

APOS理论视角下初中数学概念教学探究

——以“反比例函数”为例

叶健文, 杜雯

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2024年7月8日; 录用日期: 2024年11月28日; 发布日期: 2024年12月5日

摘要

数学概念是学好数学的基础, 更是教师教学的核心, 能够帮助学生实现从感性认识到理性认识的飞跃。APOS理论基于数学概念的抽象性, 将数学概念的学习概括为“活动阶段——过程阶段——对象阶段——图式阶段”四个阶段。此研究以初中数学“反比例函数”的教学为例, 设计出基于APOS理论为框架的概念教学设计: 设置情境, 温故探新; 类比探究, 感知建构; 问题驱动, 辨析概念; 拓展深化, 丰富认知。阐明三则教学反思, 旨在提高教师概念教学, 帮助学生感悟概念的本质和内涵, 落实数学核心素养培养。

关键词

概念教学, APOS理论, 反比例函数

An Exploration of Junior High School Mathematics Concept Teaching from the Perspective of APOS Theory

—Taking the “Inverse Proportional Function” as an Example

Jianwen Ye, Wen Du

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Jul. 8th, 2024; accepted: Nov. 28th, 2024; published: Dec. 5th, 2024

Abstract

Mathematical concepts are the foundation of learning mathematics well, and they are the core of teachers' teaching, which can help students make the leap from perceptual to rational understanding.

Based on the abstraction of mathematical concepts, the APOS theory summarizes the learning of mathematical concepts into four stages: “activity stage, process stage, object stage and schema stage”. Taking the teaching of “inverse proportional function” in junior high school mathematics as an example, this study designs a conceptual teaching design based on the framework of APOS theory: setting up the situation, reviewing the past and exploring the new; Analogical inquiry, perceptual construction; Problem-driven, discerning concepts; expanding and deepening and enriching cognition. The purpose of clarifying the three teaching reflections is to improve teachers’ concept teaching, help students understand the essence and connotation of concepts, and implement the cultivation of mathematics core literacy.

Keywords

Conceptual Teaching, APOS Theory, Inverse Proportional Function

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《义务教育数学课程标准(2022 年版)》在对“会用数学的思维思考现实世界”的解释中指出:通过经历独立的数学思维过程,学生能够理解数学基本概念和法则的发生与发展,数学基本概念之间、数学与现实世界之间的联系。基于此,如何有效进行概念教学是数学教师值得研究的问题[1]。

教师完成一节有效完整的概念教学课需要耗费大量课堂时间,如果给予学生大量的探究时间,会使教学进度进行缓慢。因此,在实际教学中往往存在着以结论的熟知代替数学概念形成过程的感知、以批量练习代替深层思考的现象,这也导致学生对概念的理解浮于表面。APOS 理论给出了数学概念教学的具体框架,为初中数学概念教学提供了理论基础,降低了初中数学概念教学的难度。

本文基于 APOS 理论框架,对这一节课的教学设计进行探究。

2. APOS 理论概述

APOS 理论由美国数学教育家杜宾斯基提出,APOS 是由 action (活动)、process (过程)、object (对象)、schema (图式)这几个英文的首字母组合而成的。该理论是一种建构主义学习理论,适合概念课的教学,它认为学生学习数学概念的过程是一个建构的过程,建构的四个阶段应该是循序渐进的。因此在实际教学中,教师应该通过引导学生经过具体感性的活动,在过程中使学生在自主建构和不断反思的基础上,将概念组成图式,完善知识的整体结构[2]。APOS 理论作为重要的数学理论之一,能够助力教师设计概念教学,同时也能使学生在学习过程中养成自主学习的能力,使得学生更好地掌握和运用数学概念。

3. 数学概念教学的含义

在数学领域,数学概念教学是数学教学内容之一,旨在使学生掌握数学概念,形成对数学的基本的、概括性的认识。这包括明确概念的内涵、外延,熟悉其表述,了解概念之间的关系,能够对概念进行分类,从而形成概念系统。数学概念教学依赖于对数学概念的认识,通常包括引入概念、明确概念、运用多种形式巩固所学概念等过程。概念教学的本质在于揭示概念的本质属性,教师作为知识的传播者,首先必须深刻认知概念的本质属性,明确概念的内涵与外延,正确表述概念的本质属性[3]。

4. 反比例函数教学剖析

反比例函数是初中数学阶段学习的一个基本概念, 用于描述两个量之间的反比例关系, 这种关系在日常生活和科学研究中经常出现, 因此理解和掌握反比例函数是学习数学和应用数学的重要一步。反比例函数是人教版初中九年级下册中第二十六章的第一节内容, 在学习这节内容之前, 学生就已经掌握了函数、正比例函数、一次函数以及二次函数。因此, 反比例函数是在此基础之上, 学生学习的又一门函数。它涉及的内容与学生所学的方程、不等式等也都有着联系, 同时也为高中阶段所学习的幂函数、指数函数等知识打下坚实基础。这一内容的教学目标为: (1) 理解反比例函数的概念, 能够判断给定函数是否为反比例函数。(2) 通过实际生活问题给出的条件确定反比例函数的表达式, 形成和完善函数的整体结构。(3) 体会反比例函数在解决实际问题中的作用, 从中渗透出数学抽象、数学建模、归纳、类比、转化等数学思想。

5. 教学过程设计

5.1. 活动阶段——设置情境, 温故探新

武汉市与黄冈市线路全长约 330 km, 若汽车以平均速度 v (单位: km/h) 从武汉市开往黄冈市, 如表 1 所示。

Table 1. Speed vs. time relationship table

表 1. 速度与时间关系表

速度(v)	50	60	70	80	90
时间(t)					

- (1) 求汽车全程所用时间 t (单位: h)。
- (2) 通过计算时间 t , 大家有没有发现速度 v 与时间 t 之间存在着什么关系?
- (3) 你可以以函数的形式来表达速度 v 与时间 t 的关系吗?

预设: (1) $t = \frac{33}{5}, \frac{11}{2}, \frac{33}{7}, \frac{33}{8}, \frac{11}{3}$ 。

- (2) 全程的路线距离是常量, 随着速度 v 的增大, 时间 t 随之减少。

(3) 函数关系可以表示为时间 $t = \frac{330}{v}$ 。

设计意图: 以生活中的实例作为情境, 可以使学生自然而然地步入对抽象理论的思考。通过列表, 填写表格数据, 感悟变化与之对应的思想, 教师设计外显的数学探究活动激发学生的学习兴趣, 发展学生数学抽象的核心素养, 培养学生用“数学的眼光观察现实世界”的意识与能力[4]。

5.2. 过程阶段——类比探究, 感知建构

过程 1: 上述情境中, 函数时间 t 与速度 v 的关系式是我们初中阶段所学习的一次函数吗?

预设: 不是, 一次函数的表达式为 $y = kx + b$ 的形式, 自变量之间的关系属于正比例关系。

师: 非常好, 这是我们即将要学习的一个新函数, 大家有没有发现这个新函数的变量之间的关系和我们小学阶段所学习的反比例有着关系? 大家是否还记得反比例关系是怎样描述的呢?

预设: 反比例关系: 如果两个变量的每一组对应值的乘积是一个不等于零的常数, 那么这两个变量成反比例。用数学式子表示两个变量 x 、 y 成反比例, 就是 $xy = k$, 或表示为 $y = \frac{k}{x}$, 其中 k 是不等于零

的常数。

过程 2: 下面五个问题中变量之间的关系是否属于反比例关系? 请用函数表达式来表示下面五个问题中两个变量之间的关系。

(1) 游泳池的容积为 4000 m^3 , 现往游泳池内注水, 注满整个游泳池所需要的时间 t (h) 与注水速度 v (m^3/h) 之间的关系式。

(2) 已知一个矩形的面积为 15 cm^2 , 则这个长方形的长 x (cm) 与宽 y (cm) 之间的关系式。

(3) 一本小说共 200 页, 看完这本小说所需要的时间 t (天) 与每日阅读量 y (页) 之间的关系式。

(4) 已知武汉市的总面积约为 8500 km^2 , 人均占有面积 s ($\text{km}^2/\text{人}$) 与全市总人口 n (人) 之间的关系式。

(5) 一个圆柱体水杯的体积为 400 ml , 圆柱体水杯的底面积 s (cm^2) 与高 h (cm) 之间的关系式。

追问: 你还能举出类似的实例吗?

设计意图: 此环节是以问题串的形式来进一步丰富反比例关系的生活实例, 体现教师的主导作用, 同时也为第三阶段抽象出反比例函数的概念做出铺垫, 加深学生对反比例关系的理解, 发展学生逻辑推理的核心素养。

5.3. 对象阶段——问题驱动, 辨析概念

对象 1: 因为这个新函数是具有反比例关系, 因此我们把它命名为反比例函数, 之前我们已经学习了正比例函数, 大家能不能类比正比例的定义, 归纳出反比例的定义呢?

预设: 一般地, 形如 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的函数, 叫做反比例函数, 其中 x 是自变量, y 是函数, 自变量 x 的取值范围是不等于 0 的一切实数。

对象 2: 下列关系式中哪些是反比例函数? 如果是, 请写出反比例函数的比例系数。

(1) $y = \frac{4}{x}$ (2) $y = \frac{x}{4}$ (3) $y = \frac{5x}{2}$ (4) $y = \frac{2}{5x}$

(5) $y = 6x^{-1}$ (6) $y = \frac{7}{x+1}$ (7) $xy = 10$ (8) $y = -\frac{2}{x}$

设计意图: 从“两个自变量呈反比例关系”与“函数”这两个层面抽象提取出概念, 进而让学生更好地理解概念的实质, 以正比例函数的概念为切入口, 引导学生推导出反比例函数的概念, 对其赋予形式化的定义和符号。通过例题加深对反比例函数概念的理解, 掌握判断函数是否为反比例函数的技巧。

5.4. 图式阶段——拓展深化, 丰富认知

图式 1: 已知 y 与 $x-3$ 成反比例, 当 $x=-1$ 时, $y=-4$, 求 y 与 x 的函数关系式。

图式 2: 假如函数 $y = (k+3)x^{k^2-10}$ (k 为常数) 是反比例函数, 则 k 的值为_____, 解析式为_____。

图式 3: 已知 y 与 x 成反比例关系, 并且当 $x=2$ 时, $y=9$,

(1) 求 y 关于 x 的函数关系式。

(2) 当 $x=3$ 时, 求 y 的值。

(3) 当 $y=5$ 时, 求 x 的值。

(4) 为此函数设计一个现实情境的数学问题。

设计意图: 此环节要求学生会用待定系数法确定反比例函数解析式, 帮助学生通过例题内化反比例函数的概念理解, 引导学生借助整体思维来思考问题, 让学生对反比例的理解上升到抽象层面, 最后通过图式 3 的(4)小问引导学生将反比例与现实生活联系到一起, 让学生进一步领会反比例函数是用于描绘现实问题中数量关系的一种数学模型, 从而增强学生的应用意识。

6. 教学反思

本教学设计应用 APOS 理论的四个阶段“活动阶段——过程阶段——对象阶段——图式阶段”进行概念教学, 环环相扣, 循序渐进。学生可以在活动中回顾旧知, 同时教师在创设实例情境的目的在于让学生理解反比例函数的直观背景, 感知变量之间的相互依赖性。在过程阶段对反比例的变量关系进行不断完善和深化, 在对象阶段中基于学生对反比例的认识逐步建构和辨析反比例函数概念, 把抽象出的概念所独具的性质给予形式化的界定及符号。通过图式阶段把概念当作一个已知对象运用到具体例题当中, 拓展深化, 最终完成概念教学。在教学中应用 APOS 理论需要注意以下几点。

6.1. 注重实例直观

数学是源于现实生活的, 生活中的实例更便于学生理解题目内容, 激发学生兴趣。所以在活动阶段, 教师尽可能多提供一些有关生活实例的感性素材, 引导学生展开思考, 实例直观可以使学生从具体到抽象理解数学概念[5]。在基于 APOS 理论的“反比例函数”中, 从两市之间的路程实例出发, 让学生体会发生在身边的数学问题, 从而培养学生的问题解决能力, 感悟数学的魅力。同时教学过程中要避免“为了直观而直观”的现象, 要注重实例直观的真实可靠性。

6.2. 理清知识联系

学习数学要理清知识之间的联系, 尤其是在应用 APOS 理论的教学过程中, 新概念往往都是建构在已掌握的旧知识之上, 因此不能将知识孤立起来、割裂开来。在过程阶段中, 教师出示的问题要环环相扣, 后一个问题的发问是对前一个问题的补充与拓展, 学生可以在问题串的回答过程中从旧知的基础上不断接近新知识的全貌, 最终理解和掌握新知识。在过程阶段中学生对新知识是主动建构而不是被动接受[6]。

6.3. 运用变式教学

概念教学注重变式, 以此加深对概念的建构、理解和熟练运用。但是例题和习题的展示并非是简单机械地重复, 需要教师筛选出具有代表性的例题, 针对题目中并非本质特征的条件与结论实施变式, 从而使学生抽象出概念的本质特征[7]。如在“反比例函数”教学中, 在图式阶段增设变式例题, 不断改变例题中的非本质特征, 突出反比例函数的概念实质。同时教师也可以引导学生自主对例题进行变式, 发挥学生的主体作用。

综上所述, APOS 在数学概念课的教学上提供了科学有效的理论指导, 促使学生在学习中不再采取僵硬记忆的方式去背数学概念, 而是让学生经历数学概念在旧知中建构形成的过程, 进而实现对数学概念的理解、掌握与应用, 提升学生的思维水平。同时教师在运用 APOS 理论进行教学的同时, 要将理论与教学实践相结合, 使理论更好地运用在教学中, 进而有效提升概念课的教学。

7. 研究不足与展望

目前对 APOS 理论的应用研究不够全面, 还有待对于更加深层次的部分进行研究, 目前的教学设计可能存在设计不够深入, 同时教学反思给出的建议相对浅显。因而也希望能够未来的学习中对 APOS 理论进行更全面和更深入的研究讨论和持续的改进。

参考文献

- [1] 史宁中. 《义务教育数学课程标准(2022年版)》的修订与核心素养[J]. 教师教育学报, 2022, 9(3): 92-96.

- [2] 魏红. 基于 APOS 理论的函数单调性概念教学设计[J]. 中学数学研究, 2023(8): 6-8.
- [3] 朱琛. 基于 APOS 理论的“锐角三角函数”概念教学探索[J]. 中学教研(数学), 2023(11): 16-19.
- [4] 龚剑. 基于 APOS 理论的“反比例函数”教学设计[J]. 初中数学教与学, 2011(24): 13-15.
- [5] 周平. 问题驱动法视角下初中数学概念课的教学设计——以“反比例函数的概念”为例[J]. 数学教学研究, 2023, 42(3): 37-40+43.
- [6] 孙丹丹. 基于 APOS 理论的概念教学设计——以“实数”教学为例[J]. 中学数学, 2023(22): 93-94.
- [7] 崔园园. APOS 理论视角下的初中数学概念教学——以三角形概念教学为例[J]. 数理化解题研究, 2024(2): 2-4.