Creative Education Studies 创新教育研究, 2024, 12(10), 261-267
Published Online October 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2024.1210706

Hans汉斯

课题式教学理论下的“配方法解一元二次方程”片段教学设计研究

郑凌凤[1]，赵育林[1]，何雅晴[2]

[1]湖南工业大学理学院，湖南 株洲
[2]长沙县天华中学，湖南 长沙

收稿日期：2024年8月19日；录用日期：2024年10月9日；发布日期：2024年10月22日

摘 要

依托在初中数学学习中有着承上启下作用的配方法，基于数学学习是数学知识的再创造这一思想，文章运用课题式教学法，通过分析配方法求解一元二次方程的地位与价值，挖掘其发展历程与所蕴含的数学思想，重构课堂教学，引发学生认知冲突，引导学生分析、解决问题，渗透转化与化归思想，尝试为本节课的教学提供一种新的思路。

关键词

课题式教学，配方法，解一元二次方程，转化与化归思想

Research on the Fragmented Teaching Design of “Solving Quadratic Equations with Distribution Method” Based on Project-Based Teaching Theory

Lingfeng Zheng[1], Yulin Zhao[1], Yaqing He[2]

[1]College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan
[2]Changsha County Tianhua Middle School, Changsha Hunan

Received: Aug. 19th, 2024; accepted: Oct. 9th, 2024; published: Oct. 22nd, 2024

Abstract

Relying on the distribution method that plays a bridging role in middle school mathematics learning,

文章引用: 郑凌凤, 赵育林, 何雅晴. 课题式教学理论下的“配方法解一元二次方程”片段教学设计研究[J]. 创新教育研究, 2024, 12(10): 261-267. DOI: 10.12677/ces.2024.1210706

and the idea that mathematics learning is the recreation of mathematical knowledge, this article uses a project-based teaching method to analyze the status and value of solving quadratic equations, explore their development process and mathematical ideas, reconstruct classroom teaching, trigger students' cognitive conflicts, guide students to analyze and solve problems, infiltrate conversion and transformation ideas, and attempt to provide a new approach for the teaching of this lesson.

Keywords

Project-Based Teaching, Distribution Method, Solving Quadratic Equation, Transformation and Conversion Thought

1. 引言

配方法是求解一元二次方程的一种重要方法，《义务教育课程标准(2022年版)》(以下简称《课标》)指出对于一元二次方程解法的教学，要让学生理解配方法并能用配方法求解数字系数的一元二次方程，并非只是让学生学会用配方法解一元二次方程，可见教学要求已经从单纯的掌握算法提高到去理解算法的本质。同时《课标》指出数学课程要培养学生的核心素养，主要包括以下三个方面：会用数学的眼光观察现实世界、会用数学的思维思考现实世界、会用数学的语言表达现实世界[1]。但是现今对于“配方法——解一元二次方程”教学存在过于注重解题步骤的讲解与作业练习，而忽略对知识本质的理解以及学生素养的养成等问题，与《课标》要求有差距。因此基于中学数学课题式教学理念，本文尝试对人教版九年级数学上册第二十一章第二节的“配方法解一元二次方程”进行片段教学设计，为本节课的教学提供一种新尝试。

2. 课题式教学概述

课题式教学是基于洪堡“教学与科研相统一”原则而提出的一种新型教学模式，最初运用于大学课堂教学，其产生源于高校的教育改革，面临课程的课时量大大压缩、课程门类逐渐增多、课程信息量增大等一系列难题，传统的教学方法无法满足创新型人才培养要求，由此课题式教学应运而生[2]。原本的课题式教学主要是教师根据教学内容，设置一些课题，学生以小组的形式选择课题并开展课题研究，在研究过程中学会新知并提升学生创新能力与科研素养。

面对中学生没有充足的时间也没有能力进行课题研究的实际现状，曹广福教授在2020年对课题式教学进行了再发展，在弗赖登塔尔“再创造”数学教育思想的指导下，提出了中学数学课题式教学[3]，将课题式教学运用于中学数学课堂。其指出中学数学教学，应该是促进学生理解知识本质的教学，而想要探寻数学知识的本质，则要深入了解数学史，从知识产生的背景中发现知识产生的本原性问题以及促进知识发展的派生性问题，还有就是知识产生过程中经历的关键阶段、产生的价值、蕴含的数学思想等。因此这里所指的课题，并非从自然科学与生活实际中选择的问题，而是教师在数学史研究的基础上，将所教内容组织为一个个课题，课题的中心是问题，这里的问题便是数学知识产生的本原性问题。除了探寻知识本质之外，数学教学还要符合学生的“数学现实”，即学生的知识水平与生活实际。而且数学知识产生过程中会经历很多繁复的阶段，在课堂上不可能完全呈现，因此教师需要根据学生的数学现实创设合适的问题情境，在问题的发现、分析、解决过程让学生经历数学知识产生的关键阶段，以此对新知

进行有限再创造。

基于此，课题式教学[3]定义为：宏观上教师把数学学科当成一个大课题，在研究数学知识发展历史以及知识结构，理清知识产生背景的基础上，根据教学内容、教学要求将有内在联系的知识设计为一个课题，一个课题又分为多个小课题进行教学实施，并在各小课题之间用一根主线(统领性问题情境、思想等)相互联系。微观上教师以知识产生的本原性问题与派生性问题推动课堂的进行，将学生置于数学知识发展的类似情境中，学生则在一个个问题的自主分析、解决过程中学习新知，经历类似数学知识产生的过程，完成新知的“再创造”，建构数学认知，提升能力素养。在此过程中每个小课题的教学都要回答以下 4 个问题：产生数学知识背后的问题是什么？这些问题的重要性与价值体现在哪？教学中这些问题的关键和解决办法是什么？问题解决生成了哪些重要概念与原理，形成了哪些思想方法？[4]回答完这四个问题之后便可以进入下一课题的学习，整个课程教学在一个个小课题的完成过程中层层推进，随着课题研究的完成，学生的数学认知也随着建构，教学任务也随之完成。

3. 配方法解一元二次方程概述

配方法是指通过配成完全平方形式来解一元二次方程的方法，即将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\left(a,b,c\text{为常数，}a\neq 0\right)$ 化成等号左边是完全平方式，等号右边是一个常数，即 $\left(x+h\right)^2=k$ 的形式，当 $k\geq 0$ 时，等号两边同时开平方，转化为一元一次方程，进而求得方程根的方法。接下来本文将从配方法解一元二次方程的地位与价值、所蕴含的数学思想两方面出发分析本节课教学的关键之处。

3.1. 配方法解一元二次方程的地位与价值

配方法是解一元二次方程中最常用也是最重要的一种方法，对于配方法的学习，需要以之前所学习过的平方根、完全平方公式以及直接开平方法等相关知识为基础，又对于其后所要学习的公式法的推导以及函数求解最大值等相关知识的学习有着极大的辅助作用。同时，配方法的推导过程中所蕴含的转化思想、“降幂”思想、数形结合思想等对于学生数学学科核心素养的提升以及解题技巧的掌握有着十分重要的作用。因此，配方法在初中阶段的数学学习中的重要性不容忽视，是学好初中数学的重要因素。

3.2. 配方法解一元二次方程所蕴含的数学思想

解一元二次方程的基本思路是通过“降次”将其转化为两个一元一次方程进行求解，是将未知的问题转化为已知的问题的过程，其蕴含的数学思想便是“转化与化归思想”。

在古代，最早出现的一元二次方程就是 $x^2=A$ 的形式，从几何的角度来讲便是“已知该正方形的面积为 A，求该正方形边长的问题。”《几何原本》中第 2 卷命题 5：“如果把一条线段分成相等的两条线段，再分成不相等的线段，则由两个不相等线段构成的矩形与两个分点之间一段上的正方形的和等于原来线段一半上的正方形。”其实这就是对形如 $x^2-px+q=0$ 这一类型的方程进行求解，欧几里得采用的方法叫做“和差术”。其几何解释如下图 1 所示，即将 $x^2-px+q=0$ 化为 $x\left(p-x\right)=q$，此时令 $y=p-x$，此时相当于对一个矩形，其长为 x，宽为 y，长与宽之和为 p，长与宽之积为 q，求其长与宽。根据前面可得 $xy-q=0$，$x+y=p$，因为 $\frac{p}{2}=x-\frac{x-y}{2}=y+\frac{x-y}{2}$，由图 1 可知 $\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=xy+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$，而若将该正方形的边长加上 $\frac{x-y}{2}$ 则得到 x 的值，若将其减去 $\frac{x-y}{2}$，则得到 y 的值[5]。欧几里得用几何的方法解决了形如 $x^2\pm px=q$ 这样的方程，而在代数符号尚未出现时，许多数学家都会利用正方形的面积求解一元二次方程，从代数的角度出发便是配方的过程。

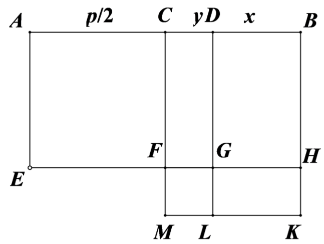

Figure 1. Geometric explanation of "Harmony and Difference Technique"
图 1. "和差术"几何解释

数学家花拉子米在其著作《代数学》中也采用图解法来解 $x^2+10x=39$ 这一方程(如图 2 所示)，其做法是作一个边长为 x 的正方形，再添加上两个一边长为 x，一边长为 5 的矩形，其面积之和为 39，再在右下角补上一个边长为 5 的正方形，这样就得到一个边长为 $(x+5)$ 的大正方形，其面积为 39 加上 25，即 64，由此即可解得 $x=3$。另斐波那契、笛卡尔、沃利斯、斯陶特等数学家也都从几何的角度对一元二次方程进行求解[6]。

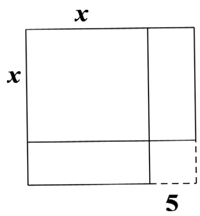

Figure 2. Geometric explanation of the process of solving a quadratic equation with one variable by ai-khwarizmi
图 2. 花拉子米求解一元二次方程几何解释

可见，几何法求解一元二次方程在数学历史上有着极大的影响，代数问题几何化或者几何问题代数化都体现了"数形结合"这一数学思想，而将难以解决的问题通过数形转化为容易解决的问题，究其根本还是转化与化归思想。数学解题过程其实就是转化问题的过程，将复杂问题转化为简单问题，将不熟知的问题转化为熟知的问题。因此教师在教学过程中通过不断地提升和训练学生自觉转化问题的意识，有利于其解题能力的提升和数学核心素养的培养。可见，转化与化归思想对于学生的数学学习有着十分重要的作用。

从上可以看出，根据配方法的价值及其所蕴含的数学思想，配方法的教学要能够促进学生理解配方时所添项的本质，加深对于所添项为"一次项系数的一半的平方"的理解，能够利用配方法解一元二次方程，并在教学过程中渗透转化与化归这一重要数学思想。而中学数学课题式教学是教师基于对数学专题或模块内容整体结构与发展脉络的理解，挖掘知识产生的问题与背景并结合学生的"数学现实"重构教学，实现对知识的有限再创造[3]，它回归了知识的本质，而非仅理解、记忆层面的教学。可见，基于中学数学课题式教学理论对"配方法求解一元二次方程"进行片段教学设计对于本节课教学深度的提升大有裨益。

4. 片段教学设计

中学数学课题式教学提倡以知识产生的本原性问题与派生性问题驱动课堂的进行，所创设的问题情

境要结合学生的数学现实与生活实际。因此本课时片段教学设计以已知班级劳动基地面积求解边长为统领性问题情境进行展开，符合学生的学校生活与国家倡导劳动教育的理念。同时根据配方法解一元二次方程发展历史，引导学生动手动脑，通过“以形化方”理解配方法的本质，体会转化与化归思想的重要性。

问题 1：春天是播种的季节，为了建设美丽校园，丰富同学们的校园生活，学校为各班分配了劳动基地，已知七年级(一)班的劳动基地是一块正方形的田地，面积为 25 平方米，则其边长为多少？

问题 2：七年级(二)班原本的劳动基地也为正方形，现为了保证公平性，将其每条边都增长 2 米，其面积也变为 25 平方米，则原来其边长为多少？

问题 3：八年级(一)班原本的劳动基地也为正方形，现将其相对的一组边都增长两米，其面积变为 35 平方米，则原正方形边长为多少？

【设计意图】以上情境为本原性问题情境，给各班级分配劳动基地是实行中小学劳动教育的重要途径，以该情境入手符合学生的生活实际，这三个问题层层递进，学生都能想到设正方形边长为 x 建立方程模型，分别为 $x^2=25$，$\left(x+2\right)^2=25$，$x\left(x+2\right)=35$。针对前两个方程，学生可以很快的使用开平方法进行求解，但第三个方程，学生去掉括号之后发现仍然无法求解，于是产生了认知冲突，引起其极大的兴趣与求知欲。

问题 4：二元一次方程组是如何求解的？类比二元一次方程组的求解过程，如何进行一元二次方程的求解？

【设计意图】二元一次方程是通过“消元”转化为一元一次方程进行求解的，此问题引导学生将现有的未知问题转化为已知问题求解，探究解一元二次方程的本质是要进行“降幂”将其转化为一元一次方程，而如何降幂就是本节课接下来需要讨论的问题。

问题 5：问题 1 与问题 2 为什么能够解决？其劳动基地是什么形状？问题 3 的劳动基地是什么形状？想要求解问题 3 应该进行怎样的转化？

【设计意图】此问题为派生性问题，通过以上问题的引导，学生能够很快反映出前两个问题之所以能够解决，是因为前两个问题中劳动基地的形状为正方形，可以用直接开平方法转化为两个一元一次方程求解，而第三个问题中劳动基地的形状为长方形，所以需要将长方形转变为正方形进行本题的求解。学生先根据题意画出问题 3 中的长方形，如图 3 所示，然后思考进行转化。此问题引导学生将无法解决的代数问题向几何图形进行转化，以此达到解决问题的目的，加强数形结合思想与化归思想的渗透，提升学生的数学学科核心素养。

问题 5：要想将以上长方形转化为正方形，可以使用什么方法？再观察一下，转化后的图形与转化前的图形之间有着怎样的关联？

【设计意图】有了之前学习的基础，学生能够使用割补法将图形进行转化，转化过程如图 4 所示，并发现转化后的正方形比转化前的长方形在面积上增大了 1。

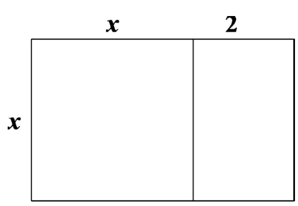

Figure 3. Sketch of labor base for Class 1, Grade 8

图 3. 八年级(一)班劳动基地简图

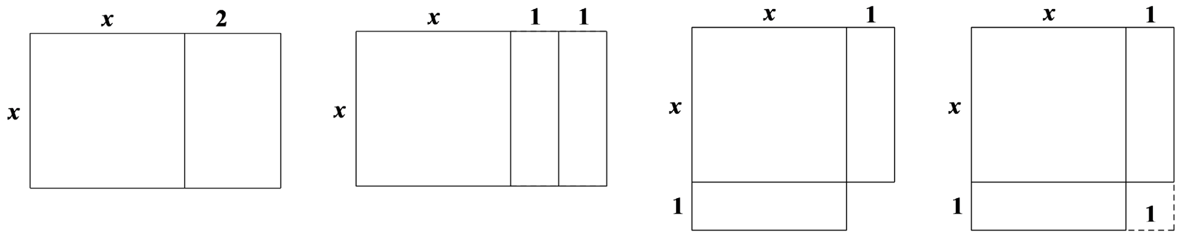

Figure 4. Cut and fill method for solving equations $x(x+2)=35$

图 4. 割补法求解方程 $x(x+2)=35$

问题 6：经历以上几何图形变化过程，你能否得到该方程的解？能否用代数符号去表述该方程的几何求解过程？从代数的角度出发，你能否得到该方程的解？

【设计意图】根据以上图形变化过程，变化后的正方形面积为 36，则该正方形边长为 6，得到 x 的值为 5。从代数角度来说，学生通过以形化方，将方程 $x^2+2x=35$ 转化为 $x^2+2\times1\cdot x=35$，然后继续转化为 $x^2+2\times1\cdot x+1^2=35+1^2$，即得到 $x^2+2x+1=36$，左边利用完全平方公式可得 $(x+1)^2=36$，进而得到两个一元一次方程，分别为 $x+1=6$ 与 $x+1=-6$，即可对该方程进行求解。以图解法进行求解时，得到方程的解为 $x=5$，而通过代数法进行求解是得到 $x=5$ 与 $x=-7$，由此学生可以弥补历史上图解法的不足，使得知识掌握的更完整。

问题 7：从代数的角度来看，方程的左右两边发生了什么变化？结合图形分析为什么会有这样的变化。

【设计意图】在用代数法表示图形变化的过程中，学生能够发现方程两边同时加上了 1^2，并且该数值为在变形过程中补上的小正方形的面积，而这个小正方形的边长就是原始方程中一次项的一半，以此促进学生对于配方所添项的理解。

问题 8：九年级(一)班的劳动基地原本也是正方形，但为了让其专心备战中考，考虑减小其劳动基地的面积，将其相对的一组边同时缩短 4 米，其面积变为 21 平方米，则原正方形的边长为多少？(请结合图解法独立完成)

【设计意图】通过对题目的分析，学生能通过设原正方形边长为 x，于是得到方程 $x(x-4)=21$，去掉括号得到方程 $x^2-4x=21$，该方程学生也无法求解，但通过前面的学习，学生可以通过图解法自主完成，如图 5 所示，以此渗透数形结合思想在解决问题中的应用。

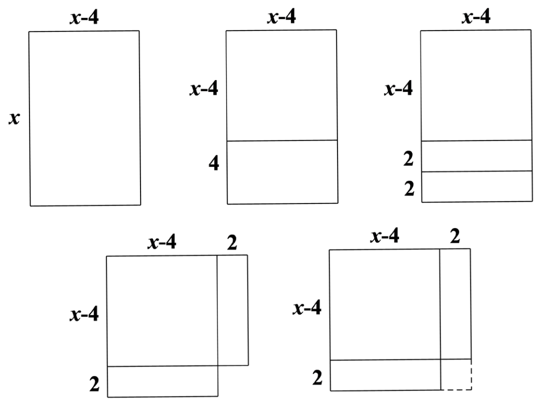

Figure 5. Cut and fill method for solving equations $x(x-4)=21$

图 5. 割补法求解方程 $x(x-4)=21$

DOI: 10.12677/ces.2024.1210706

问题 9：能否用代数符号表示上述图形变化过程？从代数的角度来看，方程两边同时发生了什么变化？为何会出现这样的变化？

【设计意图】学生通过动手操作与思考发现方程两边最后都加上了 2^2，而正好是利用割补法以形化方时补上的小正方形的面积，此处小正方形的边长也是一次项系数的绝对值的一半，因为一个数的平方具有非负性，所以也说这里加上的小正方形的面积为一次项系数的一半的平方。至此教师进行配方法的总结：像上面那样，通过配成完全平方形式来解一元二次方程的方法，叫做配方法。

问题 10：不借助几何图形，我们如何利用配方法求解方程 $x^2+6x-7=0$ 呢？其基本步骤是什么？

问题 11：如何利用配方法求解 $2x^2+12x-14=0$ 呢？与问题 10 中的方程相比较，其有何不同点？

问题 12：如何利用配方法求解 $ax^2+bx+c=0$ 呢？

【设计意图】在前面的数形结合探究新知过程中，学生已经掌握了配方法的本质，也体会了数形转化对于解题的便利性，上述问题既是对前面问题的总结回顾，也是升华。问题 10 即在理解的基础上将其抽象化，而问题 11 是问题 10 的深入，与问题 10 紧密相关，引导学生通过化二次项系数为 1，将问题 11 转化为问题 10 进行求解，其中也渗透了转化与化归思想，且总结更一般的配方法求解一元二次方程的步骤，即：移项、二次项系数化为 1、配方、整理降次、求解一次方程，由此提升学生归纳总结与语言表达的能力。而到问题 12，是从特殊到一般的过程，也是从具体到抽象的过程，又是下一个境界的思考，与下一节课公式法的学习紧密相连，学生的思维随着问题的引导一步步进入深层次，整个过程由浅入深，学生参与课堂之中，完成知识的再创造。

5. 结语

课题式教学遵循弗赖登塔尔的“数学教育是数学知识的再创造”的思想[7]，主张从知识产生的历史出发，让学生在课堂上历经知识产生的几个重要阶段，对数学知识进行有限“再创造”，这对于数学教学有着极大的启示作用。在本教学设计中，遵循“配方法解一元二次方程”发展的脉络，通过知识产生的本原性问题与派生性问题驱动学生进行新知的“再创造”。创设“已知劳动基地面积求解边长”这一统领性的问题情境贯穿整节课堂，借助几何图形帮助学生理解配方法的本质，引导学生进行问题转化，将一元二次方程转变为一元一次方程，将代数问题转化为几何问题，再转化为符号语言进行总结提升，每一个环节均渗透了转化与化归思想，注重了知识的整体性与联系性，培养了学生的语言表达与动手操作能力，创设了一节别样的、生动的课堂。

基金项目

湖南省教育厅 2022 年普通高等学校教学改革研究重点资助项目“‘一流专业’背景下数学与应用数学专业建设的模式创新与实践研究”(编号：HNJG-2022-0195)。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部制定. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 5-6.

[2] 曹广福, 刘丹. 课题式教学法探析[J]. 数学教育学报, 2020, 29(3): 32-36.

[3] 沈威, 曹广福. 中学数学课题式教学概述[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2020(8): 62-66.

[4] 王海青, 曹广福. 从《原本》谈中学平面几何课题式教学研究[J]. 数学教育学报, 2021, 30(5): 39-46+91.

[5] 覃淋, 李秀萍. 一元二次方程的几何解法[J]. 理科考试研究, 2019, 26(4): 25-29.

[6] 邱华英, 汪晓勤. 一元二次方程的几何解法[J]. 中学数学杂志, 2005(6): 58-60.

[7] (荷)弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学[M]. 陈昌平, 等, 译. 上海: 上海教育出版社, 1995.