

拓扑学课程教学设计探索与实践

傅丽¹, 雷红轩^{2*}

¹青海民族大学, 数学与统计学院, 青海 西宁

²泰州学院, 信息工程学院, 江苏 泰州

收稿日期: 2023年1月3日; 录用日期: 2023年2月20日; 发布日期: 2023年2月28日

摘要

拓扑学是高等院校数学与应用数学专业的必修课, 由于课程内容很抽象, 教师感到难教而学生感到难学, 因此, 改革拓扑学课程的教学势在必行。首先分析了拓扑学课程在实际的教学过程中存在的问题, 然后结合多年的教学体会对该课程的教学设计进行了有益的改革探索, 提出了几点提高教学质量的措施。

关键词

拓扑学, 教学设计, 课程思政, 探索

Exploration and Practice of Teaching Design of Topology Course

Li Fu¹, Hongxuan Lei^{2*}

¹School of Mathematics and Statistics, Qinghai Minzu University, Xining Qinghai

²College of Information Engineering, Taizhou University, Taizhou Jiangsu

Received: Jan. 3rd, 2023; accepted: Feb. 20th, 2023; published: Feb. 28th, 2023

Abstract

Topology is a majority course for mathematics and applied mathematics majors in normal universities, because the course content is very abstract, teachers find it difficult to teach and students find it difficult to learn, therefore, it is imperative to reform the teaching of topology. Firstly, we have analyzed the problems existing of topology course in the actual teaching process, then, We have carried out beneficial reform and exploration on the teaching design of this course based on years of teaching experience, and have put forward some measures to improve the teaching quality.

*通讯作者。

Keywords

Topology, Teaching Design, Curriculum Thought and Politics, Exploration

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

拓扑学是数学与应用数学专业开设的一门专业必修课程, 该课程的教学内容比较抽象, 知识点多且知识点间联系紧密, 学生在学习时普遍感觉枯燥乏味且学习难度比较大, 而授课教师也认为该门课程不好教授。然而, 由于它的许多理论和方法不仅是后续部分专业课程的重要理论基础, 同时该课程也提供给其他学科研究的方法和描述语言, 它成为数学与应用数学专业极重要的必修课程之一。

拓扑学课程理论性比较强, 它的显著特点是高度的抽象性和概括性, 但拓扑学也是一门很好的培养学生抽象思维能力和严密逻辑推理能力的课程, 初学者普遍感到这门课程的概念抽象、理论抽象、推理抽象, 学习时难以理解, 就是课堂听懂了但课后习题无从下手, 课程的方法难以掌握。存在的这些问题严重影响了学生学习该课程的积极性, 还将影响到后继课程的学习, 这些因素的存在极不利于人才的培养和教学目标及课程目标的达成。目前, 各高校《点集拓扑学》[1]课程的学时都控制在 32 学时~56 学时之间, 需要有集合论的知识, 如何能在有限学时中最大程度地调动学生的学习积极性, 使学生较易接受且乐于接受拓扑学课程的知识是讲授好拓扑学课程的关键, 为达到这些目的就必须要求教师对教学内容进行调整及取舍, 对教学方法进行改革, 对教学手段进行优化, 充分调动学生的积极性, 尽可能将抽象的概念和理论进行通俗易懂的讲解。诸多从事拓扑学教学的教师也在不断地探索新的教学方法, 研究教学案例等(参见文献[2] [3] [4])。为了进一步深入开展教学研究, 促进教学改革, 较好地提高教学质量, 改变教师在讲台上唱独角戏, 学生在台下被动接受知识的窘状, 我们结合多年在对数学与应用数学专业学生中讲授拓扑学时所进行的教学方法改革和教学手段的探索的实践以及国家对该专业的新要求, 对该课程教学设计进行了一些有益的探索。

2. 拓扑学教学现状分析

从学生层面讲, 学生在学习普遍存在如下困惑:

- 1) 对拓扑学的发展不了解, 加之该课程内容的高度抽象、晦涩难懂, 学习该课程的积极性不高。
- 2) 学生在学习拓扑学的过程中, 普遍反映较多的问题是: “一难” “二不” “三多”: “一难” 即习题难; “二不” 即定义定理记不住, 习题不会做; “三多” 即定义多, 公理多, 定理多。
- 3) 随着多媒体等信息化技术的发展, 各种教学软件层出不穷, 如 Matlab 等对解题及可视化有极大的帮助, 而在拓扑学教学中教师极少有相关知识的演示和辅助教学, 学生感性认识不深。
- 4) 学生在学习中很少看到或是应用到拓扑学的知识, 认为这门课程实用性不强, 就产生了厌学情绪。从教师教授层面来讲, 教师普遍认为拓扑学难教, 主要体现在如下几个方面:

1) 拓扑学课程的每一节讲授中都会有涉及很多新的概念, 而这些概念与概念之间都是环环相扣的。如果对其中某一个基础性概念没有完全掌握或者没有完全彻底的理解, 必定影响到所有后继概念的学习和理解, 学生在听讲后面的概念时会腾云驾雾, 慢慢会产生厌学的情绪。比如教师在讲授开集和邻域、

拓扑和拓扑空间、连续映射等这些基本概念的时候, 学生如果没有弄懂这些概念的内涵和外延, 将会在后继内容学习时如同听天书一般。

2) 拓扑学属于概念化的几何分支, 该课程是从新的角度和新的视野对几何图形加以研究及应用, 因它的高度抽象性与泛化性, 初学的大学生需要一定的甚至更长的适应期来接受该课程很深邃的思想和方法。

3) 现在大多数的拓扑学课本注重理论讲授, 实例编写的较少, 也缺少与其他专业课程的横向联系, 存在的这些问题使学生在在学习过程中感到该课程是孤立的, 内容是空洞的乏味的, 没有实际意义的, 进而使学生对拓扑学这门课程的学习感到比较迷茫, 不知道所学知识的实际落脚点及应用在哪里, 向何处发展。

3. 拓扑学教学设计改革之举措

针对学生在学习拓扑学中存在的问题和教师在授课中的困惑, 我们认为对该课程的教学设计和教学方法的改革势在必行, 提出了如下的一些改革措施。

3.1. 了解拓扑学的发展史以增强学生的历史责任感

众所周知, 每门课的第一堂课都非常重要, 关系到学生后续学习的状态, 兴趣等。第一次课一定要讲好拓扑学的发展史, 以便较好地激发学生学习该课程的兴趣。拓扑学是一门相对分析学、代数学发展较晚的现代数学分支学科, 20 世纪 30 年代才传入中国, 最早开设该课程的是清华大学、北京大学、“中央大学”等高校的数学系, 江泽涵教授是最早在中国传播拓扑学并发展拓扑学的奠基人, 在文献[5]中作者也重点探讨江教授所著《拓扑学》课程。在中国全面抗战时期, 江泽涵教授着手翻译了德国数学家沙爱福和施雷发合著的《拓扑学教科书》, 并于 1947 年出版了译著《拓扑学》, 这本译著是中国首部中文版的拓扑学教科书, 该书的出版改变了中国一直没有中文拓扑学教材的现状, 极大地促进了拓扑学在中国的传播和发展。

为了让学生对这门课感兴趣, 我们在第一次课上除了介绍拓扑学的发展史, 可能的应用外, 还会找一些趣味拓扑学的视频和学生一起看, 同时我们也会找一些与拓扑学知识有关 ID 小游戏, 在课堂上请同学们试着做, 通过寓教于乐, 翻转课堂等方式激发学生的好奇心! 我们的少数民族学生虽然基础差, 但是他们优势在于的求知欲强, 心灵手巧, 且能歌善舞, 他们的这些优势在我们做游戏和实际演示中发挥的淋漓尽致, 比如: 请同学们用两手的拇指和食指做成两个套着的圆环之后, 如何可以不放开手指, 把圆环给解开来, 为了凸显学生的优势, 我们也请同学们用两条带有图案的腰带缠绕在一起。大家试着把他们两个分开, 但不可以解开绳结或把绳子剪断, 这些游戏里凸显了拓扑连续变化的现象, 同学们在积极参与游戏的过程中即可以传播少数民族的文化, 也可以或多或少地了解一些拓扑不变性的知识。

3.2. 利用计算机辅助教学以增强学生的视觉效果

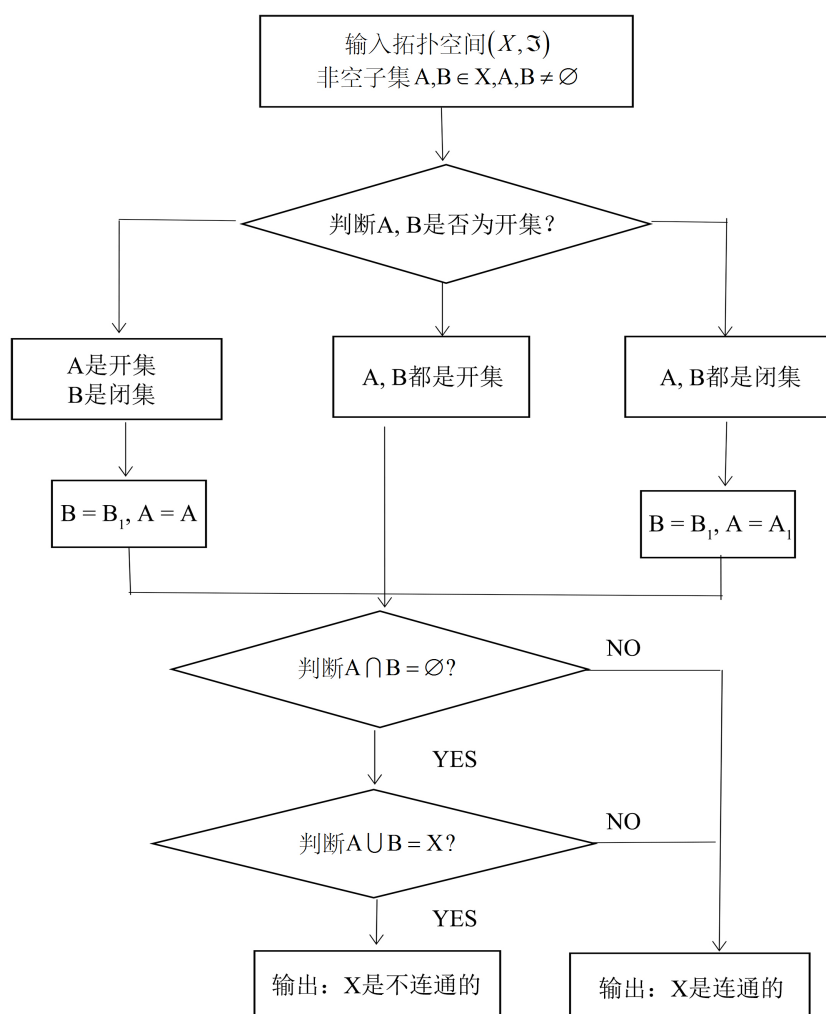
计算机辅助教学在拓扑学的教学中加以适当利用, 不仅可以增强学生学习该课程时的视觉效果, 还可以激发学生学习的兴趣和灵感。例如, 为了通俗地引入“拓扑”这一抽象概念, 描述拓扑性质不会依赖于度量, 我们在课堂上引导学生做一个较形象的描述, 把讨论的几何对象利用计算机作图作成连续的变形, 即把几何对象用计算机作图进行伸长、缩短、弯曲、扭转但最后还是同一个东西, 这样看起来就像是一块可以任意拉伸扭曲的橡皮, 这种变形不仅增强了学生的视觉效应, 还说明了在变形中度量没有起任何作用。通过这个例子, 就可以较通俗的给学生解释乒乓球、篮球等都是球面的各种不同变形的含义了。比如: 在介绍重要的拓扑不变性之一的连通性时, 可以通过几何图形的连通性引入, 我们熟悉的鸳鸯火锅, 如下图所示的 U 型管和纸盒等, 都是不连通图, 用集合 E 表示整体的图形, 即 E 是全集, 左侧的集合记作 A , 右侧的集合记作 B , 显然: $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = E$, 也就是说 A 和 B 是一对隔离子集, 从而, 指出一个图形如果不能找到一对隔离子集, 则为连通图, 进而给出连通的定义:



定义：在拓扑空间 (X, T) 中，存在以下等价条件：

- 1) 集合 X 为一个不连通的空间；
- 2) 集合 X 存在着一个即开又闭的非空真子集；
- 3) 集合 X 中存在着两个非空闭集合 A, B ，使得 $A \cup B = X$ ， $A \cap B = \emptyset$ ；
- 4) 集合 X 中存在着一个非空分离子集 A, B ，使得 $A \cup B = X$ 。

利用定义，我们可以用如下的算法思维图让学生了解如何验证拓扑空间的连通性，同时，建议学生自己用学习过的语言，算法，尝试用程序判断。



再比如在讲授著名的哥尼斯堡七桥问题和四色问题时, 可以告诉学生这些问题的真正解决是依靠计算机编程来完成的。

可以借助计算机辅助教学演示课本上的很多例子, 这样花的时间也不多, 还能使学生较自然地感受和认识到所涉及的问题不能用欧氏几何方法来处理, 它们与几何图形的大小、形状以及所含线段的曲直等等都没有关系, 这样学生就能较好地接受“拓扑”这一抽象概念, 提高了学生对拓扑学学习的兴趣。

3.3. 以课外活动增强对拓扑学的理解及应用

拓扑学被人们形象的称为“橡皮几何学”, 和莫比乌斯带相比较, 橡皮更能体现出各种“空间”在连续变化之下的不变性。因此, 我们围绕《奇妙的圈圈》《解开绳结》等一系列课外活动, 尝试突破课本上已有的“莫比乌斯带”这一个例, 抓住拓扑学的本质性质。

随着拓扑学学习的不断深入, 大部分内容的抽象性表现的越来越明显, 学生也会逐渐感到学习的知识枯燥无味和难学, 学习的热情随即慢慢下降, 这些现象如不加以重视和引导, 将会极大地影响拓扑学的教学效果, 对此, 我们在课堂教学中对相应的教学内容除了采用启发式教学之外, 还把拓扑学的应用实例增加到学生喜爱的课外活动中, 以增强学生的兴趣。比如在一根绳子上打结这个纽结的例子, 把其中有名的假结拿来作魔术表演, 还有有名的海滨脱衣表演等例子; 同时, 由于师生近距离交流, 也可以让学生大胆提出对教师在教学中的意见和建议。这种课外活动形式的展现, 较好地激发了学生们学习的兴趣。

3.4. 精选作业题上好习题课

拓扑学课程每章都有很多课外习题, 且习题的难度比较大, 因此, 在布置作业时一定要精选作业题, 数量不在多, 而一定要涵盖学过的定义、定理等内容, 作业的难易程度要有层次感, 从简单慢慢过渡到较难, 再到难。选题不但要强调基本概念、性质、定理的理解和简单应用, 还要突出基本方法, 努力使学生掌握解题技巧。如果章节后面的作业不能达到这此要求, 教师可以补充一定量的习题, 保证习题的难易程度有梯度。教师通过作业的批阅和平时的课堂提问、观察, 要充分了解学生的学习状况, 对学困生要区别对待, 较难题和难题可以让其选做, 但平时分数也要有区别。

上好每一次的习题课。习题课不是只讲习题, 首先要对学习过的章节的主要知识点、重点和难点简要回顾并总结, 防止学生课后忽视复习而忘掉学习过的知识, 在复习总结中重要的是让学生明确本章的知识结构体系, 理清概念间的区别和联系, 发现学习中存在的问题。讲授过程中要做好师生互动, 简单题只要讲清思路予以提示, 对于繁难题目可以认真讲解。为了辅助学生学习, 课前把梳理好的知识点, 需要用到的预备知识课前发给学生, 同时我们也编写了课后习题解答, 供学生参考。

3.5. 提高教师的执教能力和亲和力

教师既是知识的传授者, 教学活动的设计者实施者, 更是一个学习者。教师需要对已有的知识经验和技能进行细心的加工整理, 以符合学生接受规律的方式教给学生, 使学生乐于学习; 一堂充分构思的教学设计可以使教学活动更好更有序地进行, 教师只有针对普通地方民族高师院校数学与应用数学专业学生的特点进行教学才能调动学生参与课堂的主动性; 在当今的信息化时代, 学生接触的知识越来越广泛, 面对这些情况就更需要教师树立终身学习的理念并付之行动, 在学习中不断更新自己的知识结构和知识的深度, 使自己的教学建立在更宽广的知识背景上, 以适应学生的个性发展。

教学团队的成员定期做交流, 谈感悟的同时, 也做到与其他学校相关的课程团队做交流, 取长补短, 借鉴经验, 除此之外, 我们还会定期和学生沟通, 从学生的角度了解如何更好地获取知识, 有时在讲解

知识点之前,我们会给学生留一下需要预习的知识点,通过学生提前查资料,交流等方式获得先验知识,他们带着这样的知识去听课,会事半功倍。而且这样做的优势不仅可以丰富教师的教学方法,也可以激发学生自主学习的热情,我们可以逐步建立一支理论基础扎实,既懂教学又懂学生的高水平教师队伍。

3.6. 改进考试题型及考核方式

鉴于拓扑学课程的难度,要改变一张卷子定总成绩的考核方式,采用灵活的多样的有层次的考核形式。经过我们多年的实践,期末总成绩由四大部分组成:平时成绩、课外活动成绩、课程小论文、期末考试。平时成绩占总成绩的30%,包括平时考勤、课堂提问、作业三部分,在这三部分中课程提问占重要组成部分;课外活动成绩根据学生参与活动的积极性,参与度和活跃度给分,点总成绩的10%;课程小论文是鼓励学生对学过的知识进行提炼或是有小的感想、体会的总结,小论文允许两个学生为一个小组,课程小论文占总成绩的10%;期末考试点总成绩的50%,期末试卷由单项选择题、填空题、判断题、证明题和思考题组成,其中思考题主要考查学生对自然界一些拓扑现象的理论再现和理论阐述。经过多年考核方式改进的实践,教学效果较好,不但体现了考查学生学习效果的目的,督促了学生的学习,也不会影响到下一届学生学习拓扑学的热情和积极性。

3.7. 增加课程思政教学以增强学生学习的积极性

课程思政是一个内涵丰富而又立意深远的课程改革,拓扑学中蕴含着极其丰富的哲学思想,如何把课程思政元素引入到拓扑学教学中,使得教师在讲授知识的同时,更好担负起学生健康成长的指导者和引路人是我们的长期思考的问题。

1) 学生们辩证唯物主义世界观的培养很有必要。在讲授著名的曲面分类定理(定理的结论是任一连通闭曲面都可以分为一些素因子(球面、环面、射影平面)的连通和时,可以用裤子分解作为例子,主要原因是裤子上不存在本质简单闭曲线,一条裤子可以分解成两条裤子。从这两种分解中,可以看出曲面分类定理主要关注的是曲面的整体性质,而裤子分解主要研究的是曲面的局部性质,二者既有区别又紧密联系,这说明对事物的认识是多角度的,既要从整体加以认识,又要从局部去认识,在讲授中将这些辩证唯物主义思想传递给学生,以引导学生辩证的看待问题,做一个对社会有责任、有担当、有贡献的人。

2) 在教学中融入数学家追求真理的例子,以培养学生对科学问题的好奇心。例如,介绍美国著名拓扑学家瑟斯顿教授在研究三维流形的分类时是受什么启发而对此问题感兴趣的,以及后来产生了著名的庞加莱猜想等例子。通过这些著名数学家追求真理的例子可以让学生了解科学研究的一般规律,感受科学研究的博大精深并以此鼓励学生进行独立的科学研究。

3) 在讲解具体知识点时,可以用时事做案例,比如:在介绍连通性时,可以以五十六个民族构成了中华民族大团结的连通图。将五十六个民族抽象成五十六个集合,五十六个集合之间都相互联系,表明了五十六个民族紧紧团结在一起,充分说明了坚持中国共产党的领导是维护民族团结的基本保证,更是各民族大团结的基本保证。

4. 结语

拓扑学是一门极其重要的数学基础课程,也是数学与应用专业的一门必修课程。构成数学的两大支柱就是拓扑学和代数学,代数学研究的是离散运算的一般理论和规律,而拓扑学研究的则是连续映射的一般理论和规律。由于拓扑学中概念、定理、结论都很抽象,所以给该课程冠以难教和难学的帽子。在本文中我们先分析了拓扑学教学中存在的普遍问题,针对目前教学中存在的问题,结合我们的教学体会和经验,提出了几点改进教学的方法和建议,只有我们同共不懈的努力,才能达到更好的教学效果。事

实上, 想让学生真正的喜欢上一门课, 尤其是艰涩难懂, 抽象的的数学知识, 做好教学这个技术活, 探索教学方式, 更新教学手段永远在路上, 我们不能忽视接受知识的主体, 他们是一群思维敏捷, 接受能力和实践能力都很强的新时代大学生, 他们在不停的刷新教师的认知, 也相信在师生共同的努力下, 一定可以做好教学。

基金项目

青海民族大学教学改革项目(2021-JYYB-010)。

参考文献

- [1] 熊金城. 点集拓扑讲义(第四版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.
- [2] 田亚. 《点集拓扑》课程教学的新认识与实践[J]. 邢台学院学报, 2012, 27(2): 166-167.
- [3] 刘雪芳. 关于点集拓扑学课程教学改革的几点思考[J]. 龙岩学院学报, 2010, 28(2): 104-106.
- [4] 郑言. 一般拓扑学的教学探索与实践[J]. 湘潭大学自然科学学报, 2008, 30(11): 123-124.
- [5] 曾汇. 江泽涵译著《拓扑学》探析[J]. 广西民族大学学报(自然科学版), 2020, 26(4): 21-27.