

基于HPM视角下的等差数列前 n 项和教学研究

尚沐含*, 红霞#, 张丽

洛阳师范学院数学科学学院, 河南 洛阳

收稿日期: 2024年9月18日; 录用日期: 2024年11月17日; 发布日期: 2024年11月27日

摘要

数学史与数学教育之间的关系(HPM)是数学课堂上实现立德树人的重要途径之一,也是课程思政在教学中的重要体现。本文将从HPM的角度出发,对等差数列的教学设计进行探讨,并将数学史与课堂教学相结合,以期对高中数学教学的科研与教学起到一定的借鉴作用。

关键词

HPM, 高中数学, 等差数列, 教学策略

Discussion on the First n Terms of Arithmetic Sequence and Teaching Design Based on HPM Perspective

Muhan Shang*, Xia Hong#, Li Zhang

Department of Mathematics, Luoyang Normal University, Luoyang Henan

Received: Sep. 18th, 2024; accepted: Nov. 17th, 2024; published: Nov. 27th, 2024

Abstract

The relationship between the history of mathematics and mathematics education (HPM) is one of the important ways to achieve moral education in mathematics classrooms, and it is also an important manifestation of ideological and political education in teaching. In this paper, we will explore the teaching design of arithmetic sequences from an HPM point of view, and integrate the history of mathematics into classroom teaching, aiming to provide reference and assistance for high school teachers' research and teaching.

*第一作者。

#通讯作者。

文章引用: 尚沐含, 红霞, 张丽. 基于 HPM 视角下的等差数列前 n 项和教学研究[J]. 创新教育研究, 2024, 12(11): 450-459. DOI: 10.12677/ces.2024.1211822

Keywords

HPM, High School Mathematics, Arithmetic Sequence, Teaching Strategy

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

等差数列是最早出现在数学史上并引起重视的数列之一。它的历史可以追溯到古希腊数学家毕达哥拉斯，毕达哥拉斯对等差数列进行了深入的研究，主要是探究数列中的通项公式和数列和的公式。在欧几里得的《几何原本》中，对等差数列的求和公式做出了完整的证明，这是对等差数列的又一次深入研究。中国古代数学家们的《九章算术》《周髀算经》《张丘建算经》等著作完美体现了他们深邃的数学思想和精湛的计算技艺。这些文献不仅仅记录了数学的发展历程，还详细记载了许多历史上著名的算题和解决方法。正是这些丰富的数学史，指引我们更深入思考数学教育问题。因此，从 HPM 的角度来看，教学策略可以从挖掘和研究这些历史问题出发，激发学生对数学历史的兴趣，同时也能够提升他们解决现代问题的能力[1]。通过这样的教学路径，学生不仅能深入了解古代数学的精髓，还能够在实际问题中灵活运用所学知识，实现知识与技能的双重提升。

数学史与数学教育作为数学教育研究的一个重要分支，强调将数学史融入数学教学之中，旨在通过历史视角帮助学生理解数学概念的起源、发展与应用，从而增强学生的学习兴趣、深化对数学本质的认识。近 20 多年来，数学史对数学教育的影响越来越受到世界各国教育界的广泛关注，因此，怎样把数学史和数学教育联系起来，有助于提高数学教学水平，促进课程建设，是 HPM 领域的学者一贯的目标。如今，越来越多的 HPM 的研究开始重视数学史在课堂上的运用。随着新一轮的课程改革，将数学史运用到数学教学是实现数学教学目的的一个关键保障，也是数学教学内容中不可或缺的一部分。目前大多是从技术和方法两个方面来探讨其对数学生成式教学的作用和有效性，缺乏将内容元素与数学生成式教学相结合的系统性研究。本文从 HPM 视角下研究等差数列前 n 项求和的教学策略，希望可以为更多的高中教师和研究者关注 HPM，关注课程思政，关注在这个背景下如何更有效地开展高中数学教学，推动在教学设计方面的思考和探究，并为他们的探究提供一些参考依据。

2. HPM 融入教学的方式

对于数学史融入数学课堂的应用研究技能方法，汪晓勤教授在他的《HPM 的案例研究与展望》中进行相应表述，对已有的几种国内外的研究思路进行重构改善，主要归纳出复制附加、顺应和重构等方式类型的思考运用。

1) 附加式：展现相关的历史素材或数学家图片，对正文内容起到补充说明的作用，如介绍某个数学主题的历史发展，讲述数学故事，人物事件的简介、概念术语的历史等。例如，在教学等差数列前 n 项和公式时，教师可以引入“高斯求和”的故事：高斯年幼时，教师给他们出了一道数学题： $1+2+3+\cdots+100=?$ 高斯用简便的方法很快计算出答案。教师可将高斯的解题过程介绍给学生，使其在学习数学历史的过程中了解等差数列求和公式的来源，形成更加深刻的学习印象。运用附加式教学方式，选择数学历史作为新知讲解的引子，为数学课堂增添文化色彩，使学生体会到数学学习的乐趣。

2) 重构式：从历史的角度来看，在“历史顺序-逻辑顺序-认知顺序”的基础上，重新构建知识的

发生和演化过程,促进数学教学与数学史相结合。重构演绎数学史能够揭示出知识产生的内部逻辑,了解其内部的性质,从而让学生们能够接触到数学的本质,从而获得学习的真谛[2]。通常位于探究新知部分。例如,在等差数列前 n 项和公式的教学过程中,教师选择“泰姬陵中三角宝石图案”这一内容作为导入素材,在课堂上穿插高斯求和的数学故事,让学生对比故事中偶数项与奇数项计算方法的运用特点,鼓励学生自主推导出 1 到 n 相加的值。学生依据学习经验,发现要对项数进行分类讨论,教师顺势引出倒叙相加的解题方法,推导出等差数列前 n 项和的求和公式。选择泰姬陵作为数学历史融合的切入点,在教师的指引下,学生掌握了倒序相加法,完成了等差数列前 n 项和公式的推导。随后,教师重构数学历史,从中抽象出数学故事,吸引学生注意力,为其课堂后续学习奠定基础[3]。

3) 顺应式:从教学实际出发,依据历史资料设计数学题,或适当地修改历史中的思维方法。应用是灵活运用数学史,深刻领会,提高思考能力。著名问题是数学历史上一笔珍贵的财富,它凝结了一代又一代数学家的智慧,是我们学习数学的绝佳素材。对历史名题的解答,能激起学生探究的愿望,让沉闷的练习充满情趣,让学生进行深入的思考和协作,在巩固新知识的同时,提高模型的质量,从而推动思维的发展。常位于例题讲解部分。例如,指导学生练习等差数列相关习题时,教师引入《张丘建算经》中的故事:“古代妇女以织布为生,第一天织五尺布,往后每天比第一天多织,多出来的尺数固定。30 天后,该织女共织了 363 尺布,求她每天比前一天多织了多少尺?”将古代的故事用现代汉语讲解出来,并将其改编成一道等差数列求解公差问题,学生可以利用前 n 项和、项数公式进行求解。待学生解答完毕,根据解题结果展开教学评价,用数学历史辅助学生巩固知识[3]。

4) 复制式:直接采用历史上的数学问题、解法等。例如,在教学等差数列时,为学生讲述数列的通项公式后,教师可以给出若干习题要求学生完成,测试其对知识的掌握程度,在数学问题设置方面,嵌入数学史知识。例如,《九章算术》中提到“今有金箍,长五尺,……斩末一尺,越重二斤,次一尺重几何?”教师给出首项、末项和项数,要求学生求出剩余各项的值。运用复制式教学方式,引导学生迁移应用所有知识,启发学生思考课堂问题,辅助其体会古人思维,深入认识等差数列知识内容[3]。

3. HPM 教学的实施策略

1) 融入数学史:在数学教学中适当融入数学史的内容,如介绍重要数学定理的发现过程、数学家的生平和贡献等[4]。

2) 情境创设:通过创设与数学史相关的情境,引导学生进入历史场景,感受数学家的思考方式和解决问题的过程[4]。

3) 问题解决:利用数学史上的经典问题或现代生活中的实际问题,引导学生进行探究和问题解决[5]。

4) 合作学习:组织学生进行小组合作学习、共同探讨数学史上的问题和现代数学的应用[6]。

4. HPM 视角下等差数列前 n 项和的教学设计

4.1. 教材分析

数列是刻画离散现象的一种重要表征模式。在高中数学教科书中,有两种最基本的数列:等差数列和等比数列。我们选取的章节是人教版高中数学必修 5 第二章第三节,是在学习了等差数列的概念和性质的基础上,使学生掌握等差数列求和公式,并能利用它求和。

4.2. 学情分析

高中学生的认知体系基本形成,认识结构迅速发展,认知能力不断完善。具备解决问题的思维方法,逻辑推理能力较强。

4.3. 目标分析

认知维度：掌握等差数列前 n 项求和公式。

技能维度：能熟练应用等差数列前 n 项和公式。

情感态度维度：提高学生的学习兴趣，让学生积极参加数学课堂中去，体会学习数学的乐趣[7]。

实践应用维度：应用等差数列前 n 项求和公式解决实际问题[8]。

4.4. 教学重难点

教学重点：学习等差数列求和公式，并会熟练运用公式解决实际问题。

教学难点：掌握等差数列前 n 项和公式的推导过程。

4.5. 教学过程

1) 数学史引入新课

印度著名景点——泰姬陵，据说在泰姬陵陵寝中有一个三角形图案，以相同大小的圆宝石镶饰而成，共有 100 层。你知道这个图案一共有多少颗宝石吗？

生：只要计算出 $1+2+3+\cdots+100$ 的结果就是这些宝石的总数。

问题 1：问题转化为求这 100 个数的和。怎样求这 100 个数的和呢？(学生自主探究，请学生说出自己的计算方法。很多学生都采用高斯算法)

师：同学们采用了什么方法计算出来的呢？

生 1：一头一尾两两配对相加的方法，就是

$$1+100=2+99=3+98=\cdots=50+51=101,$$

有 50 个 101，所以

$$1+2+3+\cdots+100=5050。$$

生 2：因为一头一尾两两配对，原本 100 个不同的数，就变成了 50 个相同的数。

师：通过这样的方法，我们可以把不同数的求和问题转化为相同数的求和问题，同学们想到的这个方法和小高斯想得不谋而合。

高斯是伟大的数学家、天文学家，在高斯十岁时，有一次老师出了一道题目“现在请大家算出 $1+2+3+\cdots+100=?$ ”正当其他同学忙于将这 100 个数依次相加的时候，高斯迅速地算出了答案，而高斯运用的方法就是刚才同学们所用的方法。

设计意图：此处回顾问题让学生清楚“高斯求和”的缘由，以及为本节课教学等差数列前 n 项和做铺垫，从而更好地发展学生逻辑推理、数学运算核心素养。

2) 层层递进，推导公式

问题 1：你能用上述方法计算 $1+2+3+\cdots+100+101$ 吗？

意图：为后续研究一般性问题的对项数奇偶性进行讨论的方法做铺垫。

生 1：

$$\begin{aligned} &1+2+3+\cdots+101 \\ &=(1+101)+(2+100)+\cdots+(50+52)+51 \\ &=102\times 50+51 \\ &=5151. \end{aligned}$$

追问：你还能想到其他方法吗？

生 2:

$$\begin{aligned} & 1+2+3+\cdots+101 \\ &= (1+2+3+\cdots+100)+101 \\ &= 5050+101 \\ &= 5151. \end{aligned}$$

生 3:

$$\begin{aligned} & 1+2+3+\cdots+101 \\ &= 0+1+2+3+\cdots+101 \\ &= (0+101)+(1+100)+\cdots+(50+51) \\ &= 101 \times 51 \\ &= 5151. \end{aligned}$$

问题 3: 计算 $1+2+3+\cdots+n$ 。

意图: 这个问题既是问题 1 和问题 2 的推广, 又是等差数列的一个特殊情形, 为进一步解决一般等差数列的求和问题做铺垫; 同时, 在对项数分奇偶讨论之后, 学生发现结论的一致性, 这可以引发进一步的思考, 从而发现倒序相加的方法; 此外, 这个问题又是一个常用的结论, 对于公式(2)的推导也可以用到这个结论。

追问: 不分类讨论能否得到最终的结论呢?

意图: 引导学生将公式变形, 通过变形之后的等式的意义, 构造对应的计算方法, 得到倒序相加的方法。

追问: 你能说说这种方法巧妙在哪里吗?

意图: 总结倒序求和的方法。

活动: 引导学生从几何上体会倒序求和的方法。

问题 4: 倒序求和的方法能否用于求一般等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 S_n 呢?

意图: 应用倒序求和的方法求一般等差数列的前 n 项的和, 得到公式(1)。

生 1: 对于问题 4, 我用倒序相加法求得, 因为

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n, \\ S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1, \end{aligned}$$

再将两式相加, 因为有等差数列的通项的性质: 若 $m+n=p+q$, 则 $a_m+a_n=a_p+a_q$, 所以

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad (1)$$

3) 公式(1)的理解和简单应用

问题一: 已知 n, a_1 和 a_n , 求 S_n 。

追问: 你能用文字语言表述这个公式吗?

意图: 由文字语言的表述, 提炼利用公式(1)求等差数列的前 n 项和所需要的条件, 即 a_1, a_n 和 n 。

练习: 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=7, a_{50}=101$, 求 S_{50} 。

问题二: 已知 S_n, n, a_1 和 a_n 中任意 3 个, 求第 4 个。

4) 公式(2)的推导与理解

问题 5: 能不能用 a_1 和 d 来表示 S_n 呢?

意图: 希望学生能够利用公式(1)和等差数列的通项公式推出公式(2)。

追问：如果不利用公式(1)的结论，你还有其它方法得到公式(2)吗？

意图：从数列前 n 项和的定义出发，将每一项用首项和公差表示，再分组求和。

生 2：对于问题(5)，我是这样来求的。

因为

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d],$$

所以

$$S_n = na_1 + [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]d = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d,$$

即

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d. \quad (2)$$

活动：类比公式(1)的应用，分析公式(2)的应用。

问题一：已知 a_1, d 和 n ，求 S_n 。

问题二：已知 S_n, n, a_1 和 d 中任意 3 个，求第 4 个。

练习：在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = \frac{1}{2}, d = -\frac{1}{6}, S_n = -5$ ，求 n 。

活动：结合等差数列的通项公式，从方程组角度分析可以解决的问题，体会方程思想。

5) 综合应用

例题 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列。

(1) 若 $a_1 = -4, a_8 = -18$ ，求 S_{10} ；

(2) 若 $S_{10} = 310, S_{20} = 1220$ ，求 S_n 。

意图：体会首项和公差对等差数列的确定作用，总结解决等差数列问题的基本量法，并从方程角度理解确定一个等差数列所需的条件数。

4.6. 课堂小结

师：同学们，本节课我们学习了哪些内容？

生：等差数列前 n 项和公式 1： $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ ，

等差数列前 n 项和公式 2： $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ 。

师：通过等差数列前 n 项和公式内容的学习，我们从中体会哪些数学的思想方法？

生：(1) 通过等差数列前 n 项和公式的推导我们了解了数学中一种求和的重要方法——“倒序相加法”。

(2) “知三求二”的方程思想。

4.7. 布置作业

课后练习题 1、3、6 题。

5. 问卷调查反馈

通过该等差数列前 n 项和教学设计实施后，在两个班级中发放了学生调查问卷(详见附录 1)，下面对问卷调查的结果进行分析。

1) 在等差数列前 n 项和内容与数学史结合后，数学家的创造思想和方法加深我对相关学习内容的理解。

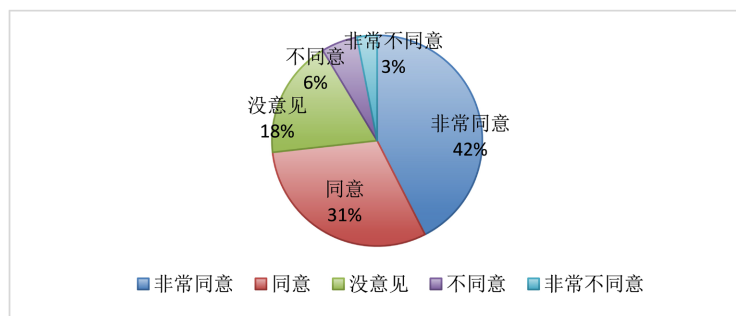


Figure 1. Helps with understanding the content

图 1. 有助于内容理解

根据问题 1 知(见图 1), 73% 的学生认为数学史中数学家的数学思想和方法有助于帮助自己对学习的内容进行理解, 而因为学生接受程度不同, 少部分同学则认为不能帮助自己更好地理解;

2) 在数学学习中, 数学史中的数学思想和方法增加了我与同学互动探究、合作讨论学习活动的机会。

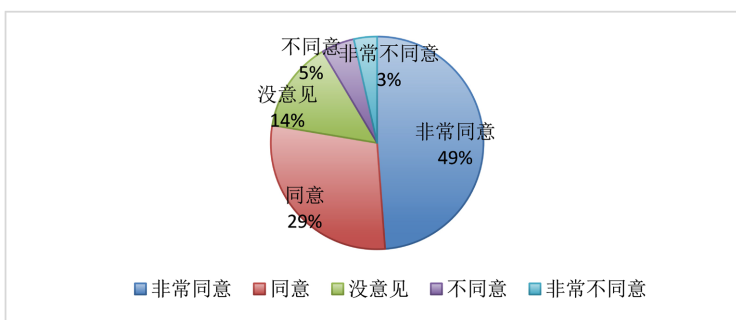


Figure 2. Increase opportunities for collaborative discussions

图 2. 增加合作讨论机会

根据问题 2 知(见图 2), 数学史的融入可以增加学生互动探究、合作讨论的活动机会, 可以更好地培养学生的合作精神和动手实践能力;

3) 在融入数学史的数学学习活动, 增强我对数学学习的兴趣。

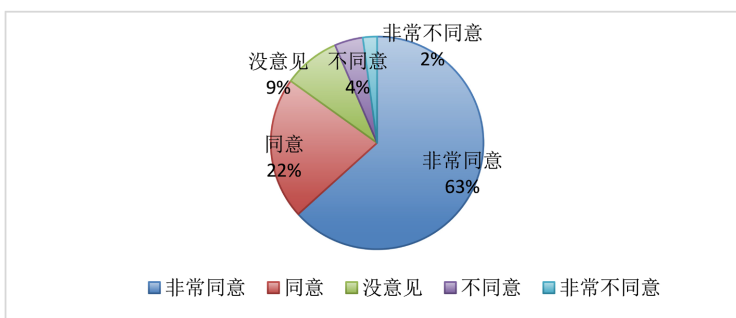


Figure 3. The history of mathematics can enhance learning interest

图 3. 数学史可以增强学习兴趣

根据问题 3 知(见图 3), 几乎全部的同学都认为数学史融入教学内容之后, 可以激发自己的学习兴趣, 数学家背后的故事更能吸引自己的注意力从而更加投入地参与到课堂学习之中;

4) 在数学史中引入数学家故事, 可以增强我的意志、丰富我的精神。

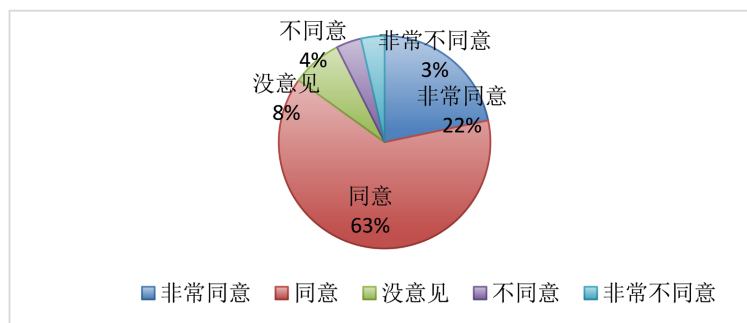


Figure 4. Mathematician stories can enhance willpower

图 4. 数学家故事可以增强意志

根据问题 4 知(见图 4), 87%的学生认为在数学学习中, 学习数学史中的数学家善于观察、敢于实践, 历经千辛万苦最终得出结论可以增强自身的意志, 丰富学生的精神, 只有少部分学生认为数学家的故事经历离自己很遥远, 无法切身体会其中蕴含的数学精神;

5) 您希望在今后的数学学习中渗透着数学史的讲授。

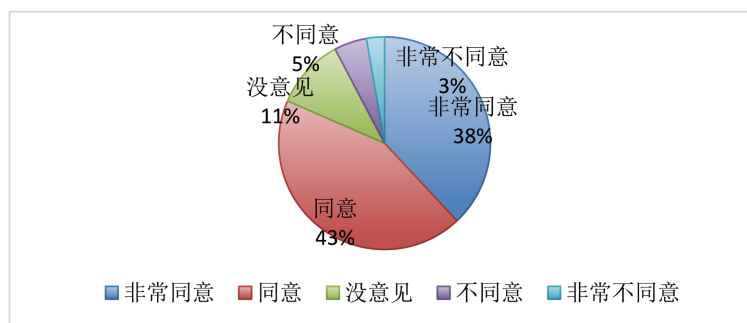


Figure 5. Penetrating teaching of mathematical history

图 5. 渗透数学史教学

根据问题 5 知(见图 5), 通过将数学史融入等差数列前 n 项和的教学之后, 学生普遍对数学史产生了浓厚的兴趣, 大家都希望在今后的学习中融合数学史来进行学习;

6) 您希望在数学课堂上教师如何渗透数学史?

根据问题 6 知(见图 6), 大多数的学生希望通过教师在课堂上带领学生了解数学家的故事和数学背后的文化, 超过一半的学生希望利用课余时间自行翻阅数学史材料;

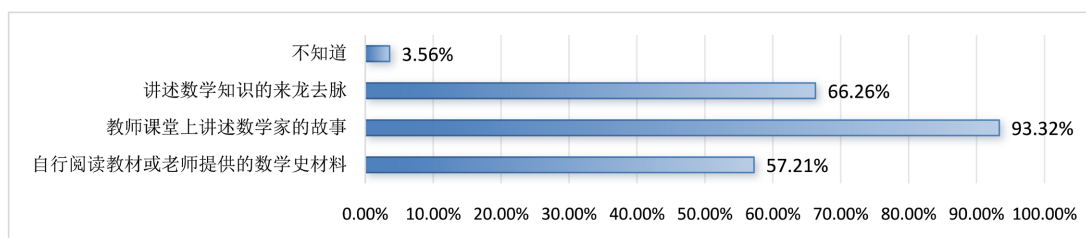


Figure 6. A way of penetrating the history of mathematics

图 6. 渗透数学史的方法

7) 您认为融入数学史对于本节课的学习有所帮助。

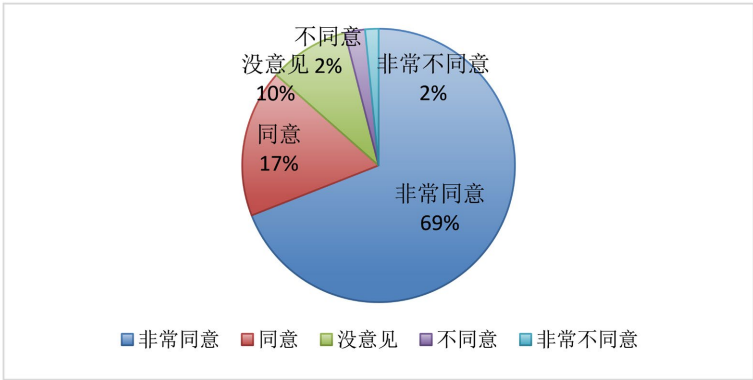


Figure 7. The integration of mathematical history is effective
图 7. 数学史融入有作用

根据问题 7 知(见图 7)，对于将数学史融入课堂在知识理解层次方面，有 86%的学生认为非常有帮助，可以发现在讲述数学历史之后，对于学生理解定义、推导公式都有很大的促进作用。

6. 教学评价

- 1) 课堂观察与测试：选取的两个平行班级进行实验，通过课堂观察和测试来评价教学效果。实验结果显示，实验组教学班级在概念测试、公式测试和解题测试中的正确率均高于对照组教学班级，表明 HPM 视角下的教学设计优于传统教学。
- 2) 教师教学反思：参与实验的教师表示，HPM 视角下的教学设计不仅提高了学生的学习兴趣 and 课堂参与度，还促进了自身对数学史和数学文化的了解。教师在教学过程中更加注重知识的来龙去脉和思想方法的渗透，优化了知识结构。
- 3) 学生反馈：通过问卷调查和访谈，学生普遍表示 HPM 视角下的教学设计让他们更加喜欢数学课，对数学史产生了浓厚兴趣。他们认为通过历史名题和数学史小阅读，可以更好地理解数学知识，掌握解题方法。

7. 总结

本节从 HPM 的角度设计等差数列前 n 项和的教学策略，从情境到问题，从数到形，从具体到抽象，将数学史融合其中。具体应用体现在激发学生的学习兴趣、促进学生对数学概念和方法的理解、培养学生的数学思维能力、增强学生的文化认同感等方面。HPM 视角下的数学单元教学设计是一种有益的尝试，它可以帮助我们更好地理解和教授数学。通过引入历史案例和实际问题情境，我们可以激发学生的学习兴趣和创新精神，提高他们的学习效果和理解能力。基于 HPM 视角下的等差数列前 n 项和教学设计，不仅关注数学知识的传授，更重视数学文化的传承和学生数学素养的培养。教学中教师应有意识地培养学生的数学建模能力、创新意识以及将实际问题转化为数学问题的能力，提高学生的综合素养。

基金项目

河南省青年骨干教师培养计划(2023GGJS126)，河南省高等教育教学改革研究与实践立项(2024SJGLX0163)。

参考文献

[1] 张小明, 汪晓勤. 中学数学教学中融入数学史的行动研究[J]. 数学教育学报, 2009, 18(4): 89-92.

- [2] 杨雄, 周立芬. 数学史融入数学教学中的探析——以函数的定义为例[J]. 新疆职业大学学报, 2024, 32(2): 56-64.
- [3] 黎洪德. HPM 背景下高中数学等差数列的教学研究[J]. 中学课程辅导, 2023(29): 30-32.
- [4] 余庆纯, 汪晓勤. 中国 HPM 研究内容与方法[J]. 数学教育学报, 2022, 31(4): 49-55.
- [5] 康春艳. HPM 视角下的高中数学概念教学设计研究——以“对数的概念”教学设计为例[J]. 理科爱好者, 2023(6): 253-256.
- [6] 刘学民. 基于 HPM 视角的等比数列前 n 项和教学设计探讨[J]. 长春教育学院学报, 2023, 39(6): 117-123.
- [7] 曾婷, 郑嵘灵. 数学史在高等数学课堂的融合[J]. 科技视界, 2019(11): 133-134.
- [8] 王小平. 数学史融入小学数学课堂教学方式研究——以“数学广角——鸡兔同笼”为例[J]. 广东职业技术教育与研究, 2018(5): 91-93.

附 录

附录 1 问卷调查

- 1、在等差数列前 n 项和内容与数学史结合后, 数学家的数学创造思想和方法加深我对相关学习内容的理解。
- A.非常同意 B.同意 C.没意见 D.不同意 E.非常不同意
- 2、在数学史中数学思想和方法增加了我与同学互动探究、合作讨论学习活动的机会。
- A.非常同意 B.同意 C.没意见 D.不同意 E.非常不同意
- 3、在融入数学史的数学学习活动, 增强我对数学学习的兴趣。
- A.非常同意 B.同意 C.没意见 D.不同意 E.非常不同意
- 4、在数学史中引入数学家故事, 可以增强我的意志、丰富我的精神。
- A.非常同意 B.同意 C.没意见 D.不同意 E.非常不同意
- 5、您希望在今后的数学学习中渗透着数学史的讲授。
- A.非常同意 B.同意 C.没意见 D.不同意 E.非常不同意
- 6、您希望在数学课堂上教师如何渗透数学史? (多选)
- A.教师在课堂上讲述数学家的生平事迹 B.自行阅读数学史材料
- C.交代数学史故事的背景 D.不知道
- 7、您认为融入数学史对于本节课的学习有所帮助。
- A.非常同意 B.同意 C.没意见 D.不同意 E.非常不同意