

中澳高中数学教材概率内容的比较研究

肖阳芳¹, 徐金润¹, 邵贵明¹, 吕涛²

¹黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

²武穴中学, 湖北 武穴

收稿日期: 2023年6月21日; 录用日期: 2023年10月3日; 发布日期: 2023年10月13日

摘要

随着信息时代的到来, 学生通过教学培养学生的数据分析能力越来越重要, 教材又是教学中的重要资源, 因此编写出科学合理的教材尤为重要。本文运用文献研究法、比较分析法通过概率内容选取编排和呈现的比较、内容广度和深度对比、课程难度三个维度对中澳教材概率知识部分进行比较, 得出结论: 两版教材对概率知识的编排各有特色, 人教A版在内容编排中可以更关注知识内部的关联; 考虑知识体系的一致性的原则。

关键词

概率, 教材比较, 课程难度

A Comparative Study of Probability Content in Mathematics Textbooks of Chinese and Australian High Schools

Yangfang Xiao¹, Jinrun Xu¹, Guiming Shao¹, Tao Lyu²

¹School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

²Wuxue Middle School of Hubei Province, Wuxue Hubei

Received: Jun. 21st, 2023; accepted: Oct. 3rd, 2023; published: Oct. 13th, 2023

Abstract

With the coming of the information age, it is more and more important for students to train their ability of data analysis through teaching, and teaching materials are important resources in teaching, so it is particularly important to compile scientific and reasonable teaching materials. By using literature research method and comparative analysis method, this paper compares proba-

bilistic knowledge in Chinese and Australian textbooks from three dimensions: comparison of probabilistic content selection arrangement and presentation, comparison of content breadth and depth, and course difficulty, and draws a conclusion: The two textbooks have their own characteristics in the arrangement of probabilistic knowledge, and the People's Education Version A can pay more attention to the internal connections of knowledge and consider the principle of consistency in the knowledge system in content arrangement.

Keywords

Probability, Textbook Comparison, Difficulty of Course

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

21 世纪是一个信息爆炸的时代, 大众每天都要面对各式各样的数据与不确定因素带来的挑战。而统计与概率作为处理数据与不确定因素的重要工具, 已成为公民必备的数学素养之一[1]。因此, 各个国家、地区都积极地进行统计与概率课程的改革, 中国大陆也不例外。然而, 统计与概率正式进入中国大陆数学课程的时间较短, 特别是高中, 仅有十余年的历史, 这直接导致了中国大陆高中统计与概率相对重要与其教学、研究相对滞后的突出矛盾。教材作为期望的实施课程, 对其进行研究具有重要的意义, 特别是不同国家教材内容的比较, 不仅可以考察学生在数学学习经历上的差异, 还可以考察这种差异对学生数学学习的影响。基于此, 本文试图通过对人教 A 版、澳洲高中概率教材中相关的内容编选的比较, 以期概率课标修订与教材改革提供思考和建议。

2. 研究设计

2.1. 研究对象与方法

本文选用文献研究法、内容分析法和比较研究法, 对中国大陆 2019 年出版的人教(A 版)选择性必修第三册第七章“随机变量及其概率分布”(以下简称人教 A 版), 和由英国剑桥大学出版社(Cambridge University Press)出版的 VCE 课程数学教材(Mathematical Methods Units 3 & 4) (2015 年版)第十三章至第十六章(以下简称澳洲 MM 教材)作为比较对象。

2.2. 研究维度

本文从内容的选择、编排方式、呈现方式, 课程内容的广度和深度, 教材习题的呈现方式和习题的难度等方面进行定性及定量的研究, 比较人教 A 版和澳洲 MM 教材概率内容的异同。

3. 研究结果

3.1. 内容异同

3.1.1. 内容选取

在内容主题的选取方面, 有 5 个主题是人教 A 版[2]和澳洲 MM 教材共有的, 分别是条件概率与全概率公式、离散型随机变量及其分布列、离散型随机变量的期望值和方差、二项分布、正态分布; 有 5 个

主题是澳洲 MM 教材独有的, 分别是二项分布的概率分布图、寻找样本量、连续性随机变量的性质和四分差范围、连续性随机变量的方差和标准差、正态分布的应用; 对扩展知识模块, 人教 A 版主要选取贝叶斯公式、二项分布的性质(概率分布图), 澳洲 MM 教材主要选取连续性随机变量均值和方差的性质、累计分布函数[3]。

3.1.2. 内容编排

Table 1. Comparison table of teaching material content arrangement sequence

表 1. 教材内容编排顺序对比表

PEP 教材	MM 教材
条件概率及乘法公式	概率问题的解决策略
全概率公式	条件概率及乘法方式
*贝叶斯公式	全概率公式
离散型随机变量	事件的相互独立性
离散型随机变量的分布列	离散型随机变量的分布列及其性质
两点分布	离散型随机变量的数字特征
离散型随机变量的均值	伯努利序列和二项分布
离散型随机变量的方差	二项分布的概念图、期望和方差
伯努利试验	二项分布的应用
二项分布	二项分布期望和方差的证明
二项分布的应用	连续型随机变量
二项分布的均值和方差	连续型随机变量的均值和中位数
超几何分布	连续型随机变量的方差、标准差和四分差范围
超几何分布的均值	
正态分布	*连续性随机变量均值和方差的性质
正态分布密度曲线的特点	*累计正态分布布函数
3 σ 原则	正态分布
	3 σ 原则
	正态分布的应用
	二项分布的正态逼近

通过表格可以看出, 见表 1, 两版教材都先安排条件概率和全概率公式, 人教 A 版编有贝叶斯公式, 把它作为选学内容, 不作考试要求, 澳洲 MM 教材在全概率公式之后安排了独立事件; 对于离散型随机变量内容安排, 人教 A 版先介绍了离散型随机变量及其数字特征, 再安排两类重要的概率模型, 二项分布和超几何分布, 并介绍其均值和方差。澳洲 MM 教材先安排离散型随机变量的分布列及其数字特征, 再安排二项分布的概念图、期望、方差, 以及二项分布的应用和期望和方差的证明[4]。以人教 A 版教材为参照系, 澳洲 MM 教材只安排了一个概率模型, 但是还澳洲 MM 教材对二项分布内容的安排多于人教 A 版, 不过可以看出, 这部分内容两个版本都遵循了由一般到特殊的原则。

对于连续性随机变量内容安排, 人教 A 版介绍了正态分布、正态曲线的特点、3 σ 原则。MM 教材先

后安排了连续型随机变量及其概率密度函数、均值和方差，把平均值和方差的性质和累计分布函数作为拓展知识，再安排典型概率模型正态分布， 3σ 原则，运用正态分布解决问题，正态分布与二项分布的关系。同样以人教 A 版教材为参照系，澳洲 MM 教材介绍了连续性随机变量及其性质，正态分布知识内容的安排上，澳洲 MM 教材编排也更全面，MM 教材对这部分内容编排同样遵循了由一般到特殊的原则[5]，而人教 A 版并没有安排连续性随机变量及其相关性质。

3.1.3. 呈现方式

对概念性质和公式的呈现，人教 A 版对教材概念性质的关键字眼标为蓝色，对重要公式用矩形方框框定；澳洲 MM 教材中对概念性质和公式都用有颜色的框图框定，对习题的呈现，人教 A 版教材不论是小节习题还是章节习题，都以解答题和应用题为主，澳洲 MM 教材安排的每小节习题都有对应的例题，在章节习题中还安排了多项选择题的形式。

另值得一提的是，PEP 教材有“探究与发展”栏目，澳洲 MM 教材对知识点和公式都有特定板块的框图呈现。

3.2. 内容广度和深度

3.2.1. 内容广度

内容广度是课程内容所涉及到的内容的范围和广泛程度，本研究将采用知识点的多少进行量化，知识点越多，内容广度越大，反之，广度越小。人教 A 版教材以概念、性质、公式、探究、应用、选学内容、探索与发现等维度为计量单位；澳洲 MM 教材知识体系安排较系统全面，以每小节中的分节为计量单位；两版教材的拓展知识也计入内容广度[6]。课程广度计算公式为： $G = \frac{a_i}{b}$ ，其中 a_i 代表该版本所含的知识点数量个数， b 表示这两个版本概率知识点的总数(两版教材知识点的并集)。

基于上面的准则，现统计人教 A 版和澳洲 MM 版教材的知识点，人教 A 版知识广度汇总，MM 版教材。根据课程广度的计算公式与人教 A 版和澳洲 MM 版教材的知识点汇总，见表 2。

Table 2. Content breadth statistics of the two versions

表 2. 两个版本内容广度统计

版本	知识点的个数	总量	广度 G
人教 A 版	13	23	0.57
MM 版	20		0.87

可见，在内容广度上，人教版共有 13 个知识点，澳洲 MM 版教材共有 20 个知识点。出现这样知识广度差异显著的原因大致为：(1) 澳洲 MM 教材力求知识体系的完整性。在随机变量类型上介绍了离散型随机变量和连续型随机变量，并展开定义性质及其分布列、数字特征、概率密度函数等，同时再分别举出特殊的概率模型，介绍定义性质、数字特征及其应用；人教 A 版教材在连续性随机变量只选取正态分布进行介绍。(2) 教材编排不同。例如，样本空间、事件的相互独立性，在人教 A 版必修第二册中。(3) 澳洲 MM 教材选取的部分知识，人教 A 版没有涉及，例如，概率密度函数、累计分布函数、期望和方差的证明等知识。

整体来说，澳洲 MM 教材在这部分的内容广度远远高出人教 A 版。主要体现在连续性随机变量、正态分布等部分。澳洲 MM 教材在内容广度上更注重知识的全面性和完整性，人教 A 版在知识广度上更注重学生的认知水平。

3.2.2. 内容深度

内容深度泛指教材内容的思维深度,本文先将各版知识点与该课程设置的结果性目标分别对应起来,随后将所得目标按其水平进行赋值(分为 1, 2, 3, 4 四个等级),确定每个知识点的深度,最后分别计算两版教材的概率知识点深度的加权平均值,记为该课程的(平均)深度。

本文研究内容深度采用课程深度模型: $S = \frac{\sum g_i c_i}{\sum c_i}$, 其中 g 代表知识点的深度水平, c 代表其对应知

识点的数量。人教 A 版以《普通高中数学课程标准(2017 年版)》衡量知识点的深度水平, 澳洲 MM 版教材以每章节前的目标栏目来衡量知识深度水平, 统计结果见表 3。

Table 3. Depth assignment table for People's Education Version A and the Australian MM edition

表 3. 人教 A 版和澳洲 MM 版教材深度赋值表

深度赋值	结果性目标	人教 A 版知识点	澳洲 MM 版教材知识点
水平 1	了解	条件概率与独立性的关系、正态分布	概率的基本概念、伯努利序列、连续性随机变量、标准正态分布、标准正态分布的变换
水平 2	理解	离散型随机变量分布列	二项概率分布、区间概率在概率密度函数图面积的应用、
水平 3	掌握	离散型随机变量的数字特征、二项分布及其数字特征	不同参数值下二项概率分布的形状、 μ 和 σ 对概率密度函数图的影响、正态分布的均值、中位数和标准差
水平 4	灵活运用	条件概率、二项分布、超几何分布	离散型随机变量的均值和方差、二项概率分布的均值、方差和标准差、二项概率分布的应用、概率密度函数来指定连续随机变量的分布、微积分从概率密度函数中找出区间的概率、利用技术从概率密度函数中找出区间的概率、连续性随机变量的期望中位数和方差

根据统计结果,人教版赋值为 1, 2, 3, 4 的知识点分别有 2, 1, 2, 3 个, 澳洲 MM 版赋值为 1, 2, 3, 4 的知识点有 5, 5, 3, 7 个, 人教 A 版教材和 MM 版教材相应知识点的深度水平百分比对比。两条折线走势图的差异在水平 2(理解)和水平 3(掌握)上比较大,这意味着澳洲 MM 版教材更注重概率统计知识定量和定性的双向练习,在水平 4(应用)上,虽然两版教材都占比较大,不过对于离散型随机变量的数字特征,人教 A 版是处于水平 3, 澳洲 MM 教材把这部分内容放在水平 4(应用),说明澳洲 MM 版教材更注重离散型随机变量数字特征的实际应用[7]。

接着对比两版概率内容的总体深度水平,设人教 A 版教材的内容深度为 S_1 , 澳洲 MM 版教材的内容深度相应为 S_2 。得:

$$S_1 = \frac{\sum g_i c_i}{\sum c_i} = \frac{1 \times 4 + 2 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 3}{10} = 2.3$$

类似的,

$$S_2 = \frac{\sum g_i c_i}{\sum c_i} = \frac{1 \times 5 + 2 \times 5 + 3 \times 3 + 4 \times 7}{20} = 2.6$$

由结果可知,澳洲 MM 版概率课程的总体深度略高于人教 A 版教材。结合两版教材知识点数量上可发现,这个差异主要由于澳洲 MM 版教材对连续性随机变量知识点编排较全面,人教版举出特殊的连续型随机变量二项分布,并没有对连续性随机变量的一般性质展开。不过,在离散型随机变量这一类型,人教 A 版的内容深度比澳洲 MM 版教材内容略高。

3.3. 课程习题难度

3.3.1. 知识点数量水平

知识点数量是衡量习题、例题难度的重要指标，已有的文献一般将含有一个知识点的习题的难度规定为水平 1，含有两个知识点的习题的难度规定为水平 2，含有 3 个知识点的习题的难度规定为水平 3，含有三个及三个以上知识点的习题的难度规定为水平 4。本文也采用这个标准进行测量统计，如果某一习题包含两种水平，取最大水平作为统计量。

经过统计，人教 A 版与澳洲 MM 教材概率知识点方面各个难度水平习题的数量和百分比如表 4。

Table 4. The number and proportion of knowledge points in the People’s Education Version A and the Australian MM edition textbooks

表 4. 人教 A 版与澳洲 MM 版教材知识点数量水平及所占比例

		水平 1	水平 2	水平 3	水平 4
人教 A 版	个数	10	12	16	7
	百分比	23%	27%	35%	15%
澳洲 MM 版	个数	44	35	28	9
	百分比	38%	30%	24%	8%

通过表 4 可以发现，人教 A 版习题在水平 3 方面习题居多，总共有 16 个，占总数 35%。其次是水平 2 和水平 1，分别由 12 和 10 个，总占比 27%和 23%，水平 4 是含有三个及三个以上知识点的习题，人教 A 版共有 7 个，占比 15%。澳洲 MM 版教材数量共有 116 个，其中水平 1 和水平 2 比例较大，分别由 44 个和 35 个习题，占比分别为 38%和 30%，水平 3 也有 28 个习题，占比 24%，澳洲 MM 版教材水平 4 共有 9 个习题，占比为 8%。

从数据可看出，人教 A 版习题在基础题和知识应用题占比较多，体现人教 A 版注重知识理解和知识的应用。澳洲 MM 版习题的数量远多于人教版教材，共有 116 个，基础题和多项选择题的数量较多，同样体现澳洲教材注重基础知识。

3.3.2. 背景水平比较

背景水平也是衡量例、习题难度的重要指标[8]。本文将借鉴鲍建生难度模型中背景因素的划分及赋值方法，将“无实际背景”的例、习题难度水平赋值 1，将背景是“学生生活”的例、习题难度水平赋值 2，将背景是“公共常识”的例、习题难度水平赋值为 3，将背景为“科学情境”的例、习题难度水平赋值为 4。

通过统计，人教 A 版与澳洲 MM 版教材概率背景方面各个难度水平习题的数量及其百分比如表 5 所示。

Table 5. The teaching background level and proportion of the People’s Education Version A and the Australian MM edition

表 5. 人教 A 版与澳洲 MM 版教背景水平及所占比例

		水平 1	水平 2	水平 3	水平 4
人教 A 版	个数	5	18	13	9
	百分比	11%	40%	29%	20%
澳洲 MM 版	个数	18	37	50	11
	百分比	16%	32%	43%	10%

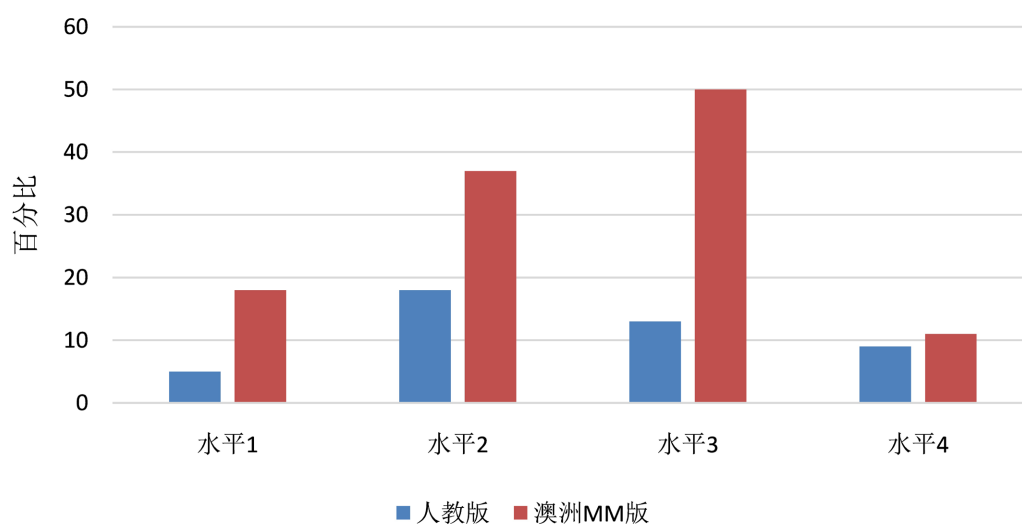


Figure 1. Exercise background level comparison diagram

图 1. 习题背景水平比较图

通过图 1 可以发现,在人教版中,背景为“学生生活”程的习题数量最多,有 18 个,其比例接近总数的一半,为 40%。其次是背景为“公共常识”的习题,其数量为 13 个,占比 29%，“科学情境”背景的习题有 9 个,占比 20%,可见人教版在设置习题背景是,选取较多的是学生较为熟悉的背景;在澳洲 MM 版教材中,背景水平为 3 的习题较多,数量为 50 个,同样接近总数的一半,其次是水平 2 的习题,共有 37 个,占比为 32%,水平 1 和水平 4 的习题数量分别为 18 和 11 个,占比为 16%和 10%。从数据可以看出,不论是人教 A 版和澳洲 MM 版教材,“学生生活”背景和“公共常识”背景这两部分占比都比较大,这蕴含着两个版本在选取题目时都考虑习题与学生、与生活的联系,将数学知识运用于生活实际中。

4. 研究结论与启示

4.1. 研究结论

本文从内容选取、编排和呈现方式,内容广度和深度和课程习题的维度对人教 A 版和澳洲 MM 版教材进行了比较分析,根据比较结果发现,这两版教材对于概率部分的编写在部分维度上非常接近,但是在有些维度上具有一定的差异。下面将对本研究的几个维度的分析结果进行总结,根据研究结论对我国高中教材概率部分的编写与修订提出启示和建议。

从内容异同角度来看,两版教材都选取了概率的重要知识,不过澳洲 MM 版教材比人教 A 版知识更丰富,主要体现在连续性随机变量和二项分布以及正态分布的应用;知识编排上,两版教材都遵循了从一般到特殊的原则,人教 A 版在离散型随机变量选取了两个特殊的概率模型,澳洲 MM 版教材在离散型随机变量和连续性随机变量分别选取了一个特殊的概率模型;关于内容的呈现方式,人教 A 版和澳洲 MM 版教材大部分知识都采用文本或符号表达的方式,在知识呈现时注重结合图片和表格的形式,其中人教 A 版教材在概率部分知识呈现形式种类具有高度的多样性,许多内容甚至采用文字 + 图片 + 表格结合的编写方式。澳洲 MM 版教材多运用文字 + 图片形式展现概率分布以及解题方法,其中澳洲 MM 版教材对于概念公式的呈现方式更显目。同时还增添了卡诺图、概率表等知识。

从内容广度和深度来分析,人教 A 版教材的内容广度和深度略低于澳洲 MM 版教材,澳洲 MM 版教材更注重知识编排体系的全面性和完整度,人教 A 版更侧重考虑学生的接受水平和教师的教学能力。

课程习题方面，人教版安排有不同层次的习题类型，从不同角度考察学生对知识的掌握和学生的数学能力。

4.2. 启示

教材分析的目的是为了通过对比来借鉴吸收具有科学性、合理性和适用性的教材编写模式，以其为我国教材编写提供指导性价值。本文通过从不同的维度进行对比，得出一些有关概率知识编写的思考和建议。

在知识的选取和编排中，可以更关注知识内部的关联，重视知识本身之间的内部关联和逻辑顺序[9]，例如，条件概率和事件的独立性描述的是随机事件之间的关系问题，应该归属于随机事件的范畴。人教 A 版是在“随机变量及其分布”中，首先介绍条件概率，随后再介绍离散型随机变量等内容。这样的编排顺序和框架让学生不知道该怎么归纳这小部分知识，误以为条件概率属于随机变量的范畴，产生概念属性的混淆。

从知识的结构性出发，教材的知识结构应符合知识体系的一体性原则。例如，人教 A 版对于连续性随机变量只举出特殊的概率模型正态分布，没有对连续性随机变量的定义及其一般性质展开，教材编排应该考虑知识体系的内在结构和体系，如果缺乏体系的完整度，教材编排将缺乏科学性，同在教学时就会造成学生认知上的混乱和延误。同时教材编排要考虑与大学教材的衔接。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [2] 中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书数学选择性(必修三) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [3] 岳增成. 中澳高中数学统计与概率教材比较研究[D]: [硕士学位论文]. 金华: 浙江师范大学, 2014.
- [4] 李萍, 张清年. 澳大利亚高中数学教材的特点及启示[J]. 教学与管理, 2012(18): 159-160.
- [5] 杨秋香. 中澳高中数学教材探究板块比较研究[D]: [硕士学位论文]. 济南: 山东师范大学, 2019.
- [6] 梁玮. 中澳高中数学教材概率内容的比较研究[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中师范大学, 2021.
- [7] 刘一敏. 中澳高中数学教材概率与统计内容的比较研究[D]: [硕士学位论文]. 北京: 中央民族大学, 2020.
- [8] 翟洁. 中澳高中数学教材数列内容的比较研究[D]: [硕士学位论文]. 北京: 中央民族大学, 2019.
- [9] 金黎. 中澳高中数学教材概率与统计内容的比较研究[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中师范大学, 2018.