

核心素养下的同课异构

——“椭圆的标准方程”教学实践与反思

丁丽杉, 蒋书杰, 凌嘉宇, 吴欣桐, 于佳欣

上海师范大学数学系, 上海

收稿日期: 2021年11月17日; 录用日期: 2022年1月19日; 发布日期: 2022年1月27日

摘要

《普通高中数学课程标准》2017版强调培养学生的数学核心素养, 教师需关注学生的长远发展, 在教法上注意贴合新课改的核心理念, 在教学中渗透数学思维和思想方法, 切实提升学生的综合能力, 以达到育人目标。以“椭圆的标准方程”一课的同课异构为例, 探讨什么是核心素养下好的数学课堂。

关键词

数学核心素养, 椭圆的标准方程, 同课异构

The Differentiated Teaching Followed the Core Literacy

—Teaching Practice and Reflection on the “Standard Elliptic Equation”

Lishan Ding, Shujie Jiang, Jiayu Ling, Xintong Wu, Jiaxin Yu

Department of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai

Received: Nov. 17th, 2021; accepted: Jan. 19th, 2022; published: Jan. 27th, 2022

Abstract

The 2017 edition of China's high school mathematics curriculum standards focuses on promoting students' core mathematical skills and their long-term development. Teachers should incorporate the core concepts of the new curriculum reform into teaching methods and integrate mathematical thinking and reasoning into lessons to improve students' comprehensive skills and achieve educational goals. This paper discusses what is a good mathematics classroom under the core literacy by taking the isomerism of “standard equation of Ellipse” as an example.

Keywords

Core Literacy of Math Discipline, Standard Elliptic Equation, Differentiated Teaching

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在平面解析几何中，圆锥曲线占据了一席之地，圆锥曲线始于古希腊“立方倍积”问题的提出，时至今日，它依旧在我们的日常生活以及科学技术领域占据着重要的地位，学习圆锥曲线在现代社会的重要性可见一斑。圆锥曲线主要分为三部分：椭圆、双曲线、抛物线。如今高中数学课本教材的编排顺序均为从椭圆到双曲线到抛物线。椭圆作为圆锥曲线的起始内容，从知识上说，本节课是对坐标法研究几何问题的又一次实际运用，同时也是进一步研究椭圆几何性质的基础。从方法上说，它为进一步研究双曲线、抛物线提供了基本模式和理论基础。下面通过两种不同的教学设计进行分析，仅供参考。

2. 两种教学设计

2.1. 定义出发——学生动手画椭圆

第一，创设情境，引入概念

- 1) 生活联想，有哪些是椭圆图形？
- 2) 实物演示：圆柱形水杯倾斜时的水面的轮廓。

思考：椭圆是满足什么条件的点的轨迹呢？

第二，实验探究，形成概念

- 1) 动手实验：以学生研究为主，教师辅助在黑板上尝试用绳子和胶带，动手画出椭圆。

探究 1：取一条定长的细绳，把它的两端用胶带都固定在黑板的同一点处，套上铅笔，拉紧绳子，移动笔尖，这时笔尖画出的轨迹是什么曲线？见图 1。

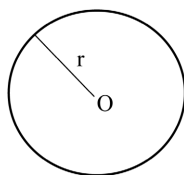


Figure 1. Circle

图 1. 圆

探究 2：如果把绳子的两端分别固定在两处，套上铅笔，拉紧绳子，移动笔尖，这时笔尖画出的轨迹是什么曲线？见图 2。

思考 1：作图时，哪些是动点，哪些是定点，动点在运动过程中，动点到两定点距离和符合什么条件？动点在什么样的条件下形成的轨迹才是椭圆？

设计意图：学生从感知椭圆形状的物体，到自己动手画椭圆图形，学生经历了从直观想象到动手实验的过程，再通过实验探究过程中与圆的类比，得到椭圆中的不变关系，为得到椭圆的定义做了铺垫。

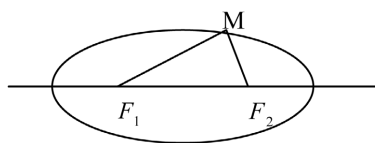


Figure 2. Ellipse
图 2. 椭圆

2) 引导学生概括椭圆定义

在平面内与两个定点 F_1, F_2 距离的和等于常数的点的轨迹叫椭圆。这两个定点叫椭圆的焦点，两焦点的距离叫椭圆的焦距(得出不严谨的定义)。

思考 2: 要想用上面那句话作为椭圆的定义, 要保证它足够严密、经得起推敲。那么, 这个常数可以是任意正实数吗? 有什么限制条件吗?

3) 通过例题完善定义

例 1: 下列动点 M 的轨迹是否为椭圆?

(1) 到 $F_1(-2,0), F_2(2,0)$ 的距离之和为 6 的点 M 的轨迹;

解: $2a > |F_1F_2|$, 轨迹是椭圆。

(2) 到 $F_1(-2,0), F_2(2,0)$ 的距离之和为 4 的点 M 的轨迹;

解: $2a = |F_1F_2|$, 轨迹是线段 F_1F_2 。

(3) 到 $F_1(-2,0), F_2(2,0)$ 的距离之和为 2 的点 M 的轨迹。

解: $2a < |F_1F_2|$, 轨迹不存在。

综上, 归纳总结椭圆的严谨定义: 在平面内与两个定点 F_1, F_2 距离的和等于常数(大于 $|F_1F_2|$) 的点的轨迹叫椭圆。这两个定点叫椭圆的焦点, 两焦点的距离叫椭圆的焦距。

设计意图: 学生经历了从直观感知到科学分析的一般过程, 自己发现问题, 不断完善并修正结论, 学生从中感知到数学的严密性与科学性, 提高对事物抽象概括能力, 逻辑思维能力。

第三, 研讨探究, 推导方程

1) 知识回顾: 利用坐标法求曲线方程的一般方法和步骤是什么?

2) 研讨探究

已知焦点为 F_1, F_2 的椭圆, 且 $|F_1F_2| = 2c$, 对椭圆上任一点 M , 有 $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, 尝试推导椭圆的方程。

师: 如何建立坐标系, 使求出的方程更为简单?

按方案一建立坐标系, 师生研讨探究得到椭圆的标准方程。见图 3。

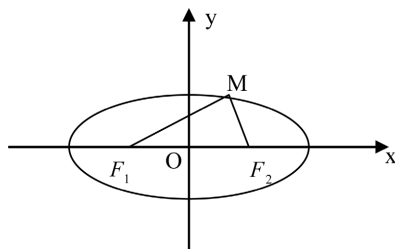


Figure 3. Plan A
图 3. 方案一

① 建系: 以 F_1, F_2 所在直线为 x 轴, 以线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴, 建立直角坐标系。

② 设点：设 $M(x, y)$ 是椭圆上任意一点，为了使 F_1, F_2 的坐标简单以简化化简过程，设 $|F_1F_2| = 2c (c > 0)$ ，则 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 。

设 M 与两定点 F_1, F_2 的距离的和等于 $2a$

③ 列式： $|MF_1| + |MF_2| = 2a$

$$\therefore \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

④ 化简：(提问：根式如何化简?)

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

两边平方，得： $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$
即 $a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

两边平方，得： $a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$

整理，得： $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

令 $a^2 - c^2 = b^2 (b > 0)$ ，则方程可简化为： $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

整理成： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 。

⑤ 证明：椭圆上的点满足方程，方程的根也是椭圆上的点。(学生自主思考，课后证明)

方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 叫做椭圆的标准方程，焦点在 x 轴上，其坐标是 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ，其中 $c^2 = a^2 - b^2$ 。

让按照方案二推导椭圆标准方程的同学发言得出： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 为椭圆的另一标准方程。见

图 4。

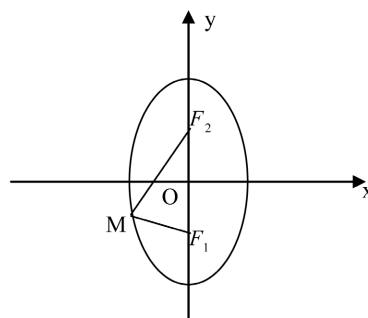


Figure 4. Plan B
图 4. 方案二

学生思考：除了建系法，还能用什么方法求椭圆的标准方程？(和差术，三角换元法等……)

设计意图：当学生们对于椭圆的表象认识已经开始完善时，再以论证和演绎的形式向学生讲授系统的椭圆方程，完成椭圆方程的证明。通过计算椭圆方程，使学生体会数学的简洁美、对称美，培养学生的数学运算核心素养。

2.2. 趣味创造——HPM 与折纸结合

第一，创设情境，引入概念

古时候，数学家发现用平面去截圆锥，可以得到不同图形。这类可以截取出来的图形——圆，椭圆，双曲线，抛物线统称圆锥曲线。

圆锥曲线在日常生活中也有广泛的应用。例如天体运行轨道是椭圆；自然通风冷却塔的形状是双曲线；世界上最大的射电望远镜的形状是抛物线……

今天这节课首先认识椭圆，沿着人类认识、研究椭圆的历程进行椭圆的学习。

设计意图：通过生活中的实例引入，让学生在无意识中认识椭圆，知道椭圆学习的重要性，引起学生学习的兴趣。

第二，初步认识：椭圆的定义

公元前四世纪，古希腊人通过削尖的圆木桩发现椭圆。

而后，柏拉图的学生梅内克缪斯在研究“倍立方”问题中无意得到圆锥曲线，经研究他发现：利用正圆锥，得到椭圆上任意一点 M 向直径 AB 引垂线，垂足为 Q ，则 $\frac{|MQ|^2}{|AQ||BQ|} = \frac{3}{2}$ ——椭圆的性质[1]。见

图 5。

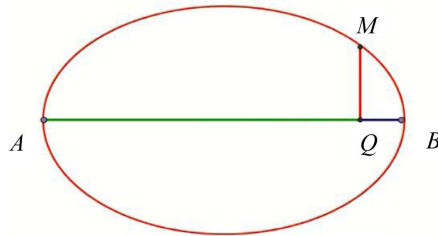


Figure 5. Properties of ellipse
图 5. 椭圆的性质

师：他想要把椭圆的这一性质作为椭圆的定义，但当时的数学家对此并不满意，大家知道为什么吗？圆的定义是什么？

生：平面内，到定点的距离为定长的点的轨迹。

相比之下，椭圆的性质就太复杂了，因此，大约 60 年后，数学家阿波罗尼斯将这个性质进一步推广得到椭圆更加简洁明了的性质，后人将其作为椭圆的定义。

折纸[2]：(学生动手，教师 GeoGebra 演示)

1) 在圆纸上的边界任意找一点 A ，圆纸盘内找一点异于 F_1 一点 F_2 ，将 A 和 F_2 重合，按出折痕，将折痕与半径 F_1A 的交点记作 M ；(见图 6)。

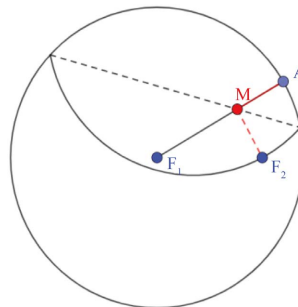


Figure 6. Step 1
图 6. 步骤一

2) 然后再将 A 点沿着圆移动, 形成新的点 A_2 , 再和 F_2 重合, 形成的折痕与半径 F_1A_2 的交点记作 M_2 ; (见图 7)。

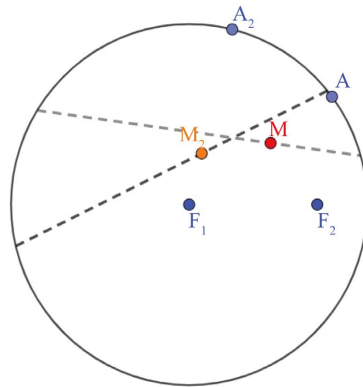


Figure 7. Step 2
图 7. 步骤二

3) 不断重复上述操作, 可以得到一个“椭圆”形状的图形(见图 8)。

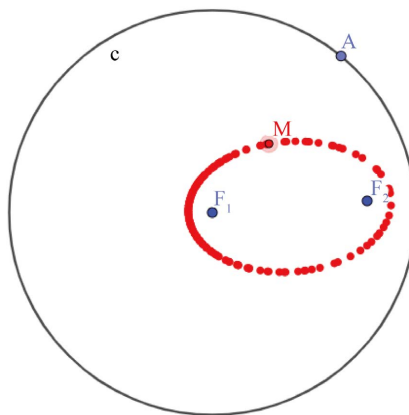


Figure 8. Step 3
图 8. 步骤三

(折纸)问题:

教师: 通过折纸与 GeoGebra 演示, 有没有定点, 定距离?

学生: 定点为 F_1 、 F_2 ; 定距离为 $|AF_1|$ 和 $|MF_1| + |MF_2|$ 。

教师: 那么, M 点和两个定点能不能由定距离联系在一起?

学生: M 点到两定点的距离和是定距离。

教师: 总结: M 点始终具有到 F_1 、 F_2 的距离和不变的性质。

学生: 椭圆的定义: 平面内到两定点 F_1 、 F_2 的距离的和为常数 $2a$ 的动点的轨迹叫椭圆。(得出不严谨的定义)

通过例题完善定义。

设计意图: 在了解椭圆的基本形状后, 借助 HPM 的教学方式, 让学生了解椭圆定义的来之不易, 最

后借助折纸,帮助学生理解椭圆最简洁的定义,使学生感受数形结合的思想。通过对认识新事物的重演,从简单到复杂,从表象到本质的过程,学生的数学抽象,直观想象数学素养得到很好的锻炼。

第三,进一步认识:椭圆的标准方程

继续跟随数学家的脚步,公元17世纪,笛卡尔的《几何学》诞生,数学家通过用数去量化集合图形这一方法推导计算出椭圆的方程[3]。

设计意图:再次借助 HPM 的教学方式,使学生感受到古代数学家们的聪慧,并激起他们的求知欲,使数学学习更有活力。

3. 反思

对学生而言,两种教学方式各有所长,第一种教学方式着重于让学生通过类比圆的定义,自己动手感知椭圆的定义,在画椭圆的过程中提炼出其中蕴含的数学知识,培养学生的数学抽象核心素养。不同于一般教学直接给出完整定义,在学生得到不严谨的椭圆定义后,通过例题,让学生反复修正自己的结论,最后形成科学严谨的定义,培养学生对数学学习严谨的态度,在日后探究数学问题时更仔细更细心。总而言之,本堂课在核心素养的背景下,重在培养学生的数学学习习惯,学生在不断的实际操练中逐渐掌握对椭圆的学习。

第二种教学方式借助 HPM 教学理念,带领学生走入课堂,通过折纸等趣味活动,使学生在初认识时便对椭圆有了强烈的好奇,在好奇心的驱使下,追随古人研究椭圆的步伐,科学的论证椭圆的标准方程,本堂课通过学生对知识的好奇,通过数学文化和趣味折纸引导学生用数学眼光看待世界,用数学思维思考世界,用数学语言表达世界。

《普通高中数学课程标准》(2017版)[4]指出通过平面解析几何的学习,可以帮助学生感悟平面解析几何中蕴含的数学思想。

两种教学方式都符合新课改下的教学理念,都可以帮助学生感悟平面解析几何中蕴含的数形结合思想,都能培养学生的直观想象、数学运算、逻辑推理、数学抽象等核心素养,都做到了以学生为主体,教师主导的课堂关系,学生在学习过程中,教师只起到引领作用,学生以自我为主体,主动学习。

相同的知识,不同的教学设计、教学策略。第一种教学设计强调类比的数学思想,带领学生动手感知椭圆,注重培养数学思维与数学学习习惯;第二种教学设计突出数学史的主线,引导学生在折纸中感知椭圆,并借助 *gogebra* 等教学手段完善椭圆的形成,注重培养学生的数学文化和创新意识[5]。

在实际教学中,教师需根据学生的实际需要选择不同的教学方式,因材施教。“一切为了学生,为了一切学生,为了学生的一切”,新课改下的教师要在传授知识的过程中,培养学生的数学学习习惯和数学思维,同时把教育活动变得有趣、富有感情色彩,不仅要注重当下的教学知识,更要将眼光放在未来的学生发展。

参考文献

- [1] 文贵双. HPM 视角下椭圆定义教学的心路历程[J]. 中学数学, 2021(3): 83-85.
- [2] 罗德建, 伍春兰. 核心素养视域下的“椭圆及其标准方程”的教学改进[J]. 数学通报, 2019, 58(5): 40-44.
- [3] 张红, 王军. 坐标概念的历史与椭圆方程的发展[J]. 数学通报, 2021, 60(4): 15-21.
- [4] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018: 4-5.
- [5] 刘连英. “同课异构”精彩课堂之思考与探究[J]. 数学学习与研究, 2021(19): 38-39.