

# 培养逻辑推理素养的高中数学课堂教学设计

## ——以“等差数列前 $n$ 项和公式”为例

童晓慧

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2023年10月11日; 录用日期: 2023年11月30日; 发布日期: 2023年12月12日

### 摘要

逻辑推理能力是数学核心素养的重要体现, 在高中数学课堂中培养学生逻辑推理素养具有积极意义, 本文便以探讨高中数学课堂培养学生逻辑推理素养的方法出发, 以等差数列的前 $n$ 项和公式教学过程设计为例, 探讨实际教学中培养学生逻辑推理素养的具体实施及注意之处。

### 关键词

逻辑推理, 核心素养, 教学设计

# Instructional Design for High School Math Classrooms to Foster Logical Reasoning Literacy

## —Taking “The Formula for the Sum of the First $n$ Terms of an Equidistant Series” as an Example

Xiaohui Tong

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Oct. 11<sup>th</sup>, 2023; accepted: Nov. 30<sup>th</sup>, 2023; published: Dec. 12<sup>th</sup>, 2023

### Abstract

Logical reasoning ability is an important embodiment of the core qualities of mathematics, in the high school mathematics classroom to cultivate students' logical reasoning literacy has a positive

significance, this paper explores the high school mathematics classroom to cultivate students' logical reasoning literacy method to start with the first  $n$  terms of the equivarient series and the formula of the teaching process as an example of the design of the teaching process, to explore the actual teaching of the cultivation of students' logical reasoning literacy of the implementation of the specific implementation and attention to the place.

## Keywords

Logical Reasoning, Core Literacy, Instructional Design

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

《普通高中数学课程标准》(2017年版2020年修订)提出学科核心素养是育人价值的集中体现,是数学课程目标的集中体现。逻辑推理作为高中数学学科核心素养之一,是得到数学结论、构建数学体系的重要方式,是数学严谨性的基本保证,是人们在数学活动中进行交流的基本思维品质。故在目前高中数学教学中,教师应合理安排教学内容,根据学生具体情况,制订出一套行之有效的教学策略,提升学生的逻辑思维能力的同时,改善整体数学教学质量[1]。本文便以等差数列的前 $n$ 项和公式教学过程设计为例,探索如何有效培养学生数学逻辑推理素养。

## 2. 高中数学课堂培养学生逻辑推理素养的方法

### 2.1. 明确课程基本理念, 做好课前准备

《普通高中数学课程标准》(2017年版2022年修订)指出高中数学课程要以学生发展为本,落实立德树人根本任务,提升数学学科核心素养。教师应在课堂进行前确立以发展学生数学学科核心素养为导向设计教学内容。如对等差数列前 $n$ 项和公式这一教学内容而言,教师应在课前明确教学内容目标,学生探索并掌握等差数列的前 $n$ 项和公式,理解等差数列前 $n$ 项和公式的关系。教师进而思考在这一教学过程中可培养学生哪些核心素养,树立以发展学生数学学科核心素养为导向的教学意识,将数学学科核心素养的培养贯穿于教学活动的全过程。

### 2.2. 运用数学实例, 做好课中训练

高中学生已具备初步的逻辑思考能力,如何有效地进一步培养其逻辑推理素养,就需要教师加强对学生的逻辑推理及抽象思维的引导训练,以建立完善的数学知识体系。

由于数学与现实生活紧密联系,所以在课堂教学中可运用某些数学实例来培养学生的思考和逻辑推理。在引导学生解决具体数学问题时,也可采用多种思想方法进行推理论证,以开阔学生思维,丰富认知水平。学生进行实践训练后,教师也应不断与学生互动反馈,及时纠正错误或肯定结果,以此来了解学生逻辑推理现状,为后续的进一步培养做铺垫。

### 2.3. 明确课堂地位, 做好课后反思

以学生为中心的教学模式需教师对学生进行合理恰当的指导,要提高学生的逻辑推理能力,必定需

要学生切实参与到数学课堂中去，通过大量的实践来提高学生的能力，还必须通过不断地交互反馈来巩固学生已学的知识[2]。教师应在课后不断反思教学过程，改进教学方式，主动与学生沟通交流，根据学生的具体学情，制定对应的教学策略，不断改进课堂问题以促使学生进行逻辑推理训练，养成自主探究的习惯。

### 3. 等差数列的前 $n$ 项和公式教学过程设计

#### 3.1. 历史重现，引入新课

高斯“神速求和”的故事：高斯巧妙计算出从 1 到 100 的自然数相加的和为 5050。那么他是如何巧妙地进行计算呢？

$$\begin{aligned} & 1+2+3+\cdots+100 \\ & = (1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(50+51) \\ & = 101 \times 50 \\ & = 5050 \end{aligned}$$

高斯采用首尾配对相加法，将不同数的求和问题，通过首尾配对转化为相同数的求和问题，即将加法问题转化为乘法运算。

设计意图：通过有关高斯的数学小故事，吸引学生的学习兴趣，体会数学伟人的数学思想，感受数学推理的巧妙，也为新课的推理学习作铺垫。

#### 3.2. 推理探索，讲授新课

几何法——运用数形结合的思想方法进行逻辑推理：

等差数列 3, 6, 9, 12, ...,  $3n$ ，公差为 3，求其所有项的和。

思考：可否将问题由繁化简，先求其前几项和能否得到相关规律，进而求得其所有项的和？

我们先看前六项和  $3+6+9+12+15+18$ ，用图形辅助解答，如图 1 表示：

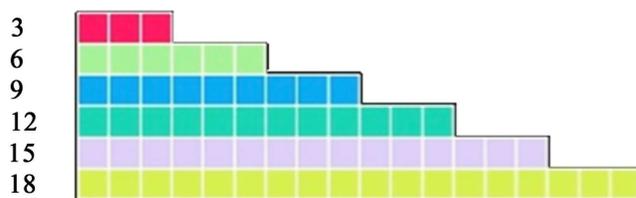


Figure 1. Block diagram

图 1. 方块图

通过观察，我们将图形中某两点进行连接，如图 2 形成一梯形，思考是否可以用梯形面积公式(上底 + 下底)  $\times$  高  $\div$  2 得到这个图形面积，即求得此数列前六项和，进而计算此数列所有项的和？

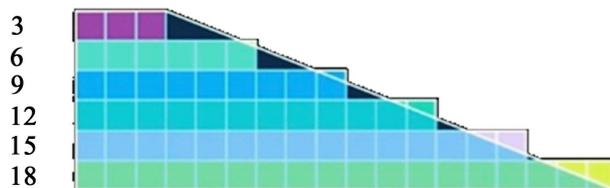


Figure 2. Square rectangle

图 2. 方块矩形图

我们将图 2 复制旋转为图 3，将两图形进行结合为图 4 正好拼成长方形。

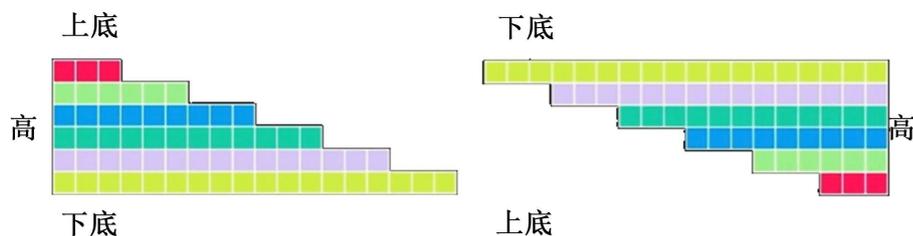


Figure 3. Square bracket diagram

图 3. 方块结合图

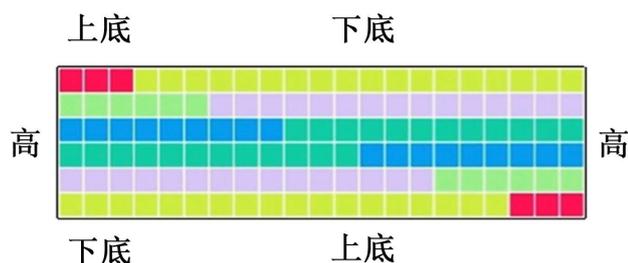


Figure 4. Rectangle

图 4. 矩形图

此时长方形的长为上底与下底之和，所以长方形面积为(上底 + 下底) × 高，由此便可得出图 1 中图形的面积为(上底 + 下底) × 高 ÷ 2，与梯形面积公式相同。

思考：图 1 中图形的面积为数列的前六项和，那我们可否利用求图 1 图形面积的方法来表示数列所有项的和呢？

推理可得：拼成图形的面积就是数列的前  $n$  项和，梯形的上底就是数列的第一项，下底就是最后一项，高就是项数，由此推理得到等差数列求和公式  $S_n = (\text{首项} + \text{末项}) \times \text{项数} \div 2$ 。

设计意图：对于等差数列的前  $n$  项和公式教学内容，通过举具体例子结合图像巧妙讲解，让学生体会数学知识的可视化，从而感受运用数形结合思想方法进行逻辑推理的魅力，让学生领悟到知识间的环环相扣，不仅增强了学生的空间想象能力，开阔了视野，也使其逻辑思维得到提升，为学生后续学习数学知识奠定浓厚的学习兴趣。

以上是用数形结合的思想方法推理出等差数列的前  $n$  项和公式，现在我们用高斯的首尾配对相加法看看是否也可以得到等差数列的前  $n$  项和公式？

代数法——运用类比的思想方法进行逻辑推理：

对于等差数列  $\{a_n\}$ ，由于不知其具体项数，故驱动学生思考如何在不改变构造相等项的本意下寻求更加简捷的求解方法——倒序相加法[3]。

我们用两种方式表示  $S_n$ ，

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1$$

将其相加得到

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_n + a_1),$$

在上节课我们已经学习了当  $p+q=s+t$  时,  $a_p+a_q=a_s+a_t$ , 所以,

$$(a_1+a_n)=(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots+(a_n+a_1),$$

而这样的式子有  $n$  个, 所以可得到  $2S_n=n(a_1+a_n)$ , 符合我们刚刚用图像推理出的等差数列求和公式  $S_n=(\text{首项}+\text{末项})\times\text{项数}\div 2$ 。

设计意图: 通过类比高斯求和方法, 对等差数列的前  $n$  项和公式进行了推理计算, 既让学生体会倒序相加的推理过程, 培养学生的逻辑推理能力, 也可证明前面用数形结合思想方法推理结果的正确性, 让学生感受到数学一题多解的多样性, 激发了学生探索数学的兴趣和思维的开阔性。

### 3.3. 拓展运用, 巩固新知

又由于等差数列  $a_n=a_1+(n-1)d$ ,  $n$  为项数  $d$  为公差, 将等差数列  $\{a_n\}$  带入其前  $n$  项和  $S_n$  中, 便得到  $S_n$  的另一种表达式:

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d。$$

观察等差数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和公式

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d, d=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

可得: 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 如果已知五个元素  $a_1$ 、 $a_n$ 、 $S_n$ 、 $n$ 、 $d$  中的任意三个, 便可以求出其余两个量。

设计意图: 教师引导学生推理出公式的所有表达方式及解题策略, 加深学生对知识的理解程度, 掌握知三求二用方程解题的思想, 为后续解题作铺垫。也在无形中提升了学生的逻辑推理和数学运算的核心素养。

习题: 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1=5, a_n=95, n=10$ , 求  $S_n$ ;  $a_1=100, d=-2, n=50$ , 求  $S_n$ 。

设计意图: 学生能运用本节课知识解决具体问题, 通过动手操作加强对公式的理解和记忆。

### 3.4. 总结反思, 布置作业

回顾反思: 这节课学习了什么内容? 运用了什么方法?

课后作用: 教材习题 1 至 5 题。

设计意图: 教师引导学生回顾本节课所学习的内容, 体会知识再现的过程, 感受数形结合、类比推理的巧妙, 为日后学习运用此方法作铺垫。

### 3.5. 教学设计小结

在课堂的开始, 以数学历史辅助教学, 让学生感受数学家高斯逻辑推理得出首尾配对相加法的巧妙, 也为学生在课堂中类比首尾配对相加法推理出倒序相加法作思想铺垫。

在课中先用几何法再用代数法推理等差数列的前  $n$  项和公式, 目的是先让学生直观地理解等差数列前  $n$  项和公式的意义, 再用传统的代数方法进行推理论证。同时, 用多种方法推理可增加学生思维的开阔性, 有益于后续的数学学习。在几何法的教学过程中, 举具体实例, 由繁化简, 把所探究的问题以图形的方式直观的表现出来, 让学生观察、分析、推理、归纳, 由此总结形成公式。让学生亲身经历公式的推导过程, 体会用数形结合的数学思想进行逻辑推理的过程, 达到培养学生逻辑推理素养的目的。在代数法的教学过程中, 引导学生类比高斯解决此类问题的方法, 驱动学生推理出概括性更强的倒序相加法, 让学生经历“发现问题→分析问题→解决问题”的探究过程, 在探究过程中学习用类比的思想方法

进行逻辑推理，由此让学生构建知识，提高素养。无论是用几何法还是代数法推理等差数列的前  $n$  项和公式，都是从学生熟知的思想方法出发，以学生为主体，教师引导学生观察、分析，进行逻辑推理，从而达到教学目标。

在课堂的拓展应用部分，则是让学生根据已知知识推理出其余的求和公式，进而观察推理出相应的解题策略，达到教学内容的完整性。

从整体上来看，本节课的教学设计在引导学生推理等差数列前  $n$  项和公式中让学生动手实践、大胆尝试，体现了行为主义的理论；把教学内容与学生已有认知结构联系起来，用旧知推理新知，让学生有意义地接受学习，体现了认知主义的理论；整节课的氛围都是宽松和谐的，以学生为主体，体现了人本主义的理论；在教学过程中学生和老师之间相互协作、交流、对话，对知识产生进行有意义的建构与诠释，体现了建构主义的理论[4]。

### 3.6. 教学效果评价

数学作为强积累性的学科，很多公式、方法都是从历史的基础上发展的，故本节课追溯古代思想方法，让学生从古人的思想经验得以启发，探究推理出数学公式。在具体的推理等差数列前  $n$  项和公式中，着眼于学生的最近发展区，积极开展学生思维活动，让学生经历各种思想方法结合的推理过程，既完成了教学目标的内容，也利于学生逻辑推理素养的发展。总之，以学生现有的“数学现实”出发，引导学生进行“数学化”和“再创造”，培养学生独立思考和反思的习惯，以有效发展数学素养。

## 4. 高中数学课堂培养学生逻辑推理素养的一些思考

高中学生大多非常在意自己的分数，但对于数学这门学科而言，知识较为复杂，仅靠死记硬背，无细心、耐心及缜密的逻辑推理能力是很难提高自身成绩的。所以教师在教学过程中，不仅要强调概念与公式定理的讲解，还需要加强对能力的培养与锻炼，让学生能够用自己的方式进行思考分析完成解题步骤，并进一步达成学习目标任务[5]。同时，在实际培养学生逻辑推理能力的教学中，如在等差数列的前  $n$  项和公式教学中，学生往往存在一些问题值得教师们注意。

### 4.1. 教师对逻辑推理素养培养的意识不够

高中课堂是教师培养学生思维敏捷度的重要场所，教师应树立培养学生逻辑推理素养的意识，合理安排教学，采用多种教学手段，让学生参与讨论交流，加强直观教学的效果，从而训练学生的思维，提高课堂教学的效率[6]。此外，教师应积极寻找教学内容与培养工作之间的契合点，传授相关数学知识的同时通过讲解例题、开展训练以及拓展活动，使学生掌握逻辑推理丰富知识以及不同数学题型推理的有效切入点[7]。

如在等差数列的前  $n$  项和公式教学中，教师在课堂教学中应有意识地引导学生进行逻辑推理，引导学生进行思维发散，采用图形与数字结合的方法或多种代数表达的方法进行推理运算。

### 4.2. 学生解题思路僵硬

学生思维不够活跃，无法适应题型的变化等，都会使学生的学习难以得到提升。对此，教师就应及时对学生进行引导，建立完整的知识体系，要求学生认真审题，梳理有效信息，进而培养学生从问题中推理出所求问题与已有知识间的关联，以此找到切入点，进行解题。同时在课堂教学中，可向学生展示一题多解的方法，以开阔学生思维，扩展思路，为后续学生独自进行逻辑推理打下基础。

如在等差数列的前  $n$  项和公式教学中，由高斯的首尾相加法如何推理出倒序相加法，就需要学生认真观察发现高斯的首尾相加法只适用于偶数项的算式，为避免讨论基偶项的情况，便由首尾相加法拓展

到本质相同的倒序相加法，由此推理便拓展了学生的解题思路。

## 5. 总结

逻辑推理大都蕴含于数学问题的解决过程中，因此教师要注重自身的发展、完善自身知识体系，准确认识教学内容中的逻辑推理，从而有层次地、系统地设计教学内容，帮助学生感悟逻辑推理素养[8]。要使逻辑推理素养得到有效发展，需要学生在发现问题、提出问题、分析问题和解决问题中进行不断的探索。这对于学生来说需要基础知识的支撑，因此在前期教学中要时刻要求学生全面、深刻地理解基础知识，打好基础，才更有利于后续的发展。对于教师来说，要鼓励学生进行学习探索，在课堂教学中给予学生表达看法的机会，引导学生自主探究。同时，逻辑推理的过程其实也是进行数学运算的过程，这就需要学生日常加强对基础知识的运算训练，加强对公式、定理的整体理解，建立知识框架，培养思维的广阔性，以达到灵活运用的目的。最后，学生逻辑推理素养的培养不是一蹴而就的，只注重学生课中过程是远远不够的，教师还应注重与学生课后的交流，从而能够依据具体情况，做出相应改变，达到因材施教、有效培养的目的。

## 参考文献

- [1] 张刘珊. 逻辑推理素养培养视角下的高中数学课堂教学策略[J]. 高考, 2022(27): 89-92.
- [2] 杨笑义. 基于“逻辑推理”核心素养培养的高中数学教学研究[J]. 数理天地(高中版), 2023(3): 59-61.
- [3] 张月, 汤强. 核心素养视角下的数学教学设计——以“等差数列的前  $n$  项和公式”为例[J]. 数学学习与研究, 2022(9): 71-73.
- [4] 张秋爽. 数学教学设计的四个理论基础[J]. 新课程研究(基础教育), 2009(3): 76-79.
- [5] 吴建光. 基于核心素养的高中数学逻辑推理能力强化分析[J]. 试题与研究, 2023(23): 176-178.
- [6] 杨晶凤. 逻辑推理能力在高中数学中的培养策略与教学策略分析[J]. 数学学习与研究, 2022(6): 20-22.
- [7] 孟伟. 高中数学教学中逻辑推理素养的培养路径[J]. 数理化解题研究, 2022(15): 11-13.
- [8] 吴丛. 基于逻辑推理素养培养的高中数列教学策略研究[D]: [硕士学位论文]. 南昌: 东华理工大学, 2022.