

以爱国主义深情开启高等数学第一课 ——以“数列的极限”为例开展思政教学

郑洁

东华大学数学系, 上海

收稿日期: 2023年3月6日; 录用日期: 2023年4月16日; 发布日期: 2023年4月28日

摘要

极限是高等数学中的基本概念, 是微积分整个知识框架的基础。高等数学中的若干概念, 例如, 连续、间断、可导、可积、级数收敛等, 均通过极限来定义。深刻透彻地理解极限, 尤其是数列的极限, 是学好高等数学的关键。本文通过解析数列极限中蕴含的量变与质变的辩证关系, 详细透彻地分析了数列极限的概念。在增强学生辩证思维的同时, 通过介绍中国古代数学家的研究思想和研究方法, 增强了学生的民族自豪感, 激发了学生的爱国主义热情。从而, 在高等数学第一课中, “润物细无声”地实施了思政教学。

关键词

无限逼近, 数列, 极限, 思政教学

Start the First Lesson of Advanced Mathematics with Patriotic Affection

—Taking “the Limit of the Sequence” as an Example to Carry Out Ideological and Political Education

Jie Zheng

Department of Mathematics, Donghua University, Shanghai

Received: Mar. 6th, 2023; accepted: Apr. 16th, 2023; published: Apr. 28th, 2023

Abstract

The limit is a fundamental concept in Advanced Mathematics and it is the basis of the entire intellectual framework of Calculus. The concepts of continuity, discontinuity, derivability, integrability,

and convergence of series are all defined by limits. A deep and thorough understanding of limits, especially the limits of sequences, is the key to learning Advanced Mathematics. This paper analyzes the dialectical relationship between quantitative change and qualitative change contained in the limit of sequence, and analyzes the concept of the limit of a sequence in detail. While enhancing students' dialectical thinking, through the introduction of the research ideas and research methods of ancient Chinese mathematicians, the students' national pride is enhanced and the students' patriotism is stimulated. Thus, in the first lesson of Advanced Mathematics, ideological and political education is implemented "imperceptibly".

Keywords

Infinite Approximation, Sequence, Limit, Ideological and Political Education

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

极限是高等数学课程中最为核心的一个概念，它是高等数学整个知识框架的基础[1] [2]。

本文首先介绍了两个引例，利用“无限逼近”这一思想方法，由浅入深地分析了“极限”这一概念中蕴含的量变与质变的辩证关系，从而为定义“极限”这一抽象概念打下了生动的基础。然后通过一个具体的收敛数列的例子，解释当 n 趋于无穷大时，数列里的项无限逼近一个常数的涵义。接着趁热打铁，给出数列极限存在的 $\varepsilon-N$ 数学定义，详细向同学解释“无限逼近”与“任意小的正数 ε ”的关系。着重讲解 ε 的任意性和 N 的存在性。最后，引申一下，简答介绍函数极限存在的含义，为下节课教学铺垫。

在教学的过程中，教师借助数学软件模拟若干收敛数列和发散数列的性态，使学生对“极限存在”和“极限不存在”两个概念有了形象的认知。

自从出台了大学生思想政治教育的文件以来，全国高校纷纷开展不同形式的思政教学改革。高等数学，作为理工科其他学科的基础，作为大多数理工类学生迈入大学校门之后第一批接触的必修课，如何在此课程中开展思政教学，如何把思政理论与高等数学知识融合进而产生协同效应，是每一位参与教学改革的教育工作者应该深入思考的问题。思政教学的核心是全方位构建育人格局，教育工作者不仅要把思政思想与高等数学教学内容充分融合，还必须努力塑造和培养当代大学生正确的价值观和创新思维，同时鼓励大学生自由全面发展。

本案例将通过一个具体的可实践的教学案例，展示如何自然而然地在高等数学课程中开展思政教学。整个教学过程完整紧凑，在增强学生辩证思维的同时，通过介绍中国古代数学家的研究经验，进一步培养学生严谨客观的科学态度和勇于探索的科学精神，不知不觉中，实施了思政教学[3] [4] [5]。

2. 极限思想的引入

2.1. 《庄子·天下篇》中的名句

战国时期，庄子在其所著的《庄子·天下篇》中写到：“一尺之棰，日取其半，万世不竭”（见图1）。也就是说，一尺长的木棒，第一天取去一半，还剩二分之一尺，第二天再在这二分之一尺中取去一半，还剩下四分之一尺……。

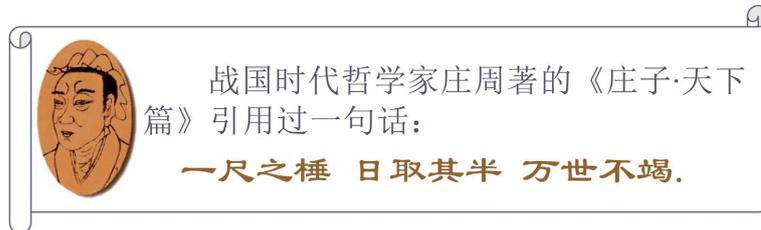


Figure 1. A famous sentence in *Zhangzi Tianxia*
图 1. 《庄子·天下篇》中的名句

如此分下去，随着分割次数的增加，捶会越来越短，长度接近于零，但又永远不会等于零。这在本质上是一个数列极限的问题。

2.2. 刘徽的“割圆术”

“割圆术”的思想是由我国古代魏晋时期的数学家刘徽提出的，主旨思路是用圆内接正多边形的面积来逼近圆的面积。刘徽指出：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣”。即圆周分割得越细，内接多边形的边数越多，其内接正 n 边形的周长就越是接近圆周的长度(见图 2)。如此不断地分割下去，当圆内接正多边形的边数 n 无限多的时候，它的周长就与圆周几乎“吻合”，正 n 多边形的面积就无限接近圆的面积。这就是极限思想。

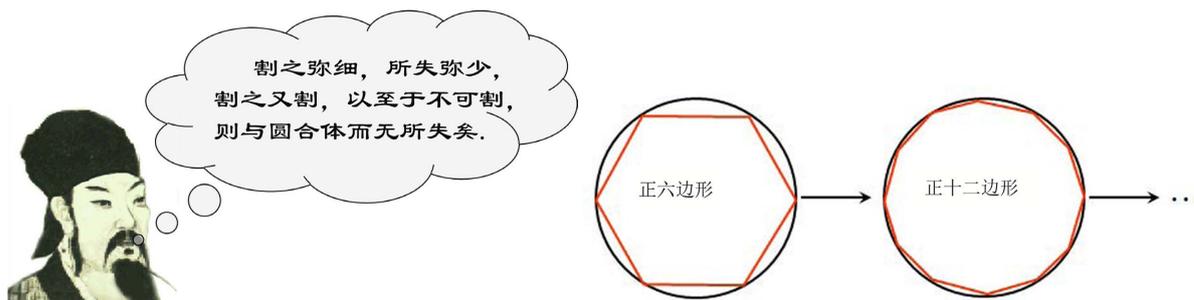


Figure 2. The idea of circumscription
图 2. “割圆术”的思想

刘徽用割圆术将圆周率精确到小数点后三位，南北朝时期的祖冲之在刘徽研究的基础上，将圆周率精确到了小数点后 7 位，这一成就比欧洲相关研究成果早一千年。

在本部分教学内容中，可以以启发性教学方法，开展思政教学。具体可按以下步骤实施。

首先，教师可以根据教育对象特点和本案例的教学内容，向学生们提出若干问题。例如，在生活或者学习中，是否遇到过第一个例子中“万世不竭”的情况，是哪种情况？他们是如何解决问题的？对于第二个例子，是否有其他办法求圆内接多边形的面积？求圆内接多边形面积为何和圆周率有关系，有何关系？这样，不仅可以提高学生参与课程讨论的积极性，而且可以对极限的概念加以拓展和加深。

其次，向学生介绍我国古代及现代数学的先进成果和优秀数学家，激发同学的民族自豪感和爱国主义热情，使同学们认识到我们祖先才智超群，中华民族自古热爱思考、英雄辈出。从甲骨文记载的十进制计数法到商高的勾股定理，从《九章算术》到杨辉三角形，都是我国古人聪明智慧的结晶。鼓励同学们要学习我国数学家祖冲之、朱世杰、徐光启，陈景润、陈省身等投身于数学事业的感人事迹。强调指出，他们的成就和祖国的发展密不可分，即个人成就不能脱离祖国而单独存在。告诉学生，无论今后做出多么大的个人成就，都要有爱国情怀。

最后，结合第二个例子，启发学生，古人对圆周率的计算全靠手算，是非常不容易的，这个过程中需要沉下心，踏实地进行计算，这也是学生们需要学习的地方。鼓励学生在以后的学习和工作中要坚忍不拔，要有追求卓越的品质。课程思政教育的目标是培养具有社会主义核心价值观的人，不断鼓励学生的内在驱动力和建立逐步完善的育人体系，是思政课程的目的。

以上步骤只是“抛砖引玉”，具体如何开展思政教学，教育工作者可以结合实际情况，制定个性化的思政教学方案。思政教育的主旨是全方位构建全员、全程和全课程的“三元”育人格局，是以立德树人为教育的根本任务，只要把握到这个主旨和根本任务，就抓住了思政教学的核心。

思政教学的关键之处是如何寻找将政治理论与教学内容相融合的有效路径。如果融合的方法欠佳，“生拉硬套”及“东拼西扯”的融合就会适得其反，让思政课程改革的效果大打折扣，让授课对象心生反感。所以，“自然而然地提及”和“恰如其分地点醒”是思政教学的最高境界，每个参与改革的教育工作者都要追求这样的思政教学目标。

3. 课程的进一步开展

3.1. “无限逼近”的形象描述

首先，在数轴上，将数列 $a_n = \left\{ \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} \right\}$ 描点(见图 3)，用以引入“数列极限”的概念。向学生理解“无限逼近”的思想，让学生深刻地体会数列极限的直观意义及“无限逼近”的实质含义。

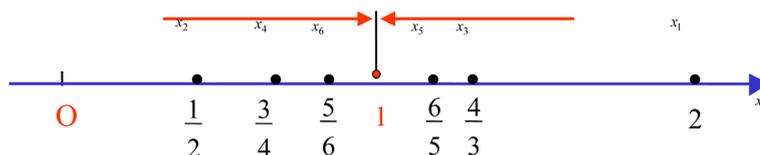


Figure 3. Mark the points of the series on the number line
图 3. 把数列的点标记在数轴上

其次，对于上述数列 $a_n = \left\{ \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} \right\}$ ，列表表明数列 $a_n = \left\{ \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} \right\}$ 中的项可以和常数 1 任意接近(见表 1)。并且引导学生理解“任意接近”，“任意小的正数 ε ”的数学含义。

Table 1. Arbitrarily small positive numbers ε and the existence of positive integers N in the example
表 1. 例子中，任意小的正数 ε 与对应存在的正整数 N

任给正数 ε	总存在正整数 N	使当	恒有
$\frac{1}{4}$	4	$n > 4$	$ a_n - 1 < \frac{1}{4}$
$\frac{1}{100}$	100	$n > 100$	$ a_n - 1 < \frac{1}{100}$
$\frac{1}{1000}$	1000	$n > 1000$	$ a_n - 1 < \frac{1}{1000}$
...

从而引导学生理解为什么利用“任意小的正数 ε ”来刻画数列 $\left\{ \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} \right\}$ 无限趋近于常数 1，趁热

打铁向学生以下列数学语言描述数列 $\left\{ \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} \right\}$ 的极限。

对于任意给定的无论多小的正数 ε , 总可以找到正整数 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 恒有

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1} < \varepsilon.$$

教学方法上使用启发探究式教学、互动式教学法进行教学。

3.2. 用“ $\varepsilon - N$ ”语言定义数列的极限

在前面深度分析数列极限含义的基础上, 正式介绍数列极限存在的 $\varepsilon - N$ 定义, 见下。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得} \forall n > N, \text{恒有} |a_n - a| < \varepsilon.$$

利用下列数轴图示(见图 4), 帮助同学理解 ε 的任意性以及 N 是依赖 ε 而存在的。

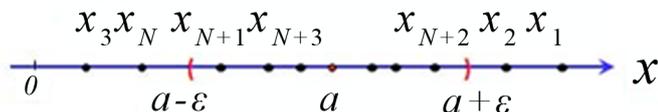


Figure 4. The numbers in the sequence can arbitrarily approximate the limit a
图 4. 数列的一般项可以任意逼近极限 a

3.3. 数列极限存在以及数列极限不存在

列举几个数列极限不存在例子。例如, $(-1)^n, \sin \frac{n\pi}{2}, n - \frac{1}{n}$ 等, 其中 $n = 1, 2, 3, \dots$ 。引导学生对比收敛数列以及发散数列的不同之处。

3.4. 数列的极限与函数的极限的异同

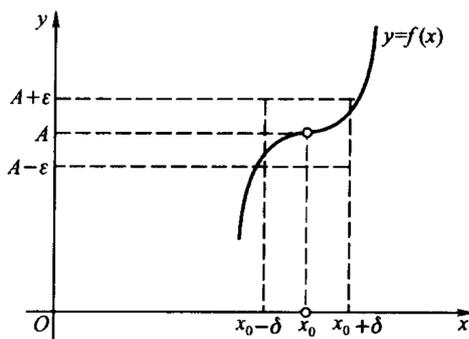


Figure 5. Geometric explanation for a function has the limit at a certain point
图 5. 函数在某点处有极限的几何解释

介绍函数的极限,并对函数极限概念做几何解释(见图5),铺垫下节课内容。将第一课堂延伸到课下的第二课堂。对比“数列极限”和“函数极限”的不同,在教师的引导帮助下,理解函数逼近的意义。学生从被动学习到主动学习、主动探索,激发学习潜能,将中学时的学习观念和方式升级为大学时期的新方法、新理念。

利用下图,解析下一节函数极限的几何意义,为下节课讲解函数极限做铺垫。

3.5. 利用数学软件,加深极限概念的理解

结合计算机软件,进行计算和验证。使用计算机软件 Mathematica,将传统的高等数学课程理论与先进的数值计算软件结合起来,增加数学应用模型的讲授和训练,让学生把数学的思想和方法学以致用。

结合前面讲解的例子,为学生演示 n 趋于 ∞ 时,数列 $\frac{n+(-1)^{n+1}}{n}, (-1)^n, n - \frac{1}{n}, \sin \frac{n\pi}{2}$ 的形态,进一步加深学生对收敛数列存在极限的认识。

通过这种理论与实践相结合的方式,一方面提高初学者的兴趣,另一方面引导学生,今后可以通过应用软件解决实际数学模型问题。这一引导将会进一步提升学生的数学创新思维,变被动接受为主动学习。

4. 学生反馈与课程反思

数列极限的定义是学习导数、定积分、级数、重积分等高等数学的基础。例如,变速直线运动的瞬时速度、线密度问题、曲线的切线问题等,都转换成极限问题解决。课堂教学主要以启发式教学和学生应用软件进行模拟等主动学习方式相结合的方式,结合具体实例,激发学生的积极性。

一直以来,学以致用往往在数学学习中就认为是多做数学题,但对于一流学科建设中的大学却不太适用。新工科的建设,需要我们能真实反映学生在问题解决过程中的实际状态,建立其学习的自信心,避免大量的纯理论学习带来的挫败感,改变传统数学教学考核,改变学生考前突击死记硬背、考完就忘、收效甚微的现状。

5. 润物细无声——思政课程的实施

除了学习相关的数学知识,为后面的专业学习打好基础外,应在课程思政的切入点上进一步反思,使同学们了解我国的数学学科的发展方向,看到我国在基础学科研究中所取得的骄傲成绩。

本节课通过我国古代的两个实例,引导学生树立爱国主义理念,增强学生的爱国主义情怀和感悟[6]。课程中还可以通过介绍我国的一些优秀科学家的事迹,激发学生们的爱国热情及民族自豪感,树立为实现国家现代化而努力奋斗的决心。

课程内容与思政教学内容自然而然地融合,以立德树人为教育的根本任务,使得教育工作者在本案中能够有效地且“润物细无声”地开展思政教学。

基金项目

本论文受“东华大学高等数学示范教研室”项目的资助。

参考文献

- [1] 刘玉琏,傅沛仁. 数学分析讲义(上册)[M]. 北京:高等教育出版社,1981.
- [2] 同济大学数学系. 高等数学(上册)[M]. 北京:高等教育出版社,2014.
- [3] 易亚利. 思政教育融入高等数学课程的实践探索[J]. 数学学习与研究,2022(11): 26-28.

- [4] 殷羽. 基于课程思政的高等数学教育教学研究[J]. 数学学习与研究, 2021(29): 24-25.
- [5] 得儿白, 刘淼. “课程思政”在高等数学课程教学中的探索与实践[J]. 创新教育研究, 2023, 11(2): 376-380.
<https://doi.org/10.12677/CES.2023.112062>
- [6] 曹越. 新形势下大学生爱国主义教育现状与路径探析[J]. 创新教育研究, 2023, 11(2): 359-363.
<https://doi.org/10.12677/CES.2023.112059>