

线性代数课程课堂教学探讨

常海霞¹, 刘龙生^{2*}, 孙涛¹

¹上海立信会计金融学院统计与数学学院, 上海

²安庆师范大学数理学院, 安徽 安庆

收稿日期: 2023年9月24日; 录用日期: 2023年11月29日; 发布日期: 2023年12月7日

摘要

新文科背景下, 为满足培养应用型人才的需要, 线性代数已成为财经类院校的一门重要基础课程。新冠疫情期间开展了线上教学, 部分学生养成了思维惯性, 将线上的听课模式延续到现在的线下课堂, 导致听课往往受困于琐碎的知识点, 形成不了系统, 逐渐失去学习兴趣。鉴于此, 本文在课堂教学中, 通过运用“5W + H”的思维模式开启课程引论、通过经典案例引入问题、介绍知识点的来龙去脉、给出简明扼要的章节知识点数字化罗列、突出线性代数的思想解决学习过程中的痛点问题等措施来引领课堂, 激发学生的学习兴趣。以此来提高学生独立思考、自主学习、实践创新的能力。

关键词

线性代数, 课堂教学, 5W + H, 自主学习

Discussion on Classroom Teaching of Linear Algebra

Haixia Chang¹, Longsheng Liu^{2*}, Tao Sun¹

¹School of Statistics and Mathematics, Shanghai Lixin University of Accounting and Finance, Shanghai

²College of Mathematics and Physics, Anqing Normal University, Anqing Anhui

Received: Sep. 24th, 2023; accepted: Nov. 29th, 2023; published: Dec. 7th, 2023

Abstract

In the context of the new liberal arts, linear algebra has been an important foundational course in finance and economics colleges to meet the needs of cultivating applied talents. During the COVID-19, online teaching causes some students to develop thinking inertia. They continue the

*通讯作者。

online listening mode to the current classroom study, which often lead to being trapped in trivial knowledge points, and gradually lose interest in learning. In view of this, this paper takes some measures in classroom teaching. It includes the “5W + H” thinking mode to start the course introduction, issues introduction through classic cases, the origin and development of knowledge points, concise chapter knowledge points, the idea of linear algebra to solve pain points in the learning process, and so on. These measures guide the classroom and stimulate students’ interest in learning. These enhance students’ ability to think independently, learn independently, and innovate in practice.

Keywords

Linear Algebra, Classroom Teaching, 5W+H, Autonomous Learning

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

线性代数是财经类院校中一门重要的工具型基础课程，它广泛应用于经管类学科中(例如，金融中的投资模型，经济管理中的贸易模型、价格均衡，统计学中的回归分析、时间序列分析，等等)。线性代数在社会科学技术的各个领域也都发挥着十分重要的作用，比如金融工程、结构力学、计算机、控制优化问题、机器学习[1]、数据拟合问题等，很多的工程技术问题都可转化为线性代数中的线性方程组、矩阵特征问题来处理。数学名著 *Encounter with Mathematics* [2]中提到“要是没有线性代数，任何数学和初等教程都讲不下去。按照现行的国际标准，线性代数是通公理化来表述的。它是第二代数学模型，其根源来自于欧几里得几何、解析几何以及线性方程组理论。如果不熟悉线性代数的概念，像线性性质、向量、线性空间、矩阵等等，要去学习自然科学，现在看来就和文盲差不多，甚至可能学习社会科学也是如此。”

线性代数的内容比较抽象，内容主要包括线性方程组理论、矩阵特征理论及二次型。此课程开设的目的，一方面为后续课程的学习和深造做一定的知识铺垫、提供底层思维；另一方面旨在培养学生严谨的逻辑思维能力、严密的推理论证能力、抽象思维能力和创新能力，从而培养良好的数学素养，使其具备运用线性代数方法解决实际问题的能力，提高数学素质。对于线性代数的课程教学改革，目前有很多的研究成果，例如[3] [4] [5]。下面就笔者所在院校线性代数课程教学现状的实际情况进行分析，对该课程课堂教学提出几点思考。

2. 线性代数的课程现状

线性代数是财经类专业的一门公共数学基础课程。笔者所在的院校，在大学一年级的第二学期开设此课，共三十学时。主要讲述线性代数中一些基础内容，包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵特征值的内容。线性代数的知识点比较多，课时非常紧张。

线性代数的传统教学往往侧重于对理论的讲解，尤其第一讲大多从行列式讲起，仅仅“前无古人、后无来者”的行列式定义就将学生搞得焦头烂额。加之新冠疫情期间开展的线上教学，部分学生已养成了思维惯性，将线上的听课模式延续到现在的线下课堂，使得一看到抽象的定义、繁琐的计算，就想“绕路走”。感觉不到此课程与实际应用的联系，逐渐失去了学习兴趣。为了激发学生的学习积极性，实现

课程开设的目的,对线性代数课程课堂教学改革迫在眉睫。

“躬耕教坛,强国有我”,作为教师,培养应用型人才,应从所教的学科入手不断进行课堂教学改革尝试。那又如何进行课堂教学改革呢?德国教育家第斯多惠说过:“教学的艺术不在于传授本领,而在于激励、唤醒和鼓舞”,上海交通大学数学系乐经良教授[6]也指出,教师的主导性和学生的主体性统一是教学的一项重要原则:一门课程教学的方向、内容、方法和组织都是由教师设计和决定,教师不仅传授知识,同时以言传身教影响学生,指导学生的学习方法和态度,启发学生的学习积极性和能动作用。

此线性代数课堂教学改革将从教师主导性和调动学生主体性方面作出尝试。

3. 线性代数课堂教学探讨

基于笔者多年的教学和指导本科生毕业论文时对学生的观察,目前存在一个非常严峻的现象:部分学生缺乏独立思考,不会提问问题,自主学习能力差。究其本质是考虑问题缺乏思维模式。作为躬耕教坛的一线老师,在课堂上给学生输入一种自主学习思考问题的思维模式,对于实现教学目标和学生自身的成长方面具有非常重要意义。

3.1. 运用“5W + H”思维模式,上好线性代数第一堂课

好的开始是成功的一半。线性代数的引论,让学生大体了解这门课程,并产生学习兴趣,爱上这门课程。这对于一个学期的学习效果而言,尤为重要。

(1) **What:** 给出线性代数的主要内容,研究对象是什么;介绍什么是线性映射、线性运算的定义及线性代数这门课程在整个大学数学中占据的位置。一学期学习的主要内容等。笔者所在院校由于受课时限制,只讲到线性方程组的理论和矩阵特征值的定义。对于教材章节的安排,行列式、矩阵、向量组是解线性方程组的工具。

(2) **When Where Who:** 从我国西汉时期《九章算术》中的第八章分离系数法解线性方程组讲起,介绍线性代数的发展史。

(3) **Why:** 为什么学习线性代数?首先,线性代数作为一门公共必修课,为后续课程做知识储备。其次,线性代数有着广泛应用。最后,通过线性代数课程,培养严谨逻辑思维、严密的推理论证能力、创新实践能力,进一步提高数学素养。

(4) **How:** 如何学好线性代数?课前提前预习;上课要有仪式感,收走手机,课堂上“眼-口-手-脑”并用,做一定的辅助题目巩固所学内容,当堂内容当堂吸收;课下复习巩固。课程学习过程中,注意事项明确告诉学生。强调“好记性不如烂笔头”,课堂上要多写多记,以及学大学数学也需要熟能生巧。

经过对课程的引论,学生对线性代数的内容、学习方法等有大概的认识,对于顺利开展章节内容起着积极促进作用。

“5W + H”思维模式,简单好用。在小学阶段,语文老师就经常提到它的用处,但后来随着更多抽象知识的输入,这种思维模式往往被忽视掉。头脑里一旦有了“5W + H”模式,处理分析问题时便于理清思路;用到自主学习、自我研读中,可进行自我提问,会起到事半功倍的效果;写毕业论文时,文章思路、内容框架结构也会更清晰。

3.2. 采用典型案例引入问题,利用学习迁移法给出知识点的来龙去脉,对教学内容进行适当调换顺序进行授课

受课时的限制,教学内容主要讲授两大部分:线性方程组理论(行列式、矩阵、向量相关内容),矩阵特征值。

一般地,线性代数课程第一讲是从行列式章节内容讲起,对于行列式定义中复杂的符号表述,不少学生感觉行列式的运算法则非常抽象,难于理解。更有部分同学一学期下来都没有弄清楚行列式的定义,甚至不管遇到几阶的行列式题目,都是直接套用对角线法则来求解。鉴于此,我们适当调整了课程第一讲内容的授课顺序,先从线性代数课程的核心内容—线性方程组讲起,随后引入矩阵、矩阵初等变换,给出行列式的概念。

首先可采用列昂惕夫(Leontief)提出的货物交换经济模型来引入线性方程组,即利用高斯消元法将线性方程组化成阶梯形方程组的过程中,通过分离系数法得到一系列数表,引入矩阵、矩阵的初等变换、阶梯形矩阵的概念;并列举一些经济问题中的矩阵表述(运输问题的矩阵表述、商品价格及销售量的矩阵表述、对策论中局中人得益的矩阵表述,等等)。其次,把消元法解线性方程组解的判别和通解表达式,给出矩阵秩的初步概念,抛出线性方程组对应的增广矩阵和系数矩阵秩指标在方程组不同解的情况下满足什么条件的问题。通过这知识迁移的方式,学生就很清楚地知道矩阵这一概念从哪里来的,到哪里去,矩阵化简的工具、目标也就跃然于心了。矩阵的概念引入之后,矩阵作为研究对象,接下来自然就考虑矩阵的运算,矩阵的第一种运算就是 n 方阵的行列式,通过二阶、三阶行列式的定义给出 n 阶行列式的定义,强调行列式是矩阵的一个运算,和数的加、减、乘、除类似,只是运算法则复杂了一些而已。这样学生自然就会分清楚矩阵和行列式的本质区别了。

通过线性方程组典型案例的引入,行列式与矩阵的授课顺序经过一番适当调整后,内容衔接更加顺畅,解决了直接给出行列式定义的知识难、理解难的痛点问题,调动了学生的学习积极性。在一定程度上,也培养了学生学习新知识内容时,具有了解它的来龙去脉的意识,站在一个知识体系的角度去俯视它、探索它的思维。

3.3. 注重将章节知识点进行简明扼要的数字化罗列,用于学生导入式学习和复习中

为了提高学习效率,在新的一章开始或者一章结束时,基于选用的教材[7]内容,给出容易记住的简明扼要的章节要点十分有必要。例如,行列式章节要点,给出“7+8+1”:计算行列式的7种方法、8类特殊的行列式、1个行列式的应用-Cramer法则;在矩阵运算章节,给出“5+8”:5类特殊矩阵,矩阵的8种运算,等等。这些数字化的章节要点,可以在学习这一章前,通过线上教学平台发布,让学生自主学习,写出每一个数字代表的具体内容。这样做,培养提高了学生的自主学习能力。这些数字化的章节要点,也可以用于一章内容结束时的总结,便于学生复习。

3.4. 发挥线上教学平台优势,师生各自发布学习过程中遇到的知识难点痛点话题,激发学习兴趣,提高课程学习的参与度

为了提高授课效率,每堂课前教师可在课程的线上教学平台,发布导学内容,让学生提前预习;学生也可随时在线性代数发布学习过程中遇到的困惑问题,老师和同学看到后都会及时回答。比如,笔者发布过计算一行列式,学生上传的图片中,给出了不同的解法;让学生去调研矩阵的应用,学生给出回复—目前火热的ChatGPT运行会涉及到矩阵的算法、可逆矩阵可用做密码学中的一种信息编码与解码中、矩阵的特征值特征向量理论在天气Markov链稳定状态中的应用、对称矩阵、幂等矩阵的性质在统计学中的应用,等等。同时,学生也可发布一些问题(比如,计算行列式的拆项方法,很容易出错);向量组的线性无关、线性相关的定义,不好理解;矩阵的秩代表着什么含义;那些秩的不等式,除了用向量组极大线性无关组来证明外,还有其它简便的方法吗;矩阵特征值的实际应用背景是啥,等等。学生提出的这些问题,教师或同学都会给出一些回复,涉及到的一些重点、难点、痛点内容,教师也会在课堂上多次强调。

3.5. 激发学生探究发现解决问题的新方法

线性代数在某种程度上又称矩阵代数，矩阵这个工具用好了能解决很多线性代数问题。例如，矩阵秩的一些性质中，关于秩的一些不等式的证明，通常把矩阵看作向量组，利用极大线性无关组、向量组的性质来给出解释，很多同学理解不了，有了矩阵的初等变换后，可引导学生分块矩阵的三类初等变换，这样秩的不等式就很容易证明了。

4. 小结

经过对线性代数课堂教学的一系列改进，取得了一些成效。通过课堂教学改进前后进行对比。

(1) 效果评价

从课堂纪律上，改进之后明显好于之前。比如，上课睡觉、玩手机的学生人数大大降低；从学习积极性上来看，也有特别大的改观，问问题的学生比之前多了。从期末成绩来看，大大提高了优良率。记得上完第一讲，不止一个学生发信息给笔者，“感谢老师重新展示了考虑问题的‘5W+H’思维模式的应用，以后我也会提问问题了”，“谢谢老师，在线性代数的第一次课上就把它的内容结构框架、要解决的核心问题等用通俗的语言讲的这么清楚，我对接下来一学期的线性代数学习充满了信心”，等等。

在课堂教学中，做到了引领课堂，实现了绝大部分学生与老师的同步思考，充分调动了学生的积极性，把一部分“想学但跟不上、准备随时放弃”的学生拉回了课堂。

但是在一些方面还存在着不足之处，比如，教学课时不够，一小部分教学内容在课堂上讲得比较仓促，教学设计还有些欠缺等。

(2) 改进方向

针对前述的不足，仍需要在教学内容设计上下大功夫，充分考虑学生接受程度的情况，设计出适合不同层次同学需求的题目。

综上，在课堂教学中，通过运用“5W+H”思维模式进行课程导入、经典案例进行问题引入、介绍知识点的来龙去脉、简明扼要的章节知识点数字化的罗列、突出线性代数的思想解决学习过程中的痛点问题等措施，有助于学生加深知识点的理解，激发了学生的学习兴趣，培养了学生逻辑思维能力和解决实际问题的能力，锻炼了独立思考、自主学习、实践创新能力。

基金项目

2022年上海高校市级重点课程《线性代数(经管)》(线上线下混合式)阶段建设成果；国家自然科学基金青年基金(11601328)；2023年度安徽省高校科研重点项目(2023AH050476)。

参考文献

- [1] Aggarwal, C.C. (2020) Linear Algebra and Optimization for Machine Learning. Springer International Publishing, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-40344-7>
- [2] Garding, L. (2012) Encounter with Mathematics. Springer Science & Business Media, New York.
- [3] 常海霞, 安玉娥, 财经类院校《高等代数》实践教学与探讨[J]. 教育教学论坛, 2014, 12(53): 134-135.
- [4] 王卿文, 张琴, 杨建生. 教育数学指导下的一流课程教材建设——以线性代数为例[J]. 大学数学, 2022, 38(4): 110-114.
- [5] 赵春燕, 孙侠, 新工科背景下的线性代数教学改革探索[J]. 教育进展, 2023, 13(8): 5730-5735.
- [6] 乐经良. 让学生有兴趣、主动地学习[J]. 大学数学, 2007, 23(5): 1-4.
- [7] 吴传生. 经济数学线性代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020.