

三个悖论问题在概率论与数理统计教学中的讨论

陈照辉¹, 汪 源²

¹重庆科技学院数理与大数据学院, 重庆

²重庆科技学院马克思主义学院, 重庆

Email: z.chen@cqust.edu.cn

收稿日期: 2021年5月13日; 录用日期: 2021年6月14日; 发布日期: 2021年6月21日

摘 要

在概率论与数理统计课程中, 有关条件概率的全概率公式和贝叶斯公式是概率计算的重要内容。三个概率悖论问题被列举出来并用贝叶斯公式解决, 用于概率论与数理统计教学中, 引发学生思考问题, 激发学生学习兴趣, 使学生体会直觉思维犯错和用数据说话的可靠性。

关键词

贝叶斯公式, 悖论问题, 伯特兰德金币问题, 蒙提霍尔问题, 三囚犯问题

Discussion of Three Paradoxes in the Teaching of Probability Theory and Mathematical Statistics

Zhaohui Chen¹, Yuan Wang²

¹School of Mathematics, Physics and Data Science, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing

²School of Marxism, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing

Email: z.chen@cqust.edu.cn

Received: May 13th, 2021; accepted: Jun. 14th, 2021; published: Jun. 21st, 2021

Abstract

The total probability and Bayes formula based on conditional probability, in the course of Probability Theory and Mathematical Statistics, are important for computing probability. Three proba-

bilistic paradox problems were enumerated and solved by Bayes formula. They are employed in the teaching of Probability Theory and Mathematical Statistics to stimulate students to think, pay attention to learning, make sense intuitive mistakes, and understand the reliability of using data to make decision.

Keywords

Bayes Formula, Paradox Problem, Bertrand's Box Paradox, Monty Hall Problem, Three Prisoners Problem

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在概率论与数理统计课程的学习过程中, 全概率公式和贝叶斯公式是概率计算中重要的内容, 我们常常会用实际问题来引出这两个重要的公式, 如抓阄是否公平的问题。为了提高学生学习的兴趣和掌握这两个公式的应用, 在课堂上可以提出以下概率悖论问题中的一个或多个供同学们讨论思考。首先我们把这三个问题再描述出来如下。

2. 三个悖论问题描述

2.1. 伯特兰德金币问题(Bertrand's Box Paradox)

伯特兰德悖论问题是法国数学家 Joseph Bertrand 于 1889 在 Calcul des probabilités 中提出的[1]。该问题描述为有三只盒子, 一只盒子里装有 2 枚金币, 一只盒子里装有 2 枚银币, 还有一只盒子里装有 1 枚金币和 1 枚银币。问题是随机选出一只盒子, 再从中随机取出一枚硬币, 假设取出的是一枚金币, 那么这只盒子里还有一枚金币的概率为多大?

2.2. 蒙提霍尔问题[2] (Monty Hall Problem)

蒙提霍尔问题又称三门问题、羊车问题是基于伯特兰德问题发展出来的。该问题曾在美国一档有名的电视节目叫 Let's Make a Deal 中得以应用, 从而引起了广泛关注, 问题的命名源自该电视节目主持人的名字 Monty Hall。该问题描述为假设你正在参加一个游戏节目, 有三扇门, 其中一扇门后面有一辆车, 其余两扇门后面各有一只山羊, 你要从三扇门中任意选择一扇, 选中门后面的车或羊作为奖品, 当你选择了一道门, 不管门后是什么, 剩余的两扇门中至少有一扇门后是山羊, 这时主持人总会开启一扇后面有山羊的门。然后主持人会说再给你一次选择的机会, 你要改变原来的选择吗?

2.3. 三囚犯问题[3] (Three Prisoners Problem)

监狱的死囚牢里关押了 A、B、C 三个囚犯, 狱长决定赦免三人中的一人, 并且随机地选择一人作为被赦免人。他将自己的选择告诉监狱看守, 但是要求看守几天之内不能泄露被赦免人的姓名。第二天, A 问看守谁被赦免了, 看守拒绝回答。A 接着又问看守: B 和 C 两人中哪一个被处死? 看守想了一会, 告诉他 C 将被处死。看守推理三个囚犯被赦免的概率一样, 显然, B 和 C 中至少有一个将被处死, 所以他没有向 A 透露有关 A 是否被赦免的任何消息。A 推理已知 C 将被处死, 那么 A 和 B 当中必有一人将

被赦免, 所以 A 被赦免的概率增加到了 1/2。A 的推理是否正确?

3. 教学中的讨论

这三个悖论问题直观上容易理解, 但是若要用课堂上所学习的全概率公式这一节内容去做概率计算, 对于初学者来说也是困难的。在课堂教学中, 学习了条件概率基本概念之后, 通过一个简单例子引入全概率公式, 进而引入贝叶斯公式。为了活跃课堂气氛, 引发学生积极思考问题, 也为了使加深学生对全概率公式和贝叶斯公式的理解和应用, 接下来提出伯特兰德金币问题供同学们思考, 一般情况下, 一两分钟之后地, 学生理解了题便会给出结果为 50%。理解过程大概是这样的: 由于取出的是一枚金币, 因此所选的盒子不可能是装着 2 枚银币的那个盒子, 只能是装着 2 枚金币或者一金一银的盒子, 剩下一枚是金币的概率既是选出装到有 2 枚金币盒子的概率, 所以是 50%。然后, 利用所学的全概率公式和贝叶斯公式对该问题进行分析求解, 具体求解过程见 4.1。得到结果为 2/3, 由此告诉同学们我们的直觉是错误的, 悖论问题是反直觉的。所以, 在解决实际问题时, 决策之前或者下结论之前需要用数据支撑。

接下来课堂上观看电影《决胜 21 点》中有关蒙提霍尔问题片段, 请同学们思考蒙提霍尔问题, 感受该问题与伯特兰德金币问题的相似之处, 并理解电影中主持人回答变量改变引起概率变化和教授的台词“大多数人不会改变选择, 因为偏执、恐惧和感情用事”。把感情放到一边, 做出正确选择, 也就是我们所说的理性。最后, 把三囚犯问题留给学生自己解答。

4. 贝叶斯公式求解三个悖论问题

本部分不讨论在其它论文中解决这些问题的方法, 也不探讨在其它论文中解决问题的对错。只是借助于概率论与数理统计课程学习过程中的条件概率, 说明这三个问题之间有相似和不同之处, 并用贝叶斯公式得以解决, 以供教师教学或学生学习参考。

4.1. 伯特兰德金币问题求解

随机事件用符号表示, GG 表示选中里面有 2 枚金币的盒子, SS 表示选中里面有 2 枚银币的盒子, GS 表示选中里面有一枚金币一枚银币的盒子, A 表示取出一枚金币。易知, GG、SS 和 GS 三个随机事件是等可能出现的, 即 $P(GG)=1/3$, $P(SS)=1/3$, $P(GS)=1/3$ 。并且还知道后验概率 $P(A|GG)=1$, $P(A|GS)=1/2$, $P(A|SS)=0$ 。我们关心的概率是 $P(GG|A)$, 所以, 由贝叶斯公式

$$P(GG|A) = \frac{P(A|GG)P(GG)}{P(A|GG)P(GG) + P(A|GS)P(GS) + P(A|SS)P(SS)} = \frac{2}{3}$$

即若取出了一枚金币, 这只盒子里还有一枚金币的概率为 2/3。

4.2. 蒙提霍尔问题求解

该问题中涉及到的随机事件用符号表示, A_i 表示第 i 扇门后有车, B_i 表示主持人打开第 i 扇门, C_i 表示游戏参与者选择打开第 i 扇门。则根据题意, 则根据题意 A_i 和 C_j 是独立的, 所以已知 $P(A_i|C_j)=P(A_i)=1/3$, $i, j=1, 2, 3$; 也有 $P(C_j|A_i)=P(C_j)=1/3$, 和 $P(C_j A_i)=P(C_j)P(A_i)=1/9$ 。所以, 不论游戏参与者选择打开哪扇门都不影响我们的分析。不妨假设游戏参与者选择了第一扇门, 接下来我们首先计算主持人打开第三扇门的概率, 即 $P(B_3 C_1)$ 。

因为参与者选择了第一扇门, 如果车在第一扇门后面, 主持人接下来以等可能概率打开第二扇门和第三扇门, 即 $P(B_2|A_1 C_1)=1/2$, $P(B_3|A_1 C_1)=1/2$; 如果车在第二扇门后面, 主持人只有打开第三扇门, 即 $P(B_3|A_2 C_1)=1$; 如果车在第三扇门后面, 则主持人不会打开第三扇门, 即 $P(B_3|A_3 C_1)=0$ 。再由乘

法公式和条件概率公式也可得 $P(B_3C_1|A_1)=1/6$, $P(B_3C_1|A_2)=1/3$, $P(B_3C_1|A_3)=0$ 。所以, 由全概率公式可得

$$P(B_3C_1) = P(B_3C_1|A_1)P(A_1) + P(B_3C_1|A_2)P(A_2) + P(B_3C_1|A_3)P(A_3) = 1/6$$

根据贝叶斯公式计算游戏参与者坚持选择第一扇门获得车的概率为:

$$P(A_1|B_3C_1) = \frac{P(A_1B_3C_1)}{P(B_3C_1)} = \frac{P(B_3|A_1C_1)P(A_1C_1)}{P(B_3C_1)} = \frac{1}{3}$$

游戏参与者改变原来的选择, 改为选第二扇门获得车的概率为:

$$P(A_2|B_3C_1) = \frac{P(A_2B_3C_1)}{P(B_3C_1)} = \frac{P(B_3|A_2C_1)P(A_2C_1)}{P(B_3C_1)} = \frac{2}{3}$$

4.3. 三囚犯问题求解

三囚犯问题与三门问题是一样的。三囚犯问题中某人被赦免对应于三门问题中某扇门后有车, 囚犯 A 对应于三门问题中游戏参与者选择第一扇门, 囚犯 C 将被处死对应于三门问题中主持人打开有羊的门。根据三门问题的解法, 可得囚犯 A 被赦免的概率为 $1/3$, 囚犯 B 被赦免的概率为 $2/3$ 。

5. 总结

本文用贝叶斯公式对伯特兰德金币问题、蒙提霍尔问题和三囚犯问题的解法进行了分析。这三个问题的相似之处在于它们都是反直觉的, 蒙提霍尔问题和三囚犯问题从数学上来说是一个问题, 它们比伯特兰德金币问题更为复杂。比伯特兰德金币问题中, 在做概率计算时只有一个条件, 即取到金币。而在蒙提霍尔问题和三囚犯问题中, 条件有两个, 以三门问题为例来说, 在游戏参与者选择一扇门条件下, 和主持人选择一个山羊门的条件下求相应事件的概率。将三个问题应用于概率论与数理统计教学过程中, 能够激发学生思考、讨论, 帮助学生掌握理解贝叶斯公式及其应用。同时, 也可借助这些悖论问题, 对学生进行道德教育, 工作中遇到一些决策问题不是凭直觉拍板, 而是要保持理性。

基金项目

2020 年重庆科技学院本科教育教学改革研究项目(编号: 202045)。

参考文献

- [1] Miller, F.P., Vandome, A.F. and MCBrewster, J. (2010) Bertrand's Box Paradox. Betascript Publishing, Beau Bassin.
- [2] Selvin, S. (1975) Letters to the Editor: A Problem in Probability. *American Statistician*, **29**, 67.
<https://doi.org/10.1080/00031305.1975.10479121>
- [3] Casella, G. and Berger, R.L. (2001) Statistical Inference. 2nd Edition, Cengage Learning, Boston, Massachusetts.