Creative Education Studies 创新教育研究, 2022, 10(12), 3311-3314
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2022.1012513

思维导图在大学数学教学中的应用

赵宏艳

上海工程技术大学数理与统计学院，上海

收稿日期：2022年10月31日；录用日期：2022年12月23日；发布日期：2022年12月30日

摘 要

大学数学类的教材内容科学严谨，概念精准、性质完备，但个别概念出现较为突兀，或者知识点与实际的联系不够。因此，教师需根据教学目标、课程特点和学生情况精心设计教学方式，启发学生积极思考，锻炼思维，拓宽思路，提升兴趣。本文提出了基于思维导图模式的教学方法，以《计算方法》中“最佳平方逼近”一节的教学设计为例，展示了整个教学思路和过程。从作业效果和学生反馈来看，该教学方法取得了较好的教学效果。

关键词

思维导图，数学教学，课程设计

Application of Mind Mapping in College Mathematics Teaching

Hongyan Zhao

School of Mathematics, Physics and Statistics, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai

Received: Oct. 31st, 2022; accepted: Dec. 23rd, 2022; published: Dec. 30th, 2022

Abstract

The teaching materials of university mathematics are scientific and rigorous in content, precise in concept and complete in nature, but some concepts are abrupt or the connection between knowledge points and reality is not enough. Therefore, teachers need to carefully design teaching methods according to teaching objectives, course characteristics and students' situation, so as to inspire students to think actively, exercise and broaden their thinking and enhance their interest. This paper proposes a teaching method based on mind map mode, taking the teaching design of "optimal square approximation" in *Numerical Analysis* as an example to show the whole teaching idea and process. From the perspective of homework effects and students' feedback, the teaching

文章引用: 赵宏艳. 思维导图在大学数学教学中的应用[J]. 创新教育研究, 2022, 10(12): 3311-3314.
DOI: 10.12677/ces.2022.1012513

method has achieved good teaching effect.

Keywords

Mind Map, Mathematics Teaching, Curriculum Design

1. 引言

思维导图是 20 世纪 60 年代英国人托尼 • 巴赞创造的一种笔记方法。与传统的直线记录方法完全不同，思维导图以直观形象的图式建立起各概念之间的联系，它往往是从一个主要概念开始，随着思维的不断深入，逐步建立的一个有序的发散的图。它与我们大脑处理事物的自然方式相吻合，是对思维过程的导向和记录[1] [2] [3] [4]。

高等数学类的教材一般本着严谨科学的态度，从简单知识点出发，层层递进，由此及彼，由浅入深，从个别到普遍，从具体到抽象，发展出一套完整的逻辑链和知识体系。编创人员的精心设计和巧妙构思使得教材内容错落有致、井井有条，讲授也十分通顺流畅。然而，如同精加工农作物一样，精加工的知识可能“口感”更好，但由于精制，一些“营养成分”也流失较多，导致“营养价值”可能没有“粗加工”的高。因此，教学过程中应避免照本宣科，而是结合教学内容、教学目标、课程特点以及学生情况综合考量，“粗细”搭配，精心设计出合适的教学方案。那么，如何设计授课形式呢？接下来，本文以《计算方法》[5]中“最佳平方逼近”一节的课堂教学为例，演示基于思维导图的教学方法。

2. 基于思维导图的教学设计

按照教材上的顺序，在学习最佳平方逼近之前，先要学习一些预备知识，主要包括：1) 内积的概念和性质；2) 范数的概念和性质；3) 函数线性相关的充分必要条件(用内积判断)。这些预备知识是在分段插值后紧接着学习的，有部分同学反映，与上文没有衔接，切入比较突兀，理解起来也略显困难。这部分很难找到图形或者生活实际等具象与之相匹配，无法联系实际进行分析理解，教师只能硬性灌输，而学生大多生搬硬套。知其然，也要知其所以然。在数学上，沉浸式思考对于知识点的接受是很重要的环节。当思考变得“无从下手”，那么不可避免地，理解和接受就会出现问题。

接下来，按照教材内容，将介绍最佳平方逼近的概念，以及相应的计算方法和公式推导。对于这部分内容，前后衔接是比较完备的。但也有同学反映，曲线逼近可以直观图示，较好理解，但最佳平方逼近是什么意思？从几何的角度看，它是想要达到怎样的逼近效果呢？这个问题并不好回答。这是由最佳平方逼近本身所决定的。用一条线去逼近给定曲线，逼近效果可以用误差来衡量。而从图形的角度直观来看，两条线之间的误差，常见的，也是易于接受的有两类：1) 对应参数点之间的距离误差；2) 两曲线之间的面积误差。遗憾的是，平方误差与两者皆不相同，想在画出这种误差的图示效果并不容易。故在这种“硬核”定义面前，思考又变得无从下手，学生又只能放弃思考，全盘接受。

教学实际和学生反馈令人不得不认真审视这段教学内容，如何处理才能启发同学们去思考，化被动为主动，锻炼数学思维呢？

首先，相比较最佳平方逼近，可以找一个更为直观的逼近主题作为切入点，比如提出一个工业设计

的问题：给定一条特殊造型的曲线 $f(x)$ $(x\in[a,b])$，如何用一条多项式曲线去逼近它，以便输入到几何设计系统中？围绕这一主题，引导学生建立数学模型。

对于主题，可以先启发学生进行充分的分析和讨论。比如问题一：什么叫“以便输入到几何设计系统中”？除了介绍几何设计系统外，还可以让同学们了解“1991 年，国际标准化组织将 NURBS 方法规定为工业产品模型数据交换标准定义工业产品几何形状的唯一方法。而多项式曲线是 NURBS 方法中的一种”。问题二：一定要多项式曲线吗？可以采用其他曲线吗？通过介绍有理多项式曲线、傅里叶形式的曲线等，引出基函数的概念，选取不同的基函数 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$，可构造不同的曲线形式。故一般的逼近曲线可以表示为 $s(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)$，特别地，当基函数选择 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 时，即为 n 次多项式 $P_n(x)$。这里也可延伸出正交多项式的概念。

充分理解问题后，进入到解决问题的环节，问题的核心是：如何实现最佳逼近？那么，什么是最佳逼近呢？为了让同学们更好地理解问题，以一次多项式为例，分别在给定曲线的不同位置画几条直线，请大家比较分析哪条一次直线逼近效果更好。在引导式提问下，学生大多能想到距离的概念，距离误差越小，逼近效果越好。再次引导提问：有的曲线个别点距离误差很小，但其他点距离误差很大，逼近效果呢？学生们也会提出要整体看待，不能被个别点所蒙蔽。整体的距离误差，那就是整个区间上距离误差的集合，也就是两条线之间的面积误差。于是，最佳逼近在面积误差意义下的定义就得到了：寻找逼近曲线 $f(x)$，使得其与 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的面积误差最小。

这是个很重要的结论。根据这个结论，结合高等数学的知识，我们就可以建立数学模型：函数 $\bar{R}(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n)=\int_a^b\left|f(x)-\left[a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)\right]\right|\mathrm{d}x$ 何时达到最小？于是，最佳逼近问题成功转化为高等数学中的多元函数求最值问题。

但是，解题的过程中会发现：上述定积分中的绝对值符号，使得求偏导变得异常复杂，于是，最值问题难以为继。如何解决这一难题呢？或者说，如何避免绝对值符号呢？

考虑平方函数 $\int_a^b\left\{f(x)-\left[a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)\right]\right\}^2\mathrm{d}x$，它在某种程度上也反映了全局误差，开方后，物理量纲即可与面积误差一致，并且，该函数求偏导相对要容易得多。故数学模型转换为：多元函数 $R(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n)=\int_a^b\left\{f(x)-\left[a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)\right]\right\}^2\mathrm{d}x$ 何时达到最小？此时的平方误差表示为 $\sqrt{\int_a^b\left\{f(x)-\left[a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)\right]\right\}^2\mathrm{d}x}$。当然，这仅仅是基于已有的知识储备提出的一种假设。它究竟能不能替代面积误差来衡量逼近效果呢？还需要严谨的理论证明，这里可以引入连续函数范数这一概念，并展开讲解。

令偏导 $\dfrac{\partial R}{\partial a_i}=0\ (i=0,1,2,\cdots,n)$，求驻点时，将得到如下法方程组：

$$\begin{pmatrix}\int_a^b\varphi_0(x)\cdot\varphi_0(x)\mathrm{d}x & \int_a^b\varphi_0(x)\cdot\varphi_1(x)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b\varphi_0(x)\cdot\varphi_n(x)\mathrm{d}x\\ \int_a^b\varphi_1(x)\cdot\varphi_0(x)\mathrm{d}x & \int_a^b\varphi_1(x)\cdot\varphi_1(x)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b\varphi_1(x)\cdot\varphi_n(x)\mathrm{d}x\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \int_a^b\varphi_n(x)\cdot\varphi_0(x)\mathrm{d}x & \int_a^b\varphi_n(x)\cdot\varphi_1(x)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b\varphi_n(x)\cdot\varphi_n(x)\mathrm{d}x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\int_a^b\varphi_0(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x\\ \int_a^b\varphi_1(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x\\ \vdots\\ \int_a^b\varphi_n(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x\end{pmatrix}$$

很明显，方程组中矩阵和向量的数字极有规律，均是两函数乘积的定积分，只要按规律提前算出所有的数字，就可以轻而易举地写出方程组。为了更好地计算，将这种形式的定积分命名为内积，介绍完内积的概念和性质后，通过研究方程组解的情况，亦可给出 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 线性相关和线性无关的充要条件。图 1 展示了上述思维过程中问题之间的联系。

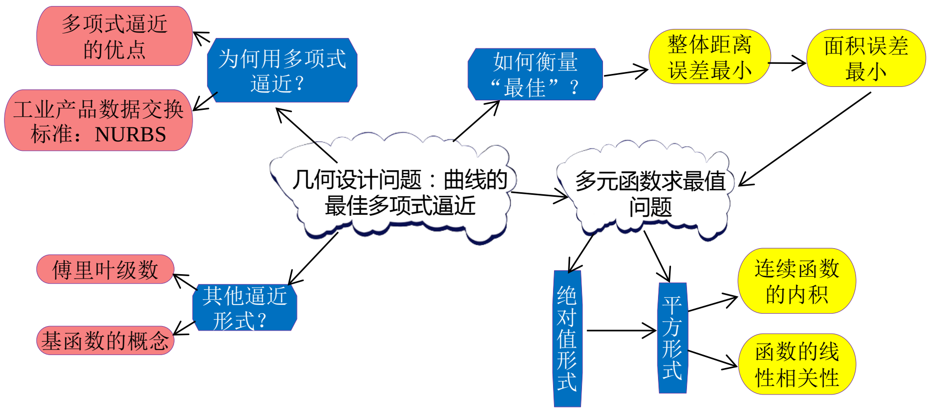

Figure 1. Mind mapping corresponding to knowledge points of best square approximation
图 1. 最佳平方逼近知识点对应的思维导图

教学实践中，笔者描述了几何设计系统中数据传输和交换模式，提出了曲线的数学表示问题，让同学们围绕这一问题展开思考。经过曲线多种表示的分析和比较，最终确定了多项式逼近这一解决方案，同学们提出了核心问题：如何求出曲线的最佳逼近多项式？用画图法来直观比较，同学们很快研究出最佳逼近的定义，建立相应的数学模型，并把该问题转化为多元函数求最值的问题。考虑到绝对值函数求导的困难，通过启发式提问，同学们找到了平方函数这一替代方案，并顺利解决问题。笔者又进一步提出，为了进一步完善算法和理论，研究平方逼近的存在唯一性，同学们又逐步分析得到内积，及线性无关的函数的概念。由此，从实际出发，总结抽象出理论问题，提出算法，完善理论，为同类实际问题找到了统一的解决方案。这个过程中，同学们经历了实践－理论－再实践，既能了解前沿科学问题，又能提高归纳总结能力，提升数学建模水平，以及强化理论证明等。

3. 结论

通过思维导图式的教学设计，最佳平方逼近问题得到了解决，涉及的内积、范数以及函数组线性相关性的判别等都有所体现。通过这种一根主线、数根支线，但始终围绕主线展开的引导方法，主次分明，层层递进，逻辑链完整清晰，非常适合学生独立思考，锻炼数学思维。更重要的是，知识点无论大小，有来历、有出处，抽象的概念都和有形的实际结合起来，尽量减少数学学习的枯燥感，提升同学们的兴趣。教学中采用了几何图示、比较分析、归纳总结、新旧知识迁移等方法来帮助理解、分析和解决问题，给学生们展示了常用的数学思路和方式，为今后他们独立解决问题打下坚实的基础。在实际教学中，学生课堂互动以及作业反馈均表明，该形式的授课方式取得了较好的教学效果。

参考文献

[1] 托尼·巴赞. 思维导图[M]. 李新, 译. 北京: 作家出版社, 1999.
[2] 王竹萍, 王文英. 思维导图: 高校课程教学创新的有效途径[J]. 黑龙江高教研究, 2011(5): 175-176.
[3] 赵玉凤. “互联网+”时代思维导图和概念图在高等数学教学中的应用[J]. 办公自动化, 2022, 27(10): 19-21.
[4] 俞家勇, 孟俊霞. 思维导图在高校工科课程教学中的应用初探[J]. 大学, 2021(47): 49-51.
[5] 刘玲, 王正盛. 数值计算方法[M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2010.