

把握数学本质，提升数学抽象能力

邓霞玉，龙文高*

湖南科技大学数学与计算科学学院，湖南 湘潭

收稿日期：2022年4月18日；录用日期：2022年5月24日；发布日期：2022年5月31日

摘要

抽象性是数学的一个重要特性，其贯穿于数学知识的产生、发展和应用的全过程。挖掘数学本质、领会数学思想方法是培养以及提升学生数学抽象能力的重要方式。本文以如何提升数学抽象能力为主线，首先分析数学抽象能力的相关概念及教育价值，然后从概念、命题、数学思想方法和数学结构四个方面挖掘数学本质，最后结合教学实例提出若干提升数学抽象能力的方法，希望能为培养学生的数学抽象能力提供有用的建议。

关键词

抽象性，数学抽象能力，数学本质

Grasp the Essence of Mathematics and Improve the Ability of Abstraction

Xiayu Deng, Wengao Long*

School of Mathematics and Computational Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan

Received: Apr. 18th, 2022; accepted: May 24th, 2022; published: May 31st, 2022

Abstract

Abstraction is an important feature of mathematics, throughout the whole process of the birth, development and application of mathematics. Mining the essence of mathematics and comprehending the mathematical ideas are important ways to cultivate and improve students' mathematical abstraction ability. This paper focuses on how to improve mathematical abstraction ability. We first analyze the related concepts and educational value of mathematical abstraction ability, and then explore the essence of mathematics from four aspects: concept, proposition, mathematical thought

*通讯作者。

methods and mathematical result. Finally, combined with teaching cases, some methods to improve mathematical abstraction ability are proposed. It is hoped that this paper can provide useful suggestions for cultivating students' mathematical abstraction ability.

Keywords

Abstraction, Mathematical Abstraction Ability, Mathematical Essence

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 数学抽象能力的相关概念及教育价值

1.1. 数学抽象能力的相关概念

数学抽象是指在具体的情境中,从具体事物或原有知识出发,抽象出数学对象的过程[1]。《普通高中数学课程标准(2017年版)》(下称“新课标”)将数学抽象素养置于六大核心素养之首,进一步强调了它的重要性。而数学核心素养的本质是关键性的数学能力,生成的本源是知识[2]。因此培养学生数学抽象素养关键是在知识的学习中培养学生的数学抽象能力。

1.2. 数学抽象能力的教育价值

抽象性是数学的重要标志,不论是数学的研究对象,数学活动或是数学结论,抽象无处不在。抽象是数学的基本思想,是形成理性思维的基础,反映了数学的本质[3]。一方面学生学习高中数学知识需要具备一定的抽象能力;另一方面,在学习数学知识的过程中,学生的数学抽象能力也得到了发展。在学习过程中,通过充分挖掘知识本质,领会知识的形成过程,把握数学思想方法,提升数学抽象能力。学生的数学抽象能力的水平不仅是学好高中知识的一个重要标志,更是发展创造性思维的前提,透过现象看本质,深入把握问题,发展创新思维,因此在教学中培养学生的数学抽象能力具有重要的教育价值。以下从数学本身的特点、课程目标的要求、社会发展的需要三个角度来考虑。

1.2.1. 数学本身的特点

数学具有高度抽象性,无论是数学概念、原理等知识的形成,数学内部的发展或应用。学生学习数学知识,一方面要具有一定的抽象能力才能掌握知识的本质;另一方面,在学习数学知识过程中,数学抽象思维能力也能得到极大地提升。学习数学知识对培养学生数学抽象能力非常重要。

1.2.2. 课程目标的要求

新课标指出,通过数学的学习,培养数学核心素养,让学生学会用数学的眼光观察世界,用数学思维思考世界,用数学语言表达世界[4]。数学的眼光就是数学抽象和直观想象,因此要注重数学抽象能力的培养。根据皮亚杰的认知发展理论,高中生正处于形式运算阶段,抽象思维正迅猛发展并趋于成熟,因此课程目标的要求符合学生的发展规律,具有科学性和可行性。

1.2.3. 社会发展的需要

随着信息化社会的迅猛发展,数学在人们的生产和生活中发挥着越来越重要的作用。一方面,社会

对于人才的渴求已从“知识型人才”转向为“创新型人才”。社会不再只需要具备深厚学识的人,更渴望具有创新意识和创造思维的人才,把握数学的本质,将知识融会贯通,有强烈的问题意识和反思精神,才能培养出创造性思维。数学抽象能力是培养创新思维的基础,良好的数学抽象能力才能准确把握知识本质及内在逻辑,构建自己对知识的理解。另一方面,现代社会是一个纷繁错杂的真实情境,学生在学习数学过程中发展抽象能力,形成自己的思考方式,并将思想方法迁移到解决生活的实际问题中,有利于透过现象看本质,形成自己的判断和见解。

2. 数学抽象能力的培养策略

数学抽象能力是在知识的学习中生成并发展起来的。高中生正处于抽象能力发展的关键期,准确把握学生认知基础,通过充分挖掘数学知识本质,引导学生培养数学抽象能力极为重要。高中阶段的数学知识大都由概念和命题构成,因此可以从数学的概念学习、命题学习、思想方法的挖掘及知识结构的构建四个角度分析如何帮助学生提升数学抽象能力。

2.1. 在概念学习中,培养数学抽象能力

数学概念是数学知识的核心,数学的原理、法则等都是由概念延伸得到。数学概念的抽象有两个层次,即数学外部抽象和数学内部抽象[5]。概念的抽象具有阶段性,要做到数学内部发展的逻辑性和学生认知规律的统一。概念的学习方式主要是形成和同化,概念的形成是以情境为背景,以具体实例为依托,归纳、抽象出本质属性,重视学生自主探究,与布鲁纳的“发现学习”一致;概念的同化是直接给出新概念,形成认知冲突,通过建立新旧知识的联系,改变原有认知结构,与奥苏泊的“有意义的接受学习”一致[6]。概念的形成更加强调学生的参与,让学生经历概念抽象的过程,这更利于挖掘知识本质,培养学生的能力。引用章建跃教授的观点,概念的形成的教学环节分为:创设问题情境→共性分析及概括本质属性→下定义→定义辨析→概念初步应用→概念“精致”[7]。让学生经历完整的概念形成过程,把握本质,掌握概念形成的一般模式,学会抽象出概念,有利于培养学生的数学抽象能力。以高中函数的概念教学为例,阐述如何在概念教学中培养学生数学抽象能力(见表1)。

Table 1. Teaching the concept of functions

表 1. 函数的概念教学

教学环节	教学过程	设计意图(培养策略)
1) 创设问题情境	情境 1 初中函数概念的局限性 情境 2 四个问题情境(高铁路程与时间关系、员工工资与时间关系;某城市一天的空气质量与时间关系、某省恩格尔系数与年份关系)	通过创设问题情境,提供刺激。 (提供抽象背景)
2) 共性分析	由具体情境类比、归纳出共同点。	一方面让学生意识到数学概念来源于生活又高于生活;另一方面为抽象出“函数”的概念奠定基础。(初步归纳、抽象)
3) 确定本质属性	总结、抽象出问题本质属性,排除非本质属性。	将抽象出的本质属性进行归纳,为“函数”概念的建立脚手架。(抽象函数的本质)
4) 下定义及符号化	用数学语言进行概括,得出函数的三要素及符号语言。	概念得出,对学生的语言概括能力及抽象能力有较高的要求(抽象能力进一步发展)
5) 概念辨析及应用	设置判断题及概念应用题	强化概念

表 1 中的函数的概念教学过程, 大致与章跃建教授提出的概念教学程序一致。第一, 创设情境, 提供刺激模式, 为抽象出函数的概念提供背景; 第二, 通过共性分析归纳出不同问题情境中的共同点; 第三, 进一步抽象出本质属性, 为归纳出函数的概念建立“脚手架”; 第四, 用数学语言给函数的概念下定义及符号化, 注意规范和简洁; 第五, 进行概念辨析和应用, 进一步强化学生认知结构中的函数概念。这五个阶段既符合知识内在产生的逻辑, 又符合学生的认知规律, 以学生抽象为主, 教师引导。

通过归纳、抽象出概念, 让学生经历完整的数学概念的形成过程, 充分挖掘函数概念的本质, 有助于帮助学生构建自己对知识的理解, 并在学习的过程中培养学生的数学抽象能力。在概念形成之后, 注意让学生继续经历概念的判别、概念的应用以及将函数概念推广到具体的情况(如: 一次函数、二次函数、反比例函数)。让学生经历函数从具体到抽象、再从抽象到具体, 在函数概念的形成中培养抽象能力。

2.2. 在命题学习中, 锻炼数学抽象能力

命题是能判断真假的陈述语句, 由概念构成, 包括: 公式、定理、法则等。从学习的层次上讲, 数学命题比数学概念更复杂。命题的学习分为: 呈现式、发生式, 其中发生式是以问题情境为导向, 以问题串为脉络, 学生主动探索、领会和发现命题[6]。命题的学习是一个不断提出问题, 解决问题的过程, 逻辑性强。以“问题串”的形式, 将核心知识连成一条逻辑主线, 引导学生逐渐得出命题, 学生通过层层递进, 把握命题的本质, 不断锻炼数学抽象能力。以“等差数列前 n 项和公式”的教学为例进行阐述(见表 2)。

Table 2. The first n terms and formulas of the equal difference series

表 2. 等差数列前 n 项和公式

教学环节	教学过程	设计意图(培养策略)
1) 设置问题情境	引出数学家高斯的故事, 让学生初步认识到 $1+2+3+\dots+100$ 配对相加的计算方法带来的便利。	数学史既增加学生学习的趣味性, 又提供配对相加的计数方法。从具体到抽象, 为学生推导出等差数列前 n 项和公式搭建“脚手架”。(设置数学抽象的情境)
2) 构建认知冲突	让学生用同样的方法计算 $1+2+3+\dots+100+101=?$	基于已有的认知基础, 让学生产生认知冲突, 明确“添数”和“减数”的必要性, 为推广到一般情况奠定基础。(数学抽象能力的初步发展)
3) 问题一般化	1) 求 $1+2+\dots+n=?$ 2) 有更简便的计算方法吗?	从具体到抽象, 学生自主探究将项数分奇偶两种情况来讨论, 求出等差数列前 n 项和公式。教师启发学生引出“倒叙相加法”并验证。(提出命题并验证, 进一步抽象化)
4) 得出命题	归纳、抽象出两个等差数列前 n 项和公式, 并从“几何”的角度进行证明, 深入挖掘公式本质。	通过总结归纳构建知识体系, 并从“代数”和“几何”两个角度深度挖掘知识本质, 帮助学生进行再创造。(抽象能力进一步得到发展)

表 2 中等差数列前 n 项和公式的推导过程是一个不断地“提出猜想 - 验证猜想 - 修正猜想”过程, 从“特殊到一般”得出公式, 把握命题的本质。首先, 借助高斯的故事创设数学抽象的问题情境, 渗透配对相加的思想; 其次, 构建认知冲突, 让学生明确“添数”和“减数”的必要性, 发展学生的抽象能力; 再次, 从具体到一般, 得出“倒序相加法”思想, 为抽象出概念奠定基础; 最后, 得出命题, 并从“代数”和“几何”的角度深入剖析该命题的本质。

在整个教学过程中,教师要准确的把握学生的最近发展区,既要帮助学生,又要为学生的思考留有余地,因此要注重语言及问题的引导,提出的问题串要有针对性、层次性、启发性,如:如果这串数增加一项呢?如何解决奇数项相加不能配对的问题?如果把项数推广到 n 项呢?有没有更简便的方法?还可以从其他角度分析吗?以问题驱动,引导学生把握本质,在整个学习过程中,学生的数学抽象能力也能得到锻炼。

2.3. 构建数学结构, 提升数学抽象能力

数学的结构是数学的骨架,是数学的本质部分。布鲁纳指出:任何一门学科都有其基本结构,它可以建立相关联事物的联系[8]。学生学习的数学知识具有强的关联性,从纵向来看,前面的学习为后面的学习奠定基础,后面的学习为前面的学习进一步巩固和发展。例如,学习了平面向量的基础上再学习空间向量。从横向来看,将认知结构中的相关知识与新学习的知识建立联系,构建知识网络。将数学知识体系化,利于储存在长时记忆中,也利于发现知识之间的关联性。但是在认知结构中进行相关知识的提取、类比、抽象、整合,并深入挖掘知识本质,建构数学结构,具有高度抽象性,学生要具备一定的抽象能力才能办到,同时这也是不断提高并锻炼学生抽象能力的契机。

2.4. 掌握数学抽象方法, 运用数学抽象能力

数学知识是数学的血肉,数学结构是数学的骨架,数学思想方法则是数学的灵魂,没有了灵魂数学就失去了价值。“授人以鱼不如授人以渔”,抽象性是数学的本质特征,学生在学习过程中,通过充分挖掘知识本质,学会数学抽象的一般模式,形成数学思维,将所掌握的方法应用于学习中,在进行抽象的过程中数学抽象能力不断得到提升。例如,学习完函数概念之后,一般会借助图形探究其性质,从一般函数类比到具体函数,幂函数、指数函数、对数函数等。这种研究方式一方面将高中阶段的函数知识串联起来,帮助学生完善其认知结构,另一方面在这一模式下,有利于学生自己去挖掘具体函数及其性质,掌握本质,不断的提升数学抽象能力。教会学生如何学习比教知识更重要,因此在教学中,更要重视学生数学抽象方法的培养,通过学生自主探索,不断地运用和提升数学抽象能力。

基金项目

湖南科技大学教学改革研究一般项目(G32116)。

参考文献

- [1] 张金良. 解密数学抽象,探索教学策略[J]. 数学通报, 2019, 58(8): 23-26+66.
- [2] 喻平. 从PME视角看数学核心素养及其培养[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017(2): 8-12.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京:人民教育出版社, 2018: 4.
- [4] 郭玉峰. 聚焦数学抽象素养和数学问题提出——第二届“中学数学课程与教材国际论坛”综述[J]. 中国数学教育, 2019(24): 3-7.
- [5] 林京榕, 陈清华, 董涛. 数学抽象素养培养策略[J]. 数学通报, 2020, 59(2): 19-22.
- [6] 喻平. 数学教育心理学[M]. 南宁:广西教育出版社, 2015: 200+216-217.
- [7] 章建跃. 数学教育随想录[M]. 杭州:浙江教育出版社, 2017: 519-520+786-787.
- [8] 罗杰姆·布鲁纳. 教学过程[M]. 上海师范大学外国教育研究室,译. 上海:人民大学出版社, 1973: 5-8.