

中美高中数学教材数列内容习题的比较研究

张晓宁, 孟圆, 刘海明*

牡丹江师范学院, 数学科学学院, 黑龙江 牡丹江

收稿日期: 2023年2月13日; 录用日期: 2023年3月15日; 发布日期: 2023年3月23日

摘要

教材建设作为我国教育课程改革的重要标志, 体现出具体的改革理念与要求。通过对中国PEP版高中数学教材和美国Glencoe版高中数学教材数列内容习题的呈现方式、呈现数量、呈现类型、难易程度进行比较, 发现Glencoe教材的习题呈现方式丰富, 类型多元, 难度适当, 注重学生对基础知识的把握; PEP教材的习题类型固定, 注重知识的综合运用和探究, 难度较大; 在教材编写上, PEP教材可以考虑在保留原有编写特色上, 增设习题栏目类别, 丰富习题背景样式, 密切联系学生个人生活, 使其感悟数学学科魅力。

关键词

数学教材比较, 数列, 习题

A Comparative Study of Series Exercises in Chinese and American High School Mathematics Textbooks

Xiaoning Zhang, Yuan Meng, Haiming Liu*

School of Mathematics and Science, Mudanjiang Normal University, Mudanjiang Heilongjiang

Received: Feb. 13th, 2023; accepted: Mar. 15th, 2023; published: Mar. 23rd, 2023

Abstract

As an important symbol of China's educational curriculum reform, textbook construction embodies the specific reform ideas and requirements. By comparing the presentation mode, quantity, type and difficulty of exercises in the series content of Chinese PEP high school mathematics textbooks and Glencoe high school mathematics textbooks, it is found that the exercises in Glencoe textbooks are rich in presentation mode, diversified in type and appropriate in difficulty, and pay

*通讯作者。

attention to students' grasp of basic knowledge. PEP textbook has fixed exercise types and focuses on the comprehensive application and exploration of knowledge, which is relatively difficult. In the compilation of teaching materials, PEP teaching materials can consider adding exercise column categories while retaining the original compilation features, enriching exercise background styles, and closely connecting students' personal lives to make them feel the charm of mathematics discipline.

Keywords

Comparison of Mathematics Textbooks, Series, Exercise

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

教材作为教育活动的主要材料,承担着体现课程标准理念、目标和内容的责任。作为课程与教学研究中的一个核心问题,教材的研究与建设同时也是教学质量提升、教学改革实施的基本保障[1]。随着教育改革的不断深入,越来越多国际数学教育领域里的专家学者开始聚焦到教材的比较研究之中。习题作为中学数学教材里的重要组成部分,其配置在某种程度上可以反映出数学教材编写者的价值取向和编写风格,习题对学生理解数学概念、掌握数学技能和把握数学思想方法具有不可估量的作用,同时也对数学课堂教学有着不可忽视的影响[2]。为此,选取中美两国高中数学教材中的习题进行比较,分析总结两版教材在习题部分呈现的编写特色,有利于发现不同国家的教材差异,了解不同国家的教育理念,这对中国的数学教学改革和高中数学教材习题的编写是十分必要的。

中国人民教育出版社出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学》(即 PEP 版)作为我国众多版本中代表性最强、使用率最高的数学教材之一,满足我国《普通高中数学课程标准》中对课程方案和课程标准要求的同时,还满足学生高考的内容要求。美国麦格劳-希尔公司(McGraw-Hill Companies)出版的高中数学教材(即 Glencoe 版)不仅符合美国《州共同核心数学标准》的编写理念,还因其内容丰富、结构清晰,成为美国使用频率最高的教材版本之一。数列作为高中数学的重要组成部分,有着十分重要的地位。首先,数列蕴含着多重数学思想方法,有利于提高学生的数学能力;其次,数列在实际生活中有着广泛的应用,像对物品的计算、人口的增长、产品的设计、银行的存储等问题,都需要利用到数列知识进行解答,有利于培养学生的数学核心素养;与此同时,数列是高中数学历年高考的必考考点,可以为学生后续进一步学习高等数学打下坚实基础。因此,选取中国人民教育出版社《普通高中课程标准实验教科书·数学》选择性必修二和美国 Glencoe 版教材代数 2 中的数列部分进行比较研究,总结两版教材在习题部分呈现的编写特色,发现不同国家的教材差异,了解不同国家的教育理念,并深化和拓展教师、学生对我国新教材中数列内容的理解和认识。

2. 研究对象及研究方法

2.1. 研究对象

由于许多国家或地区的教材出版是一种商业行为,所以对于学校教材的使用,很多国家没有实现全国统一,也缺乏国家层面上的指导。因此,在综合考虑教材的适用范围、课程标准等因素后,最终确定

了表 1 中所列的两版较具代表性的教材进行研究[3] [4]。

Table 1. Background information on textbooks

表 1. 教材的背景信息

国家	出版社	所属教材	出版年份	研究章节	教材代码
中国	人民教育出版社	选择性必修二	2020 年	第四章	PEP
美国	McGraw-Hill Companies	Algebra 2	2008 年	第四单元第 11 节	Glencoe

2.2. 研究方法

本文采用内容分析法、比较法和统计分析法相结合的方式，从数列章节习题的呈现方式、呈现数量、呈现类型及习题的难易程度四个方面展开进行比较研究。

1) 习题的呈现方式

根据不同版本教材的习题栏目设置进行具体分析。

2) 习题的呈现数量

PEP 教材和 Glencoe 教材的习题包含多种形式。PEP 教材习题除随堂知识点习题外，其他习题主要分为“复习巩固”、“综合运用”和“拓广探索”三种类型，可以满足不同学生有针对性地进行练习；同样地，Glencoe 教材的习题种类也十分多样，如课堂练习(CHECK Your Progress)、课外练习(Exercises)、高阶思维问题(H.O.T Problems)、标准化测试练习(STANDARDIZED TEXT PRACTICE)等。为统一量化，以每个类型下用阿拉伯数字 1,2,3... 标注的题目所出现的次数为准，统计数列部分相应习题数量。

3) 习题的呈现类型

将习题的类型分为：选择题、填空题、作图题、计算题、简答题、证明题和解答题七种，并对它们分别进行统计。其统计方法与习题数量统计方法相同。

4) 习题的难易程度

根据鲍建生教授[5]创建的五因素多水平模型探究数列章节习题难易程度，该模型所涉及到的五个因素分别为：探究、背景、运算、推理、知识含量，具体划分标准如表 2 所示。

Table 2. Comprehensive difficulty factor level classification criteria

表 2. 综合难度因素水平划分标准

难度因素	水平			
探究	识记	理解	探究	
背景	无背景	个人生活	公共常识	科学背景
运算	无运算	数值运算	简单符号计算	复杂符号计算
推理	无推理	简单推理	复杂推理	
知识含量	单个知识点	两个知识点	三个及以上知识点	

具体计算习题综合难度时采用如下计算公式：

$$d_i = \frac{\sum_j n_{ij} d_{ij}}{n} \left(\sum_j n_{ij} = n, i = 1, 2, 3, 4, 5; j = 1, 2, 3, \dots \right) \quad (*)$$

其中， $d_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 分别表示探究、背景、运算、推理和知识含量五个难度因素上的取值， d_{ij} 表示第

i 个难度因素在第 j 个水平上的权重(依水平取 1,2,3...); n_{ij} 表示习题组中第 i 个难度因素的 j 个水平的题目个数, 其考查题目的总数为 n 。

3. 研究结果与分析

依照上述研究方法对 PEP 教材和 Glencoe 教材数列章节的习题进行统计和比较, 现得结果如下。

3.1. 习题的呈现方式

结合文本归类统计, 可知 PEP 教材和 Glencoe 教材数列章节的习题呈现方式有所不同, 具体总结见表 3。

Table 3. Comparison of the presentation of exercises in the two editions of the textbook

表 3. 两版教材习题呈现方式的比较

教材版本	小节中	章节中
PEP	知识点习题、节习题	复习参考题
Glencoe	课堂练习、课堂检测、课外练习、高阶思维问题、标准化测试练习、螺旋式复习、为下节课做准备	章中测试、词汇检查、逐课回顾、实践测试、标准化测试

观察表 3 可知, PEP 教材的习题形式较为固定, 分为知识点习题、节习题、复习参考题, 其中, 知识点习题是穿插在正文内容中, 起到随堂检测的作用; 节习题一般是位于一节之后, 起到课后巩固的作用, 节习题一般根据习题难度被分为复习巩固、综合运用和拓广探索三种类型, 习题难度逐次递增; 同样地, 复习参考题也被分为这三种类型, 位于章节的末尾, 题量也相对最多, 主要考察学生对整章知识的掌握情况。

Glencoe 教材的习题呈现方式十分丰富, 其栏目种类多达 12 种; 其中, 较具特色的习题栏目有“高阶思维问题(H.O.T Problems)”、“美国标准化测试练习(STANDARDIZED TEST PRACTICE)”、“螺旋式复习(Spiral Review)”、“为下节课做准备(GET READY for Chapter 11)”和“章中测试(Mid Chapter Quiz)”; 其中, “美国标准化测试练习”栏目里面涉及到的 ACT/SAT 习题类似于中国高考真题, 有助于学生更好的把握考试题型; “为下节课做准备”栏目设置在教材每一小节的最后, 为后续课程做铺垫; Glencoe 教材还在教材当中安排“章中测试”环节, 意在检验学生对前半部分知识点的掌握情况, 真正做到查缺补漏。更特别的在于, Glencoe 教材还会在习题旁边的空白处设置旁白栏目, 指导学生如何利用例题的思路去解答习题, 或者根据习题介绍相应背景, 拓展学生学习视野。

总体来说, 相较于 PEP 教材习题类型所具有的层次性, Glencoe 教材在习题的呈现方式上更加多元与完善, 可供不同学情情况下的学生进行有选择性地针对学习, 真正做到了因材施教。

3.2. 习题的呈现数量

两版教材数列章节习题数量统计情况如表 4、表 5 所示。在习题数量方面, 两版教材差异显著, PEP 教材在这本章设置的习题数量为 110 道, Glencoe 教材为 717 道, 约为 PEP 教材数量的 6.5 倍。观察表 4, 发现 PEP 教材的知识点习题数量最多, 占习题总量近一半的比例, 复习巩固和综合运用其次, 拓广探索相对最少, 这说明中国教材更注重学生对基础知识的掌握和运用。观察表 5, 发现 Glencoe 教材的习题存在大量知识点重复出题的情况, 这也是造成两版教材数量差异明显的原因之一, 相对来说, Glencoe 教材课外练习的数量最多, 占全部习题总数的 41.98%, 剩下其他类型的习题所占比例相对很小, 这也从侧面反映美国教材更重视培养学生面对问题时独立思考的能力。

Table 4. Statistics on the number of exercises in the series of PEP textbooks

表 4. PEP 教材数列部分习题数量统计

章节名	知识点习题	习题			小计
		复习巩固	综合运用	拓广探索	
4.1 数列的概念	8	3	3	1	15
4.2 等差数列	20	4	5	3	32
4.3 等比数列	18	4	5	3	30
4.4 数学归纳法	6	4	3	3	16
复习参考题	0	7	6	4	17
合计	52	22	22	14	110

Table 5. Statistics on the number of exercises in the series of Glencoe textbooks

表 5. Glencoe 教材数列部分习题数量统计

节名称	习题							小计
	CP	CU	E	H.O.T	SP	SR	GR	
11-1 等差数列	4	16	48	4	2	11	4	89
11-2 等差级数	4	15	44	4	2	20	3	92
11-3 等比数列	5	13	39	6	2	5	3	73
Extend 11-3 极限	0	0	6	0	0	0	0	6
11-4 等比数列	4	19	39	5	2	14	6	98
11-5 无穷等比级数	4	12	37	5	2	14	6	80
Explore 11-6 分期付款	0	0	6	0	0	0	0	6
11-6 递推和特殊数列	4	9	24	4	2	6	3	52
Extend 11-6 分形	0	0	7	0	0	0	0	7
11-7 二项式定理	5	10	30	3	2	11	6	67
11-8 证明和数学归纳法	3	7	21	3	2	6	0	42
小节习题总数	33	101	301	34	16	87	31	603
MC				22				
VC				8				
LR				48				
PT				25				
ST				11				
合计				717				

注：各缩写具体表示：课堂练习(CP)、课堂检测(CU)、课外练习(E)、高阶思维问题(H.O.T)、标准化测试练习(SP)、螺旋式复习(SR)、为下节课做准备(GR)、章中测试(MC)、词汇检查(VC)、逐课回顾(LR)、实践测试(PT)、标准化测试(ST)。

3.3. 习题的呈现类型

两版教材数列的习题类型统计情况具体如图 1 所示。

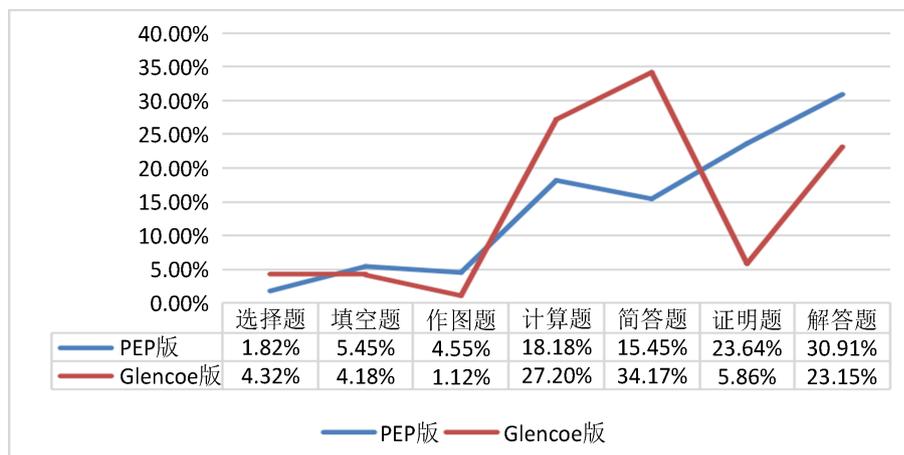


Figure 1. Line chart of exercise types in the two textbooks
图 1. 两版教材习题类型折线图

从统计数据来看，在习题类型的呈现方式上，两版教材的形式都较为多元，七种题型均有所涉及。观察图 1，可以看出 PEP 教材和 Glencoe 教材在选择题、填空题和作图题上的题型配置数量较少，分析是与研究所在的数列章节相关，所以才造成习题类型在分布上有显著差异。PEP 教材的习题主要集中在计算题、简答题、证明题和解答题上，且主要以解答题为主，解答题所占比例为 30.91%；美国教材的习题主要集中在计算题、简答题和解答题上，且主要以简答题为主，三种类型的习题占比分别为 27.20%、34.17%和 23.15%；除此之外，观察图 1，发现 Glencoe 教材的习题总数虽远超 PEP 教材，但在证明题的占比上，PEP 教材明显更多，为 23.64%，而 Glencoe 教材仅为 5.86%。

总体来看，虽然 Glencoe 教材的习题类型更丰富，数量也远超 PEP 教材，但在呈现形式上，PEP 教材习题各类型的比例分布更加均匀，考查形式更加全面。

3.4. 习题的难易程度

下面对两版教材数列部分的习题难度进行统计分析。首先根据表 2 的难度因素水平进行划分，对两版教材习题逐个进行鉴别，接着，利用公式(*)计算每个难度因素上的加权平均数，最后，整合结果如表 6 所示。

观察表 6 的统计数据可知，在五个因素方面两版教材具有一定差异，具体分析如下：

1) 探究因素

PEP 教材和 Glencoe 教材在“理解”层次占比最大。其中，PEP 教材涉及此方面的习题所占比例为 68.18%，比 Glencoe 教材高 5.84%，这体现出两版教材都很注重学生在概念理解上的把握和转化；相较于 PEP 教材，Glencoe 版教材更注重“识记”和“探究”两个层次，“识记”层次所占比例要比 PEP 教材高 2.64%，“探究”层次所占比例要比 PEP 教材高 3.19%；除此之外，两版教材的加权平均值仅差 0.01，可以看出两版教材在探究难度相差甚微，这说明两版教材都更注重培养学生的理解能力。

2) 背景因素

在数列章节，PEP 教材和 Glencoe 教材的习题均以“无背景”层次为主。Glencoe 教材涉及“无背景”的习题比例为 90.79%，比 PEP 教材高出 9.88%；Glencoe 教材涉及到“个人生活”的习题比例为 6.28%，PEP 教材在此部分的习题占比为 4.55%；另外，PEP 教材涉及“公共常识”和“科学情景”的习题所占比例都为 7.27%，均高于 Glencoe 教材，其中，Glencoe 教材数列章节“科学情景”的习题占比仅为 0.70%；由此可以分析，PEP 教材中的习题在各层次背景难度的分布上更均衡，Glencoe 教材的习题在“公共常识”

和“科学情景”层次上的设置稍显薄弱。

3) 运算因素

由于研究的是中美两国数学教材的数列内容，所以在分析此章节的习题设置时，一定会涉及到求值运算的问题，观察表 6 可知，两版教材习题中的数列习题涉及到“无运算”的题目十分有限，Glencoe 教材涉及此部分的习题所占比例为 6.97%，PEP 教材仅为 1.82%；PEP 教材在运算能力上的培养主要体现在“简单符号运算”层次，Glencoe 教材主要体现在“数值运算”层次，关于“复杂符号运算”这一层次，两版教材的习题所占比例相对较低，分别为 17.27%、12.55%。

4) 推理因素

两版教材在推理因素中占比更多的都是“简单推理”层次。PEP 教材的习题在“简单推理”层次所占比例更大，为 64.55%，Glencoe 教材为 48.81%；结合文本分析，可以发现两版教材的数列章节中存在大量的公式，所以在习题中会产生不同的变式，学生需要通过简单推理进行计算，从而提升在变式中的思维能力，培养其自身数学核心素养。相对 Glencoe 教材来说，PEP 教材的习题在推理方面明显更难一些，主要是 PEP 教材在习题设置上包含较多的“综合运用”与“拓广探索”栏目，这些设置在无形中提高了学生面对问题时的逻辑推理能力和解题能力。

5) 知识含量

PEP 教材和 Glencoe 教材在知识含量方面的变化趋势是相同的，两版教材均在“单个知识点”层次占比最高，分别为 70%、92.47%，其次是“两个知识点”，占比最少的为“三个及以上知识点”，这说

Table 6. Comparison of the difficulty of the exercises in the two editions of the textbook

表 6. 两版教材习题难度的比较

难度因素	等级水平	题目数量		百分比		加权平均值	
		PEP	Glencoe	PEP	Glencoe	PEP	Glencoe
探究	识记	4	49	3.64%	6.83%		
	理解	75	447	68.18%	62.34%	2.25	2.24
	探究	31	221	28.18%	30.82%		
背景	无背景	89	651	80.91%	90.79%		
	个人生活	5	45	4.55%	6.23%	1.41	1.13
	公共常识	8	16	7.27%	2.23%		
	科学情境	8	5	7.27%	0.70%		
运算	无运算	2	50	1.82%	6.97%		
	数值运算	20	355	18.18%	49.51%	2.95	2.49
	简单符号运算	69	222	62.73%	30.96%		
	复杂符号运算	19	90	17.27%	12.55%		
推理	无推理	19	311	17.27%	48.38%		
	简单推理	71	350	64.55%	48.81%	2.01	1.64
	复杂推理	20	56	18.18%	7.81%		
知识含量	单个知识点	77	663	70.00%	92.47%		
	两个知识点	21	9	19.09%	5.44%	1.41	1.10
	三个及以上知识点	12	15	10.91%	2.09%		

明了两版教材都更注重学生对基础知识的理解与运用;对比习题难度,发现 PEP 教材大于 Glencoe 教材,其主要原因是 PEP 教材在每小节和章末尾后设置的习题综合性较强,不仅起到巩固复习的作用,还考查了学生对所学内容的综合运用能力。

总体来说,在“探究”、“背景”、“运算”、“推理”和“知识含量”五大难度因素中,PEP 教材数列章节的难度均要高于 Glencoe 教材,观察表 6,并结合文本进行分析,发现 PEP 教材的习题所考查的内容综合性较强、难度较大,需要学生有扎实的基础和灵活的数学思维能力。而 Glencoe 教材在此章则更注重学生对基础知识的把握,并适当增设有难度的习题,考查学生的整体掌握情况。

4. 结论与启示

本文以中国 2020 年人教 A 版、美国 2008 年 Glencoe 版高中数学教材为研究对象,从数列内容习题的呈现方式、呈现数量、呈现类型、难易程度进行比较研究。现得出以下结论与启示。

4.1. 增设习题栏目类别

在习题栏目设置方面,PEP 教材把习题分为知识点练习、节习题与复习参考题,其中,节习题和复习参考题还被分为“复习巩固”、“综合运用”以及“拓广探索”三类,层次清晰,编排规范,难度依次递增。美国教材习题栏目类别丰富,包含 12 种题型,除常规练习以外,还有其他形式供学生学习,像“为下节课作准备”、“章中测试”、“标准化测试”等栏目的设置,是 PEP 教材所不具备的,所以可以在保留原有教材编写特色的基础上,结合数列知识内容的特点,根据不同学生的学情,对应不同学习目标,增设习题栏目的类别,使习题的层次更细化,涵盖的知识技能更全面,更有助于学生巩固复习。

4.2. 丰富习题背景样式

《普通高中数学课程标准(实验)》指出:高中数学课程应力求使学生体验数学在解决实际问题中的作用、数学与日常生活及其他学科的联系,促进学生逐步形成和发展数学应用意识并提高实践能力。新课程理念强调要把数学与现实生活相联系,特别是与学生的个人生活相联系,帮助学生学会“有用的数学”[6]。虽然相较于 Glencoe 教材,PEP 教材的习题在背景这一难度下分布更均衡,但两版教材都存在“无背景”习题的题目数量占比过大,PEP 教材为 89 道,占比 80.91%,Glencoe 教材为 651 道,占比 90.79%,两版教材均出现以纯数学形式出现题目过多的情况;而且在“个人情境”层次中,Glencoe 教材的习题占比要大于 PEP 教材;所以在教材的编写上,建议应多创设与学生个人生活相关的问题情境,设计更有趣味的题目,使学生真正理解所学内容的实际含义,感受数学与实际生活的密切联系,从而更好地掌握所学的知识内容。

综上,对比中美两国高中数学教材数列内容的习题,可以发现两版教材都有其独特的编写风格,将呈现出来的不同特色进行对比分析,有助于发现不同国家之间的教材差异,从而更好地了解他国的教育理念,“他山之石,可以攻玉”,这对我国数学教学改革及教材编写都是有着重大意义的。

基金项目

黑龙江省大学生创新创业训练计划项目,编号:S202210233057。

参考文献

- [1] 吴立宝,曹一鸣. 中学数学教材的分析策略[J]. 中国教育学刊, 2014(1): 60-64.
- [2] 林丹,胡典顺. 中美高中数学教材的习题比较及启示——以 PEP 教材与 UCSMP 教材中平面向量章节为例[J]. 数学教育学报, 2015, 24(3): 63-67.

-
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中教科书选择性必修(第二册) A 版[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [4] Holiday, B., Cuevas, G.J., *et al.* (2008) Algebra 2, Student Edition-Glencoe. McGraw-Hill Education, New York.
- [5] 鲍建生. 中英两国初中数学期望课程综合难度的比较[J]. 全球教育展望, 2002, 31(9): 48-52.
- [6] 张笑谦, 胡典顺. 中澳高中数学教材的比较及启示——以澳大利亚 VCE 课程与人教版高中数学教材函数与映射章节为例[J]. 数学教育学报, 2013, 22(2): 71-75.