

以应用为导向的线性代数课堂教学设计

范渝蓉¹, 朱起源^{2*}

¹重庆师范大学数学科学学院, 重庆

²重庆科技大学数理科学学院, 重庆

收稿日期: 2024年10月6日; 录用日期: 2024年11月20日; 发布日期: 2024年11月28日

摘要

文章深入剖析了线性代数教学过程中存在的关键问题，并有针对性地提出以应用为导向的课堂教学设计思路。具体从遵循问题主线、融入建模思想以及引入科学计算软件三个维度进行详细阐述，探讨了应用导向型课堂的教学实施策略，最后对教学和考核模式提出了改革建议。旨在全面提升教学质量，培养学生的实践和创新思维能力。

关键词

线性代数, 应用导向, 教学设计

Teaching Design of Linear Algebra Oriented to Applications

Yurong Fan¹, Qiyuan Zhu^{2*}

¹School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

²School of Mathematical and Physical Sciences, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing

Received: Oct. 6th, 2024; accepted: Nov. 20th, 2024; published: Nov. 28th, 2024

Abstract

This paper delves into the key issues existing in linear algebra teaching and proposes targeted application-oriented teaching design ideas. It elaborates in detail from three dimensions: following the problem mainline, integrating modeling and introducing scientific computing software, to explore the specific implementation strategies, and suggestions are put forward on the teaching and Assessment methods at last. It aims to comprehensively improve the teaching quality and cultivate students' practical ability and innovative thinking.

*通讯作者。

Keywords

Linear Algebra, Application-Oriented, Teaching Design

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

线性代数作为一门举足轻重的文理基础必修课程,以研究有限维线性空间和线性映射理论为核心[1]。它在培养学生的抽象思维与逻辑推理等数学素养方面发挥着无可替代的作用,同时也广泛应用于自然科学、工程技术以及社会科学等各个领域。在理论和应用层面,线性代数都是对学生影响最大的大学数学课程之一。

就目前国内出版的相关教材而言,严格来讲应当称之为“抽象线性代数”。此类教材的内容大多聚焦于抽象概念的阐释和数学理论的推导,在知识体系的规划上更侧重于内容的完整性和逻辑的严密性,而在现实意义和实践应用等层面的体现则相对不足[2]。由于课时限制以及学生知识基础的制约,教师往往避重就轻,在课堂教学中容易陷入繁琐的证明和简单重复的数学计算,这在一定程度上会偏离课程的核心内容。另外教师除理论教学外很少涉及应用背景和具体案例的讲解,学生意识不到课程的应用属性,且不能用来解决实际问题。总之,现有教学内容和教学模式不能使学生形成完整的知识体系且难以将知识转化为能力,从而容易产生厌学情绪。

1900 年美国国家科学基金会资助成立的“线性代数”课程研究组(Linear Algebra Curriculum Study Group)意识到相关学科对线性代数的需求有所增加,同时计算机科学领域的软硬件改进也提升了线性代数解决问题的能力,然而在教学内容上依旧强调抽象概念的重要性。因此研究组从教学内容到教学策略等方面提出了具体的改进建议,包括考虑教学内容要考虑学科需求,鼓励教师将计算机和软件等用于教学等[3]。随后在教学内容等方面进行了一系列改革,例如课程研究组成员 David C. Lay 编写的教材《线性代数及其应用》就包含了数值线性代数和应用实践案例等方面的内容[4]。

国内一线教师也从不同角度提出了教学改革的具体措施。例如有从课程内容出发设计教学主线,将各章知识点贯穿起来形成一个有机整体,增强教学内容的系统性和连贯性[1][5];有从教学手段出发,对线上线下混合式教学模式进行深入探讨研究拓展教学空间的有效途径[6][7];有教师为了挖掘课程的应用属性,详细讨论了实例库的建设、实例的设计和应用等问题[8][9];也有对课程考核方式的改革实践与反思等[10]。总之教师关注到了教学过程中存在的问题,对相关典型问题的教学改革研究也是比较充分的。但是鲜有将问题贯穿于整个教学过程的分析研究,缺乏对教学改革的全过程指导。这对教改成果的推广应用是不利的。

为了充分发挥线性代数课程在培养学生思维能力、运算能力和分析综合能力等方面的重要作用,体现课程的应用属性,我们设计了问卷调查,并基于教学班 129 名学生的反馈结果,从问题、思路、方法三个方面提出改进教学的策略并优化考核方式。希望能够为相关教师的教学实施提供有益参考和指导。

2. 将问题贯穿教学过程

2.1. 课程的主线问题

线性代数的各部分内容之间具有明显的独立性,但在内在逻辑和思维方式上却有较强的多元化和集

成化特征[5]。我们应该关注到内容的独立性和逻辑的连贯性这一矛盾。如果授课方式不当, 学生不容易理解各部分内容之间的关联, 更不能综合运用知识解决问题。为了构建教学内容之间的关联, 可基于其中一项内容设计主线问题, 将其它内容围绕此问题展开讨论, 纲举目张形成完整的知识体系。

线性方程组的求解是线性代数的核心问题之一, 可将其设计为主线问题组织教学内容。在教学过程中可以遵循从特殊到一般的原则讨论线性方程组。例如, 首先介绍方程的个数和未知数个数相同的特殊方程组, 此时引入行列式的概念, 让学生明确行列式在这类方程组求解过程中发挥的作用。然后过渡到对一般线性方程组的讨论, 引入矩阵这一重要工具。对方程组消元做同解变换对应于矩阵的初等变换。接着为了进一步讨论线性方程组的解的结构, 需要在向量组和向量空间的视角下研究方程组。最后相似矩阵及二次型部分可视作线性方程组理论的具体应用。其中求方阵的特征值和特征向量就是求齐次线性方程组, 矩阵的相似变换可理解为对方程组的一种特殊的同解变换, 化二次型为标准形也对应于求解一系列线性方程组。这样将求解线性方程组贯穿于整个教学过程可以起到“形散而神聚”的教学效果。76%的学生认为问题主线教学有助于帮助他们理解教学内容之间的关联。

2.2. 专业的应用问题

线性代数的教学模式普遍偏重于理论教学, 缺乏与实际应用背景的联结, 难以体现线性代数课程的应用价值[11]。为了化解课程理论性强与应用性广这一矛盾, 充分发挥课程对学生能力的培养作用, 教师应结合教学班的专业特点和科研热点等引入教学案例, 让学生直观感受知识的应用场景, 提升他们学习的积极性。调查结果显示, 90%的学生认为引入专业相关的案例对自己学习兴趣的提升是有帮助的。课堂观察发现, 结合案例分析时学生参与课堂讨论的积极性也更高。

我们可以将专业中的典型问题设计为教学案例。以石油工程专业为例, 油藏数值模拟是一门利用计算机求解油藏渗流问题的学科基础课程, 最终需要借助线性方程组实现问题的最终求解[12]。例如对于如下油藏渗流问题:

考虑 $100 \times 50 \text{ m}^2$ 的二维油藏模型, 油藏渗透率为 0.1 D , 油的粘度为 $0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。初始油藏压力为 10 MPa , 在油藏的一侧边界设定为定压边界条件, 压力为 8 MPa , 另一侧设定为无流量边界条件。求油藏内部的压力分布规律。

首先准备油藏数值模拟的相关教材和文献资料供学生参考, 帮助学生理解研究背景和意义以及问题中涉及的基本概念, 然后进一步引导学生利用数学语言对问题进行重述。

其他专业领域中也有诸多典型问题可用于课程教学。例如经济学中投入产出模型可以用矩阵表示经济系统中各个部门之间的生产与消耗关系。通过建立矩阵模型可以分析各部门之间的相互依赖关系, 进而研究经济系统的稳定性、生产结构的优化等问题; 在量子力学中, 量子态可以用希尔伯特空间中的向量来表示, 而物理量则可以用厄米算符来表示, 厄米算符的本征值和本征向量对应着物理量的可能取值和相应的量子态。通过线性代数的方法, 可以求解厄米算符的本征值和本征向量, 从而确定量子系统的能级和相应的量子态; 经典力学中多自由度系统的振动问题可以通过建立系统的动力学方程, 将其转化为矩阵的特征值问题来求解等。

当然为了激发学生的学习兴趣, 也可以结合相关科研热点进行教学。以神经网络为例, 随着理论创新和算力的大幅提升, 神经网络被应用于诸多领域并取得了巨大成功[13]。其中线性代数在数据表示和网络优化方面发挥了重要作用。用向量表示输入和输出数据, 神经网络中各层之间的连接关系表示为一个矩阵。数据在神经网络中的处理过程则可视作通过权重矩阵执行的线性变换, 其中权重和偏置的优化过程则是通过大量的矩阵乘法和向量运算实现的。通过分析数据在网络中的表示、运算和优化过程可以让学生直观认识到线性代数在科研热点中扮演着重要角色。

3. 将建模思想融入课堂教学

将主线问题贯穿教学、专业案例融入教学，可以加深学生对知识体系和应用领域的理解，提升学习的兴趣和积极性。进一步解决问题，则需要对教学案例进行分析建模转化为数学问题。因此，培养数学建模能力可以进一步增强学生学习的自信心和内生动力。

数学建模过程包括问题转化、模型建立和模型求解三个阶段[14]。在课堂教学中重点进行前两个阶段，即在合理化假设的基础上结合相关数学理论和物理原理等，建立合适的数学模型。以上述油藏渗流问题为例，假设油为不可压缩流体，根据达西定律和连续性方程，最终可以转化为如下拉普拉斯方程的边值问题。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 50) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=100} = 0 \\ u \Big|_{y=0} = 8, u \Big|_{y=50} = 8 \end{cases}$$

其中 $u(x, y)$ 表示油藏内部压强。此问题的解析解可以通过分离变量法求得。

当然也可以进行数值求解。以有限差分法为例，将油藏区域离散后转化为线性方程组 $Ax = b$ 的求解问题。其中 A 是系数矩阵，它的元素由离散化后的方程系数确定， x 是未知向量，包含了各个网格单元的压力值(或其他未知量)， b 是常数向量，由边界条件和其他已知量确定。求得方程组后，就可以得到油藏内不同位置的压力分布情况等信息。求解过程涉及线性代数中的矩阵运算、线性方程组求解等知识，从而将油藏渗流问题与线性代数知识紧密联系起来用于教学目的。

另外在计算机图像处理中，图像的灰度值信息可以用矩阵表示，旋转缩放等操作可理解为线性变换并借助矩阵乘法实现；在网络分析中，可以用邻接矩阵来表示一个图或网络节点之间的连接关系，而网络的结构和性质、网络的传递性和流量问题等可通过矩阵加法、乘法、求逆以及特征值和特征向量等运算进行求解；经济学领域的投入产出模型[15]，社会学中的人口迁移模型和工程领域中的结构力学问题[16]等均可建模转化为矩阵方程(或线性方程组)的问题；在文本分类[17]、推荐系统中，可以在向量空间中建模，通过计算向量的相似度等实现对应的功能。另外在历年大学生数学建模竞赛中，涉及线性规划、网络优化、差分方程、差值与数据拟合、统计分析和模糊综合评价等内容的赛题均可用线性代数的方法进行建模[18]。

教师从问题分析、合理性假设、物理或数学规律分析、坐标系选取等方面引导学生完成建模过程。在此过程中学生不仅能够掌握线性代数的理论知识，还能够提高解决实际问题的能力，从而拓宽学生视野，提升综合素质。

4. 将科学计算软件引入课堂

由于线性代数问题复杂且计算量大，在科学和工程技术领域中的相关问题都需要借助计算机解决。课堂教学中如果不引入科学计算软件，会限制线性代数理论在后续专业课程以及实际中的应用[19]。另外重复繁琐的计算也会加重学生的厌学情绪。因此，将线性代数理论与科学计算软件相结合，对于提升学生科学计算的意识和能力至关重要。

MATLAB 作为一款功能强大的科学计算软件，与线性代数的课程教学具有很高的适配性。例如行列式和矩阵的相关运算、线性方程组的求解、方阵的特征值、特征向量以及方阵的对角化等诸多运算都可

以借助 MATLAB 软件通过简单的命令行完成。在课堂教学中, 可以充分利用 MATLAB 的优势, 提高教学效果。

科学计算软件在教学过程中的作用体现在以下几个方面。首先, 在确保学生掌握基本理论的前提下, 教师可以借助软件演示具体的计算过程或者验证定理或性质的正确性, 从而取代繁琐的板书过程。例如, 在讲解矩阵乘法的性质时, 可以借助软件随机生成矩阵进行乘法运算, 直观地展示乘法运算满足的结合律、分配律和不满足的交换律等。这样能够帮助学生更好地理解抽象的数学概念和性质, 提高学习效率。

其次, 学生也可以在课下借助软件验证自己的计算结果, 有效提高实践动手能力。例如在完成线性方程组的求解后, 可以自行使用软件验证自己的计算结果, 同时也可以进一步尝试和研究线性方程组的不同的解法和程序设计, 加深对知识点的理解和掌握。

最后, 结合实际案例完成建模后, 学生可以自行查阅资料寻找合适的求解方法, 并利用软件编程实现问题的最终求解。这一过程能够培养学生的自主学习能力和解决问题的能力。例如对于油藏问题转化得到的线性方程组, 在 Matlab 中可直接借助命令 “ $x = A/b$ ” 进行求解, 也可以基于松弛迭代法等[20]编写代码进行数值求解。

调查结果显示, 将实际案例引入课堂, 90%的学生提升了学习兴趣; 对问题进行分析、建模、求解提升了学习能力, 有 30%的学生表示能够运用科学计算软件解决问题。通过教师演示和实践动手相结合, 学生能够掌握科学计算软件的基本用法, 为今后的学习和工作打下坚实的基础。

5. 改革教学方式和考核模式

5.1. 教学方式改革

以应用为导向提出课堂改进策略后, 学生的学习兴趣和学习能力均有所提升。但需要在基本教学内容之外增加案例的背景知识以及软件操作层面的内容, 由于课时限制不可能将所有内容全放在课堂上进行。因此需要拓展教学空间, 根据知识类型分情况将其融入教学过程。

对于简单问题, 例如背景单一的案例和软件的操作指令等内容, 可以参考以下方式结合课堂教学进行。首先通过设计问题激发学生的学习兴趣, 然后教师初步分析思路后组织学生分组讨论并提出解决方案, 最后对分组讨论的结果进行综合评价并总结提出最终解决方案。

对于综合性较强的问题, 可以借鉴优秀教师的经验, 采用多样化的方式开展教学[7] [15]-[21]。例如对于实际应用案例, 采用讨论法和案例教学法, 将背景知识和相关参考资料发布在雨课堂作为自主学习内容, 经过分组讨论提交最终解决方案; 进行软件操作和实践时, 可以采用项目教学法, 将软件的基本操作命令以公众号文章的形式推送, 学生利用课余时间完成实践项目。

通过采用多样化的教学手段延伸课堂, 可以有效实施教学改革方案。70%以上的学能够接受多样化的教学方式并且认为对自己的能力提升是有帮助的。

5.2. 考核模式改革

考核方式对学生的学习过程具有导向作用, 平时作业加期末试卷的考核方式不利于能力水平的提升。因此在过程性考核和终结性考核方面均应相应地进行改革。一方面检验学生对知识的掌握程度, 同时也考查学生运用知识解决实际问题的能力和创新思维水平。

首先加强过程性考核。将学生在整个学习过程中的表现, 包括课堂参与、作业完成情况、小组项目表现等计入课程成绩。这样可以更全面地评价学生的学习效果, 激励学生积极参与学习过程。

其次增加实践考核, 要求学生通过查阅资料, 运用所学知识进行分析讨论完成实际案例的分析建模, 并使用科学计算软件解决问题, 最终提交研究报告。如在油藏问题的报告中, 重点从问题转化的准确性、

数学建模的科学性、知识运用和求解方法的合理性等方面对报告进行综合评判。

最后在终结性考试中增加应用型和开放型题目的比例，例如在试卷上可以设置非标准答案试题，以考查学生线性代数基本知识的深入理解和创新思维水平。

6. 总结

综上所述，本文提出的以应用为导向的线性代数课堂教学设计是激发学习兴趣、培养实践能力、提升教学质量的有效途径。通过将问题主线贯穿教学过程、融入建模思想、引入科学计算软件以及改革教学和考核模式等具体措施，能够让学生更好地理解和掌握线性代数的知识，提高运用数学工具解决实际问题的能力，为后续课程的学习和进一步发展打下坚实的基础。

基金项目

重庆科技大学本科教育教学改革研究项目(以应用为导向的线性代数课程改革与实践研究，项目编号：202149)。

参考文献

- [1] 林翠琴. 以线性空间和线性映射为核心的线性代数体系[J]. 工科数学, 1997, 13(12): 84-87.
- [2] 邓燕. 中美线性代数课程比较及对教学改革的启示[J]. 创新创业理论研究与实践, 2020, 3(21): 67-68, 71.
- [3] Carlson, D., Johnson, C.R., Lay, D.C. and Porter, A.D. (1993) The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. *The College Mathematics Journal*, 24, 41-46.
<https://doi.org/10.1080/07468342.1993.12345738>
- [4] David C. Lay. 线性代数及其应用[M]. 第 5 版. 刘深泉, 张万芹, 陈玉珍, 等, 译. 北京: 机械工业出版社, 2018.
- [5] 孟小燕, 朱铁锋. 线性代数课程内容的关联性研究与实践[J]. 大学教育, 2019(7): 118-120.
- [6] 郑文彬, 林耀进, 周豫萍, 等. 线性代数课程线上线下混合式教学模式的研究[J]. 高师理科学刊, 2021, 41(2): 80-86.
- [7] 郑晨, 张楠, 王东. 利用“互联网+”和雨课堂平台解决“线性代数”中的教学难点[J]. 无线互联科技, 2020(19): 119-123.
- [8] 徐清华, 赵清波, 刘砾, 等. 浅谈《线性代数》中的实例教学[J]. 数理医药学杂志, 2019, 32(4): 628-630.
- [9] 关海艳. 双一流背景下线性代数实例库建设的思考[J]. 才智, 2019(12): 224.
- [10] 陈翔, 金秀玲. 基于教考分离的线性代数课程教学实践[J]. 教育教学论坛, 2020(16): 280-281.
- [11] 康卫, 周红志. 基于数学建模案例的线性代数教学探讨[J]. 山东农业工程学院学报, 2020, 37(12): 38-40.
- [12] 刘峰, 张益, 马先林, 等. 基于 OBE 理念的油藏数值模拟课程教学方法改革与实践[J]. 高教学刊, 2023, 9(36): 132-135.
- [13] 胡聪丛, 胡桓. 深度神经网络的发展现状[J]. 电子技术与软件工程, 2017(4): 29-31.
- [14] 张军, 张新宇, 刘菊红, 等. 数学建模思想融入线性代数课程的教学模式[J]. 高师理科学刊, 2020, 40(10): 64-67, 81.
- [15] 薛健, 吴国蔚. 基于投入产出分析的贸易对产业产出影响效应模型研究[J]. 工业技术经济, 2010, 29(1): 61-63.
- [16] 李霞, 周克民. 采用刚体运动学的结构几何构造分析解析方法[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2022, 43(3): 297-302.
- [17] 李晨, 刘纳, 郑国风, 等. 基于词向量模型的短文本分类方法研究综述[J/OL]. 南京师范大学学报(工程技术版): 1-22.
<http://kns.cnki.net/kcms/detail/32.1684.T.20240724.1706.002.html>, 2024-11-27.
- [18] 赵静, 但琦. 数学建模与数学实验[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2020.
- [19] 陈佩宁. 引入 MATLAB 软件工具提高线性代数教学应用水平[J]. 石家庄职业技术学院学报, 2010, 22(4): 53-55.
- [20] 朱起源. 三类典型数理方程的数值解方法探析[J]. 应用数学进展, 2022, 11(1): 302-308.
<https://doi.org/10.12677/AAM.2022.111037>
- [21] 胡红娟, 李融冰, 李慧珍. 雨课堂在《线性代数》教学中的应用[J]. 信息系统工程, 2020(7): 173-174.