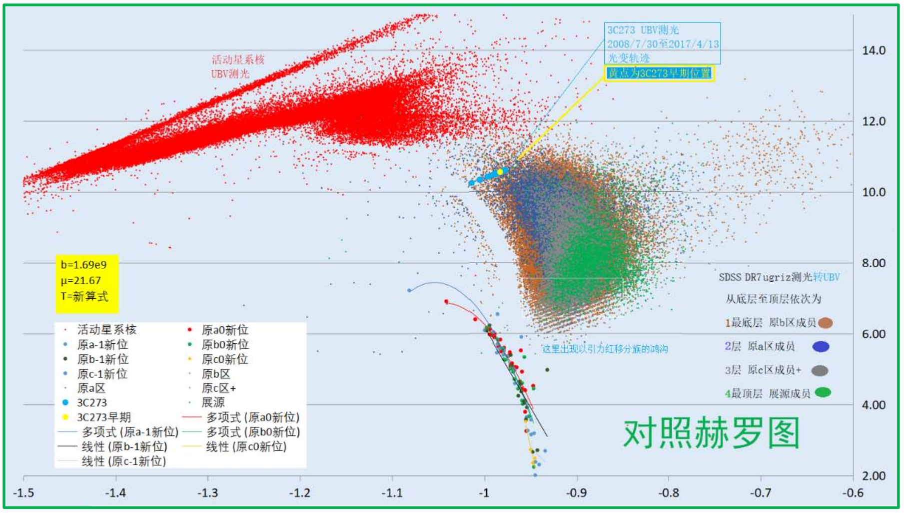


图 H3. 活动星系核与 SDSS DR7 对照赫罗图

把(图 H3)中白色方框部分放大，得到(图 H4)就能看清引力红移分族的细节。其中对蓝色标线族与红色标线族都追踪分析 3 个数据。

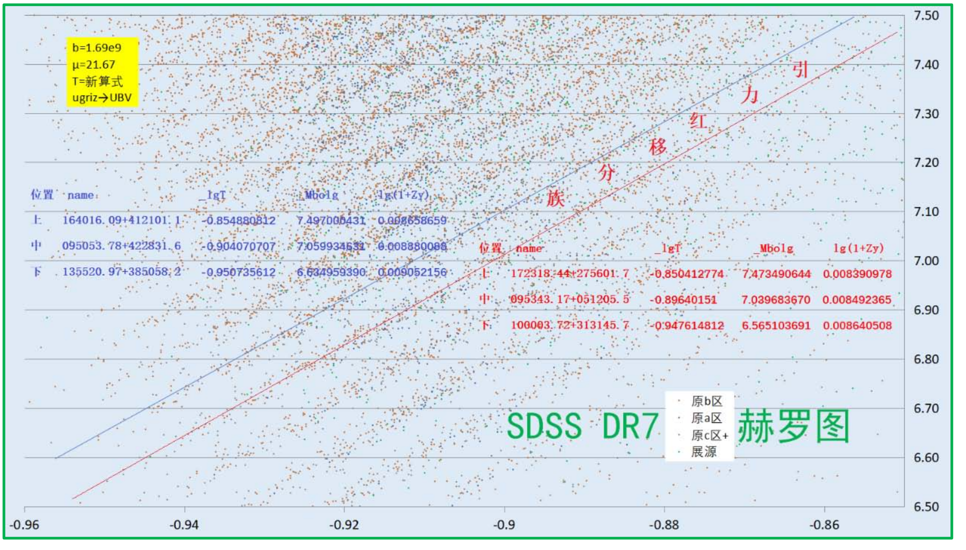


图 H4. SDSS DR7 局部放大赫罗图

遗憾的是尽管这次计算明显地出现了引力红移分族的特性，但却模糊了活动星系核的精细分族鸿沟。因此在未搞清类星体的质光比函数关系之前，还不能判定哪个计算得出的赫罗图更接近精确的赫罗图。

这次计算改变了 T 的计算用了新算式，改变了质光比。T 的计算用新算式，应当更精确，而质光比是个有函数关系的量，用单值就有用那个值与中值更接近些的情况。因此我们何不把质光比再换回 $\mu = 142$，而 T 用新算式再试试呢。

先对 SDSS DR7 仍用 $u^*g^*r^*i^*z^*$至 UBV 的转换关系式，把活动星系核与 SDSS DR7 点源用相同的参数与 T 算式计算制作对照图得到(图 H5)与(图 H6)。

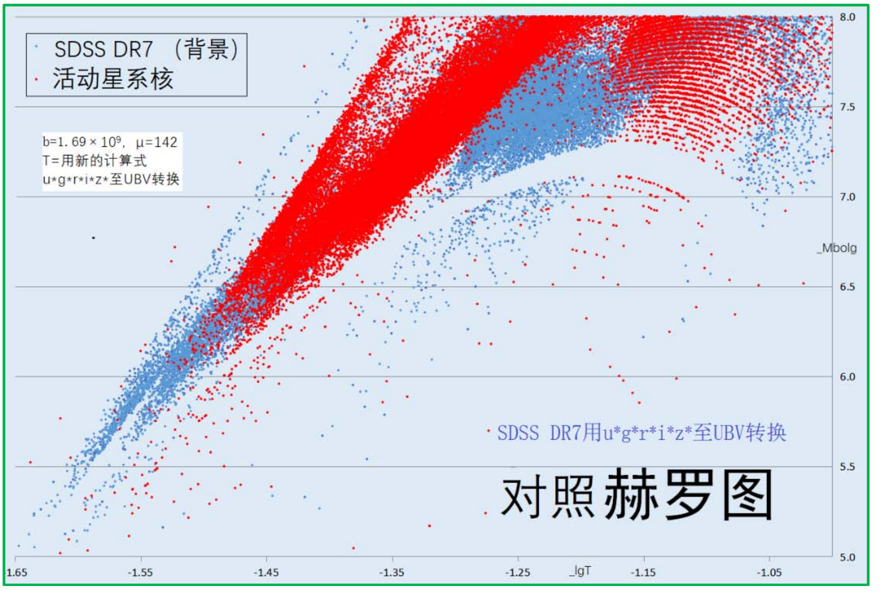


图 H5. 活动星系核与 SDSS DR7 对照赫罗图

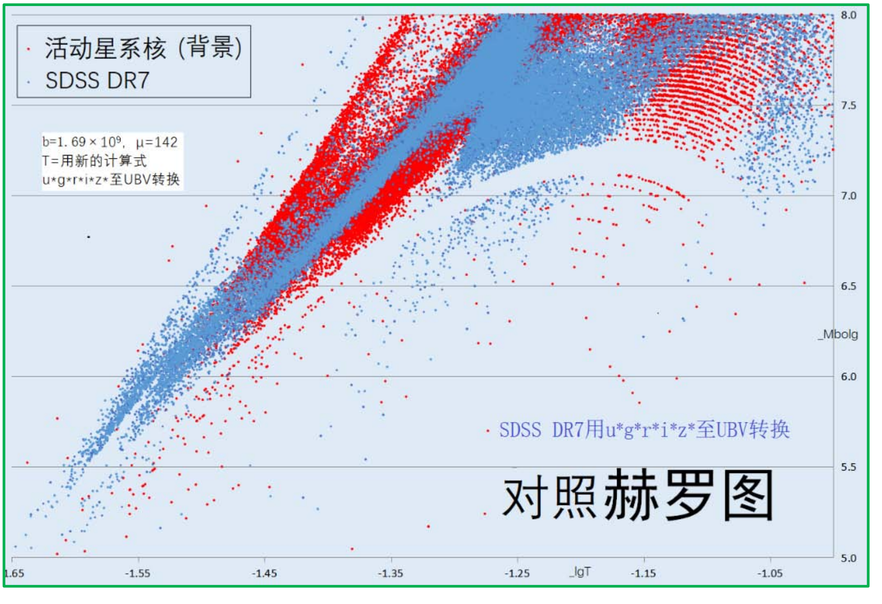


图 H6. SDSS DR7 与活动星系核对照赫罗图

从(图 H5)与(图 H6)中可以看到在对照赫罗图中 SDSS DR7 好象也隐隐的有精细鸿沟，但模糊不明显。而引力红移鸿沟完全模糊未显出。

再对 SDSS DR7 用 ugriz 至 UBV 的转换关系式，把活动星系核与 SDSS DR7 点源用相同的参数与 T 算式计算制作对照图得到(图 H7)与(图 H8)。

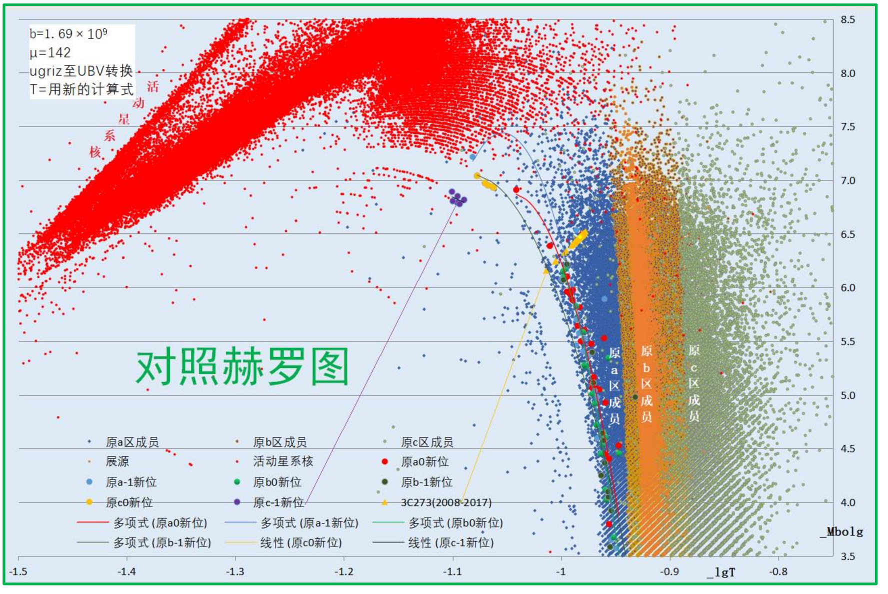


图 H7. 活动星系核与 SDSS DR7 对照赫罗图 1

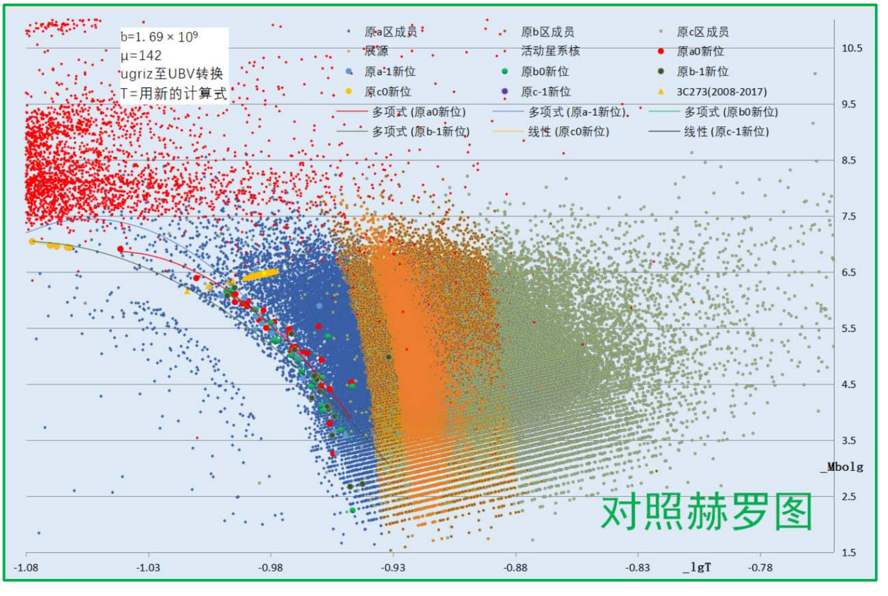


图 H8. 活动星系核与 SDSS DR7 对照赫罗图 2

在(图 H7)与(图 H8)下方同样也出现了引力红移分族的鸿沟，这些鸿沟的斜率与活动星系核左上方的密集长条的斜率也相近，这些鸿沟的斜率也与 3C273 的光变轨迹[3]的斜率相近。而这些引力红移鸿沟比(图 H3)更加清晰了。在(图 H7)中活动星系核的精细鸿沟能明显显示了。

在(图 H7)中活动星系核的精细鸿沟走向趋势，明显是与 SDSS DR7 的引力红移精细鸿沟相交的。如果 SDSS DR7 中也存在与活动星系核类同的精细鸿沟，那么类星体在赫罗图中的分布，就会被 2 种鸿沟分割成分布在一些点的附近，组成一些更精细的微小的分族。因此，把(图 H7)的局部再放大，得到(图 H9)。

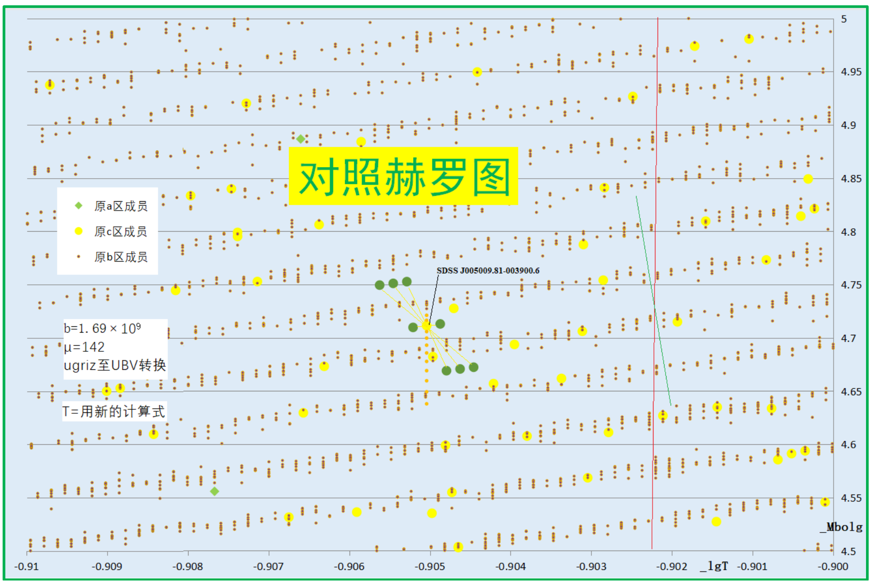


图 H9. SDSS DR7 局部放大赫罗图

在(图 H9)中类星体确实被分割成一些微小的分族。观察这些微小的分族的走向趋势不是走向邻近的微小的分族，而是越过邻引力红移族走向稍远点的一个微小的分族。如果类星体确实是这样跳变的，那么精细鸿沟走向就如(图 H9)中的红线。如果类星体是跳变到就近的微小的分族，那么精细鸿沟走向就如(图 H9)中的绿线。或者是跳变到目前我们还不能

明确之处。

为了追踪(图 H9)中精细鸿沟引成的原因，在(图 H9)中找出一个数据点(SDSS J005009.81-003900.6)，把其原始数据的红移量 z 向各个方向偏移一个量化级 0.01，色指数(B-V)向各个方向偏移一个量化级 0.00062，结果得到(图 H9)中黄色米字线联接的 8 个梅绿色的点，这些点的间隔正好与精细鸿沟的宽度接近。

那么，这些精细鸿沟是否就是因数据量化精度级引起的呢?也并不是全是由数据量化精度级引起的。因为还有 1 个原始数据视星等 V，如果按每 5000 个量化级(0.00004 × 5000 = 0.2)为步长构建如(图 H9)中的金黄色虚线点，很多点都落在引力红移的鸿沟处，这些点处 SDSS DR7 没有观测数据。

因为这些情况发生在数据分辨率边缘，到底如何就要找出各个微小的分族成员的光谱分析才能知道。作者认为就如同游标卡尺的 2 个低精度的刻度可量出高一个量级的精度，多个 0.001 精度的 ugriz 数据可变换出 0.00004 精度 V 值，至少类星体引力红移精细鸿沟应当是真实的类星体物理特性。

为什么会出现这种情况呢？可能类星体是一种宏观量子化的天体，跳变的族线是由几组不同的族线迭加引成的。宏观量子化是指类星体演化停留在量子化点处的时间是非常长的上万年，而在非量子化点处的时间是很短的数十年甚至更短。

(图 H9)与(图 H3)相比，(图 H3)中把原 a 区、原 b 区、原 c 区光谱特性是有非常明显区别的成员都混在一起了。而(图 H9)中已经有了改改善，仅把原 a 区、原 b 区、原 c 区光谱特性是有非常明显区别的成员只有一部分混在一起。看来要最终解决分离就需要找出类星体质光比变化的函数关系，这有待今后解决。

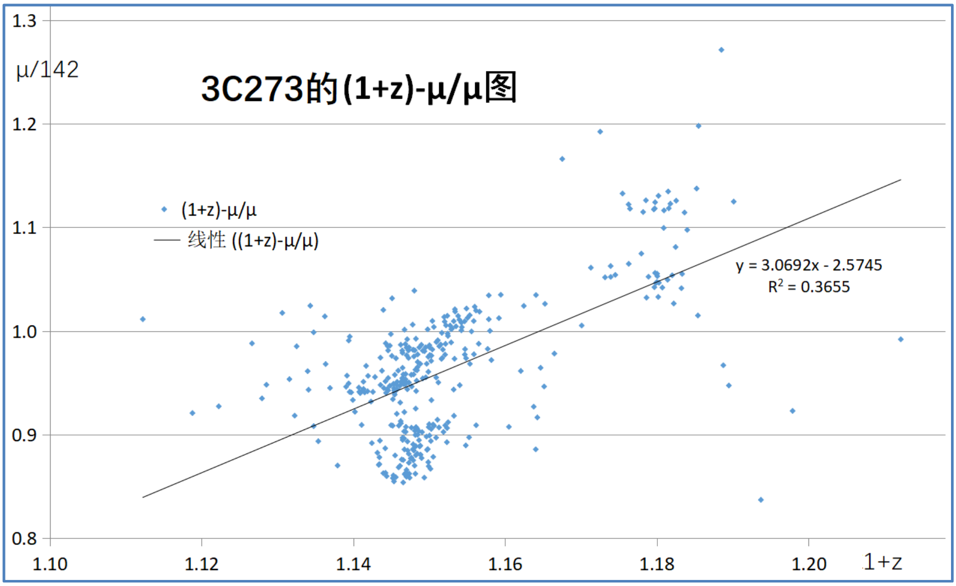


图 H10. 类星体 3C273 的质光比与红移关系图

为了了解类星体质光比变化的函数关系是否可用 1 阶函数逼近，作者将文献 SMARTS Optical/IR Observations of Fermi Blazars[3]中 3C273 数据中缺少的红移数据用反推法求出，作图分析图中似有线性族线存在(图 H10)。当然，这种反推法是假定某时点得出的 3C273 距离与质量是可作基准的，但统计得出的 1 阶关系式因误差较大不能使用，估计原因是基准有误差，反推法把 3C273 的红移波动扩大了。因反推法虽然误差很大，但不会破坏红移波动大小的序，因此对了解类星体质光比变化的函数关系的形式还是有参考意义的。下步有待用方程数值求解来确定类星体质光比变化的函数关系是否可用 1 阶函数逼近。

最后，要感谢最近网上关于科技论文数据验证的再现性的讨论，是这场讨论激励我写了这篇后记。

包学行

2021 年 **2** 月于温州

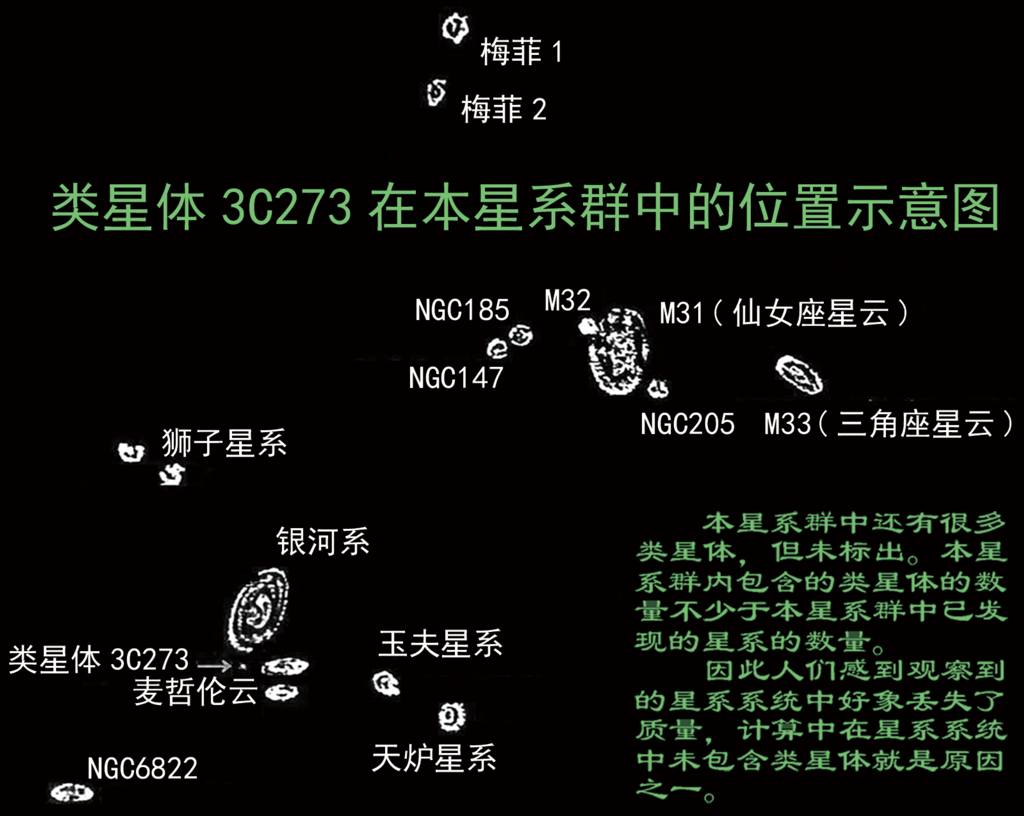
参考文献：

[1] VII/258 quasars and Active Galactic Nuclei (13th Ed.), (Veron+ 2010).

[2] 测光系统转换 u,g,r,I,z---U,B,V,R,I.
http://www.mianfeiwendang.com/dr5/algorithms/sdssUBVRITransform.html

[3] SMARTS Optical/IR Observations of Fermi Blazars.
http://www.astro.yale.edu/smarts/glast/tables/3C273.tab

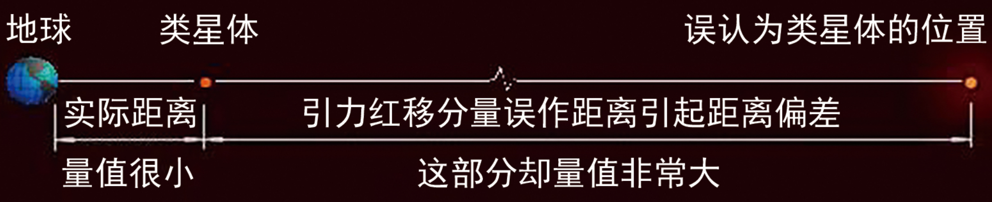
类星体 3C273 在本星系群中的位置示意图



本星系群中还有很多类星体，但未标出。本星系群内包含的类星体的数量不少于本星系群中已发现的星系的数量。

因此人们感到观察到的星系系统中好象丢失了质量，计算中在星系系统中未包含类星体就是原因之一。

引力红移分量引起距离误差示意图



$0.00
ISBN 978-1-61896-792-3
50000
9 781618 967923