

高中数学建模活动素材开发探究：从应用题到建模题

董清艳，周学君，龚雨欣

黄冈师范学院，数学与统计学院，湖北 黄冈

收稿日期：2023年6月19日；录用日期：2023年8月25日；发布日期：2023年9月5日

摘要

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》强调让学生掌握数学建模的重要性，并且努力让这种技能融入到各种教学活动之中，以提升他们的数学能力。但在实践教学中，教师往往难以找到合适的数学建模活动素材，使其满足学生数学建模能力水平又紧密结合高中课堂教学任务。制定高中数学建模活动素材选取与改编的依据、原则及策略，并以概率模型为例，开发了从高中应用题到建模题的案例，最后给出教学建议。研究方法及结果能为教师开展高中数学建模教学活动提供有价值的素材和参考。

关键词

高中数学，数学建模活动，素材开发，应用题

Exploring the Development of Materials for High School Mathematical Modelling Activities: From Application Problems to Modelling Problems

Qingyan Dong, Xuejun Zhou, Yuxin Gong

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Jun. 19th, 2023; accepted: Aug. 25th, 2023; published: Sep. 5th, 2023

Abstract

The General High School Mathematics Curriculum Standards (2017 Edition Revised 2020) empha-

文章引用：董清艳，周学君，龚雨欣. 高中数学建模活动素材开发探究：从应用题到建模题[J]. 创新教育研究, 2023, 11(9): 2534-2541. DOI: 10.12677/ces.2023.119374

sise the importance of equipping students with mathematical modelling and strive to integrate this skill into a variety of teaching and learning activities to enhance their mathematical competence. However, in practice, teachers often struggle to find suitable materials for mathematical modelling activities that meet students' level of mathematical modelling competencies yet are closely aligned with the tasks of teaching and learning in high school classrooms. The rationale, principles and strategies for selecting and adapting materials for mathematical modelling activities in senior secondary schools are developed, and case studies ranging from senior secondary application problems to modelling problems are developed using probability models as examples, concluding with teaching suggestions. The research methods and results can provide valuable materials and references for teachers to carry out high school mathematical modelling teaching activities.

Keywords

High School Mathematics, Mathematical Modelling Activities, Material Development, Application Problems

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数学建模是一种将实际应用和数学理论紧密结合的方法。它使数学知识在不同领域的应用得以充分展示,展现数学知识的产生、形成和应用的过程。因此,数学建模活动一直以来受到我国各级教育管理部门、学校、教师和学生高度重视。根据《普通高中数学课程标准(2017 年版)》的规定,数学建模被确定为重点内容,在《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》中更是要求将数学建模广泛应用于各种课堂活动。通过对学生的数学建模能力的全面提升,可以为他们的未来职业道路奠定坚实的基础[1]。在各类高中数学教材中,数学建模活动广泛存在于各个板块,这表明它对于提升学生的数学能力和理解能力至关重要。

至今,我们的高中数学建模已经有了二十多年的积累,但相对于全国所有高中的基数来说,仍然处于起步阶段,仍有很多问题待解决,其中之一便是教师问题。由于教师对“应用题练习”和“数学建模”的理解不够深入,学生们很难真正掌握数学建模的思维,从而在实际应用中缺乏能力,无法有效地参与到数学建模活动中来。同时,现有的高中数学教材中数学建模内容缺乏,缺少适合学生和老师用于开展数学建模活动的素材。李明振等人给出了几种改变数学建模素材的方法,但未给出实例[2]。《数学建模教学与评估指南》一书中给出了将数学问题改编成建模问题的实例,但是难度过大,不适用于现在的高中学生的学习[3]。

本文将探究高中数学建模教学题目选取与改编的依据、原则及策略;依据提出的原则和策略从高中应用题出发开发出高中数学建模素材的新思路,以期给一线教师开展数学建模活动提供新素材。

2. 概念界定

2.1. 数学模型

数学模型是根据事物的性质和数量关系,通过数学语言,以一种抽象的方式,刻画一种由数学符号组成的一种体系的纯粹的联系的数学结构。广义来说,数学模型可以用来描述一个复杂的现象,它可

以揭示出一个系统内部的复杂性，以及它们之间的相互作用。狭义上讲，数学模型是反映特定问题、数学关系结构或将一个系统中的变量之间的关系的数学表达。

数学模型可以用定量的方式描述概念，也可以用定性的方式来表示，但它们都必须以定量的形式呈现，因此，数学模型法的实施需要采用定量的方式。根据数学模型的结构，数学模型的分类标准较多。高中阶段的数学模型属于初等数学模型[4]。

2.2. 数学建模

所谓数学建模，就是以现实问题为基础，构建一个数学模型，然后用它来解决现实问题。当试图从定量的角度来探索一个复杂的问题时，可以借助图 1 中的过程建立数学模型来进行有效分析。

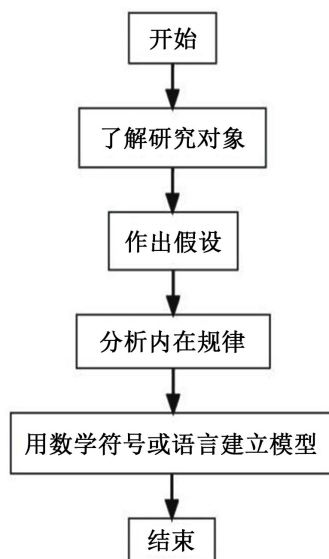


Figure 1. Mathematical model building process diagram

图 1. 数学模型建立过程图

通过数学建模，可以将数学家从仅研究数学本身的专业知识转变为一个跨越物理、生物、经济和心理等多个领域的专家，从而更深入地理解数学在实际应用中的重要作用。

2.3. 数学建模活动

通过数学建模，可以将复杂的现实问题抽象成数学概念，并以数学语言和方法来构建模型，以便更好地解决实际问题。这种综合性的实践活动，不仅是高中数学课程的重要组成部分，更是培养学生数学建模能力的重要基础。

“活动”和“活动内涵”都是重要的参考资料，因此，我们应该以“内容”为基础，深入探讨数学建模的特点，并以此为基础，逐步深入地理解数学概念，直接应用重要成果，综合运用数学成果，构建数学模型[5]。从“进行数学建模的活动”开始，深入理解数学建模的基本概念 - 主要步骤 - 主要过程 - 最终的实践这四个部分，以便更好地掌握数学建模的技能。

3. 数学建模题与传统应用题的区别与联系

数学建模题与传统的数学应用题不同，更注重实际问题情节，而数学建模题和应用题的解决都是应用数学知识，它们既有区别又有联系。

3.1. 数学建模题与传统应用题的区别

传统的数学应用题旨在通过使用数学知识来解决实际问题，它们可以通过描述实际情境中的数量关系，并且可以转换成可供计算的形式，具有实用性、简洁性、基础性、可转换性和可模拟性等特点[6]。根据图2，传统的数学应用题通常具有明确的条件，结果唯一。将现实语言转换成数学语言的过程相对简单，因此得出的结果很少会受到实际情况的影响，也不容易出现因为与实际不符而需要重新审视和修正的情况。

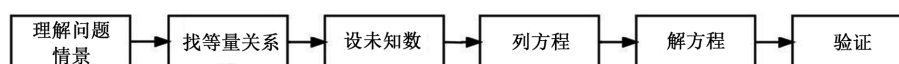


Figure 2. Application problem solving process

图2. 应用题求解过程

《课标(2017年版2020年修订)》强调了数学建模的重要性，它不仅仅是一种抽象的概念，而是一种深入探索的过程，梁贯成、赖明治等人指出，通过数学建模，可以更好地理解、分析、预测和解决现实世界的问题[3]。数学建模题是一种结合实际情况与数学概念的综合性问题，它可以帮助我们更好地理解 and 预测未来的发展趋势，如图3所示。

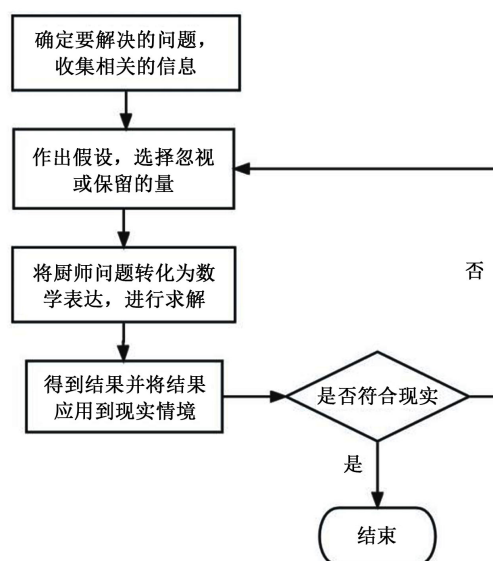


Figure 3. Mathematical modelling cycle diagram

图3. 数学建模循环图

3.2. 数学建模题与传统应用题的联系

数学建模题和传统数学应用题都是数学的重要组成部分，可以更好地理解和解决实际问题，而且可以帮助我们更好地利用数学理论和方法来解决实际问题。因此，数学应用题介于现实问题与数学建模之间，可以从现实问题 - 应用题 - 数学建模题。

和数学建模题相比传统应用题多了一些已知条件，数学建模题的变量、假设或者模型需要根据实际问题进行决定，而传统应用题已经将这些变量、假设确定，只需要选取合适的模型进行求解，所以，从传统应用题到数学建模题最主要的是打破这些确定因素的限制，将已知变未知，让学生能在真实情景下感受数学建模全过程。

4. 高中数学建模活动素材的选取与改编依据、原则以及策略

这一小节将根据上文并结合文献和实际给出高中数学建模活动素材的选取与改编依据、原则以及策略。

4.1. 高中数学建模活动素材的选取与改编依据

4.1.1. 高中数学建模教学现状

大部分的同学都已经有了有关的数学模型的经验，所以在素材选择和修改时，要确保素材能够完全反映出数学模型的特征以及整个数学模型的过程。学生在运用数学知识来解决实际问题时，所持的态度一般。因此，在选择和修改素材时，应该确保素材与现实生活密切相关，并与数学有直接的联系。学生的信息抽取能力比较弱，所以，素材的选择与改编应该确保素材要具有明确的数学规则，容易引导学生去发现。学生对数学知识的运用有一种恐惧心理，所以，对教材进行选择 and 修改时，要确保教材中所包含的知识符合新课程的要求[7]。

高中数学建模教学处于起步阶段，大部分的教师对开展数学建模教学活动抱着积极的态度。但是，由于缺少素材来指导教师进行数学建模活动，所以，素材的选择与改编应保证素材包含整个教学阶段的内容。

4.1.2. 数学建模自身特点

问题的背景主要集中在非数学方面。数学模型问题注重从生活中，从工程、经济，到化学，到其他学科，如化学、生物、物理等。通常都是以“原胚”的形式出现，不经过人工处理，需要对问题进行抽象和简化。

问题的条件具有一定隐蔽性。由于数学模型问题中存在大量可变信息，所以这些问题的情况要比常规数学应用题复杂，其中还存在着许多不确定的因素，这就要求学生能够在这些纷乱的情况下，从这些不确定的情况中，找出其中的关键变量，从而提高他们对这些重要变量的判断能力。

问题具有开放性。和纯粹的数学题不同，数学模型是没有标准答案的。同一数学建模问题，可以有多种构建数学模型的方法或多种构建数学模型的方式，这可以让不同水平的学生有不同程度的创造力。

强调解决实际问题的全过程。数学建模虽强调应用数学思想、方法和知识解决实际问题，但是这并不能被称为“数学建模”。在数学建模中，一个很重要的环节就是抽象、简化和最终的模型假设[8]。

由此，所制定的素材选取与改编应保证素材除体现数学建模的全过程外还有丰富的实际背景，包含多种数据信息，条件具有一定隐蔽性，具有一定开放性。

4.1.3. 课标对数学建模的要求

在必修课程中，数学建模活动被列为五个重点之一，其目的是帮助学生们通过观察、思考、推理和演绎，找到和解决实际问题的有效途径。这项任务需要学生们运用数学思维，构思、推理、演绎，最终形成一个有效的、可操作的、可靠的、有效的、可持续的、有效的、有效的解决方案。

在选修课中，数学建模活动是四个专题中的一个，它的具体内容是，数学建模活动采取的是课题研究的方式，学生要进行一个课题研究，这个课题可以是他们在必修课中已经完成的课题的继续，也可以是一个新的课题。

由此，所制定的题目选取与改编应保证最终素材体现数学建模的完整过程，以此题目进行教学活动能让学生经历解决实际问题的全过程，适合于以课题研究的形式开展，并有利于培养学生课题研究的能力[8]。

4.2. 高中数学建模活动素材的改编原则

4.2.1. 适合数学建模课题研究活动的内容

《课标(2017 年版 2020 年修订)》对高中阶段的数学建模实践提出了新的要求,即对高中阶段的数学模型进行全面的学习,并对其进行一项研究且进行深入的分析 and 解决[1],使其具备较强的发现和解决问题的能力。将这四个方面结合起来,所拟定的素材选择和修改应该确保素材能够使学生体验到整个数学建模的过程,并且能够成为数学建模课题研究活动的内容。

4.2.2. 包含多个变量,比传统应用题复杂

大部分学生具有良好的一般数学解题能力,但对现实问题的数学化水平不高。数学模型的一个特征是问题的隐性,在这一特征的基础上,需要对问题进行深入的研究,以培养学生的数学思维和思维方式。将这三个方面结合起来,所制定的素材选取与改编应保证素材较常规数学应用题条件复杂,包含各种不确定因素,从而能够提高学生在纷乱的条件中辨识出关键变量的能力。

4.2.3. 有利于培养学生的数学核心素养

《课标(2017 年版 2020 年修订)》指出,在数学建模过程中,学生对数学知识的理解和运用,使其对数学知识有更深层次的理解和理解[1]。将这三个方面结合起来,所制订的素材选择与改编应该确保素材情境是真实的,并且其中还包含着丰富的数学规则,这对培养学生的数学应用意识是有利的。

4.2.4. 有实际意义

《课标(2017 年版 2020 年修订)》指出,通过对数学的研究,可以使学生在实际工作中更好地运用数学,从而更好地发挥其对数学的兴趣,并增强其对数学的自信[1]。从这三个角度来看,所制订的素材选取与改编依据应该确保素材不但自身具有研究价值,而且具有良好的应用价值。

4.2.5. 有一定开放性,能培养学生创新意识

绝大多数教师未开展过高中数学建模活动,数学建模问题具有开放性,通过数学课程学习,学生的动手能力和创造意识都得到了很大的提高。将这几个方面进行整合后,所制订的素材选择与修改应该确保素材比一般的数学问题更有利于拓宽学生的思路,并对他们的创造力进行培养。

4.3. 高中数学建模活动素材的改编策略

要完成从传统的应用题到数学建模题的转变,就必须突破应用题的局限性,将某些已知的条件隐藏,将应用题的抽象层次降低,将细节进行放大,将问题置于现实的情境中,让学生体验到数学建模的整个过程。因此,制定以下从应用题到数学建模题的改编策略,如图 4。

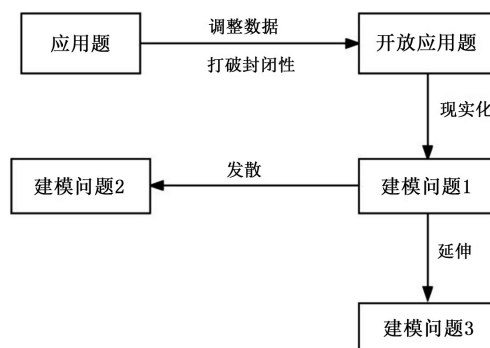


Figure 4. Strategies for adapting from application problems to mathematical modelling problems

图 4. 从应用题到数学建模题的改编策略

5. 高中数学建模教学素材选取与改编举例实施

应用题 1 一家医院为了对一种地方病与当地民众的卫生习惯(良好或不够良好)之间的关系进行研究,从已经患病的患者中抽取 100 名(称作病例组),从没有患病的患者中抽取 100 名(称作对照组),所得数据见下表 1。

Table 1. Distribution of hygiene practices in the case and control groups
表 1. 病例组与对照组卫生习惯分布

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

我们是否可以确信 99%的可能性是:患有这种疾病的人和没有这种疾病的人的卫生习惯存在差异?
附:

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

分析上题,可以发现该题数据明确,出题要求清楚,做题思路模式化直接导致该题封闭性,想要破除其封闭性,最关键的改变出题格式以此来打破做题思路的格式化。

第一步:调整出题格式。题目中不仅详细的给出了病例组和对照组中各组的卫生习惯人数,而且在题目后面附上了求解的公式以及相对应的概率大小。通过使用题目所提供的公式,学生们可以轻松计算出 99%的可能性,从而判断出患有某种疾病的人群与没有患有该疾病的人群之间的卫生习惯是否存在差异。为了提高出题的开放性,决定把附件中的公式和题目中的 99%内容都删除,让学生自行思考应该使用哪些知识来解决问题,并评估他们是否认为患有某种疾病的人和没有这种疾病的人的卫生习惯存在差异。暂时将其称为“开放型应用题”。

开放型应用题 1 为探究一种地方性疾病对当地居民卫生习惯的影响,一家医疗机构对 100 例已经患有这种疾病的病例进行了随机抽样,并对未患有这种疾病的人群进行了 100 例的抽样,最终得出的结果如表 1 所示。

研究不同患者的卫生习惯是否存在显著差异?

为了更好地理解和应对这一问题,学生们会仔细研究哪些知识点可以帮助他们比较患有这种疾病的人和没有这种疾病的人的卫生习惯。并且查阅资料找到 K^2 所对应的概率大小。当然,大部分同学可能会在求出 K^2 以后,忘记怎么去进行下一步,也就是说,当 K^2 求解出来以后,忘记 K^2 要怎么去用。这个时候,老师可以给出适当的提醒。或者让同学以小组为单位去解答该题,让各小组成员明确分工,互相合作交流。同时,也可以让同学们了解到,在现实生活中并不像书本或者试卷上那样,数据明确、清晰。这个问题虽然可以让学生自己亲身经历查阅文献,搜集数据的过程,但是仍然缺乏现实意义,那么下一步就要将题目现实化,增加一些实际的场景。

第二步:现实化。想一想各地方的地方性疾病,加入实际地址,让学生更加关注实际生活。同时,让学生查阅资料,进一步发现地方性疾病的发生,除了与卫生习惯有关,还与其他因素有关,从而探寻各因素与疾病发生的关系,从而跳出单因素限制,找寻其他因素与患该疾病的关系,使得题目更加现实

化。

建模问题 1：一方水土养一方人，地方的饮食、生活习惯可能与患某种疾病的风险存在关联。为探究青岛居民患痛风的原因，一家医疗机构对 100 例患者进行了随机抽样，并对另外 100 例未患者进行了对照研究。研究结果显示，患者的饮食和卫生习惯与当地居民的相似度较高，而未患者的相似度较低。因此，本研究旨在探讨两组居民之间的差异，以期获得更多的信息？

经过改编，问题变得更加开放了。为了解决这个问题，学生需要搜集相关信息和文献，并使用这些数据来确定患有这种疾病的人和没有患这种疾病的人的卫生和饮食习惯是否存在差异。同时，给出的数据不一定都有效，这里就需要老师提醒学生，找到合适的方法对已知的数据进行预处理，选出具有代表性的特征指标来进行计算。同时，让学生体会影响某种疾病的因素有很多，但是影响因素间会有差异。

第三步：延伸。为了将问题更加深入并且让学生思维更加开放，更加深入调查该地的地方性疾病与居民卫生习惯、饮食习惯的关系，可以让学生根据所给的数据考察该地的卫生习惯、饮食习惯与该地的地方性疾病的相关性。

第四步：发散。除了调查疾病的发生，还可以调查某种物品的购买地的分布等等。假设，一网购平台为研究某件商品购买区域的分布以及仓库的建设位置的关系。这样，学生就要考虑那一部分地区更加需要购买这件商品，考虑邮费以及加工费等各种因素，给出合理的该物品的仓库建设地。

6. 结论

数学模型是《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》中的重要组成部分，然而，教师却很难寻找到与其发展相适应的素材。在阅读文献过后，找到了从应用题到数学建模题的途径，认识到了应用题的封闭性，进而设定了打破封闭性－现实化－发散－延伸这四步将应用题改编成数学建模题，并与概率模型相结合进行具体的分析。希望能为广大的一线教师进行数学模型教学提供新的素材。

基金项目

黄冈市教育科学规划课题，“表现性评价在高中数学建模活动教学的实践研究”(2022GB36)。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 李明振, 喻平. 高中数学建模课程实施的背景、问题与对策[J]. 数学通报, 2008, 47(11): 8-10+14.
- [3] 梁贯成, 乔中华, 陈艳萍, 赖明治. 数学建模教学与评估指南[M]. 上海: 上海大学出版社, 2017.
- [4] 田红梅. 数学建模在高中数学教学中的融入[D]: [硕士学位论文]. 西安: 西北大学, 2014.
- [5] 黄炳锋. 数学建模活动“教”“学”“评”一致的实践与思考[J]. 福建基础教育研究, 2021, 146(2): 45-48.
- [6] 杨昌红, 颜宝平. 数学建模题与传统数学应用题的联系[J]. 高考, 2020, 363(2): 180-181.
- [7] 彭介顾. 新课程标准下的高中数学建模教学实践研究[J]. 数学学习与研究, 2022(17): 125-127.
- [8] 崔丽红. 高中数学建模教学题目探究[D]: [硕士学位论文]. 石家庄: 河北师范大学, 2020.