Creative Education Studies 创新教育研究, 2024, 12(12), 160-165
Published Online December 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2024.1212874

Hans汉斯

基于5E教学模式的高等数学教学探讨

——以条件极值为例

马敏捷，方晓峰

火箭军工程大学基础部，陕西 西安

收稿日期：2024年11月5日；录用日期：2024年12月3日；发布日期：2024年12月10日

摘 要

本文旨在探讨如何运用5E教学模式来优化高等数学课程中关于多元函数条件极值的教学。通过案例分析、理论讲解、实操演练和评估反馈等步骤，提高学生对拉格朗日乘数法的理解和应用能力，同时培养其从实际问题中提炼多元函数关系并解决问题的技能。通过精心设计的教学活动，学生不仅将掌握理论知识，还将学会如何将这些知识应用于解决实际问题。

关键词

5E教学模式，条件极值，拉格朗日乘数法

Discussion on Higher Mathematics Teaching Based on 5E Teachings Mode

—Taking the Case of Conditional Extremum

Minjie Ma, Xiaofeng Fang

Department of Foundation, Rocket Force Engineering University, Xi’an Shanxi

Received: Sep. 5th, 2024; accepted: Dec. 3rd, 2024; published: Dec. 10th, 2024

Abstract

This paper aims to discuss how to use the 5E teaching mode to optimize the teaching of conditional extremum of multivariate function in higher mathematics. To enhance students’ understanding and application of Lagrange multiplier by means of case studies, theoretical explanations, practical exercises and assessment feedback, at the same time, we should cultivate their skills of extracting multivariate function relations from practical problems and solving problems. Through carefully designed teaching activities, students will not only master the theoretical knowledge, but also learn how to

文章引用: 马敏捷, 方晓峰. 基于 5E 教学模式的高等数学教学探讨[J]. 创新教育研究, 2024, 12(12): 160-165.
DOI: 10.12677/ces.2024.1212874

apply this knowledge to solve practical problems.

Keywords

5E Teaching Mode, Conditional Extremum, Lagrange Multiplier Method

1. 引言

“5E”教学模式是探究性教学的典型代表，它是美国生物学课程研究开发的一种基于建构主义教学理论的模式，由卡普路斯和戴尔首先提出。该教学模式最初将课堂分为探索(Exploration)、发明(Invention)和发现(Discovery)三个阶段，后经多次改革，最终将课堂划分为了五个衔接紧密、层层递进的环节[1]——Engage (吸引)、Explore (探索)、Explain (解释)、Elaborate (深化)、Evaluate (评价)。该模式从本质上来讲是一种探究性的教学模式，是促进学生思维发展、提升学生核心素养的重要方式。该模式强调学生通过主动参与课堂环节构建自己的知识体系，而不是被动接受知识。

作为多元函数微分学的应用，条件极值是高等数学中的一个重要概念。与无条件极值不同，其目标函数的自变量除了定义域要求外，还受到某些条件的制约，在现实问题中具有广泛的应用。然而，这一概念的抽象性和复杂性往往成为学生学习的难点。通过 5E 教学模式，可以充分吸引学生的兴趣，自己动手探索解题方法，再经过讨论和解释环节加深理解，应用到多种场景中，从而可以有效地克服这些难点，增强学生的学习体验和成效。

目前，有关条件极值的教学研究中，有对其充分条件与必要条件的探讨和推广[2] [3]，有从探究式教学角度进行阐述和说明[4] [5]，还有条件极值的应用和拓展[6]-[9]。探究式学习需要更多的时间和资源投入，翻转课堂则对学生的自律性和自学能力要求较高，不适合所有学生[10]。研究了如何在 5E 教学模式下将数学史融入数学概念教学的进程中，增加学生深度学习的机会，提高教学效果。本文结合高等数学课程实际教学体会和经历，通过 5E 教学模式科学设计教学内容和策略，帮助学生有效地克服难点，增强学生的学习体验和成效，同时激发学生的创新思维。

2. 条件极值教学设计

本次课程要求学生在课前做好复习，熟练掌握多元函数的极值部分涉及的结论及求解步骤，并提前预习，帮助学生在课前明确个人的疑惑点，达到更好的课堂效果。

课程开始，以公路附近营地的选址问题为例引入，从该问题的条件中可得营地坐标满足的表达式，用一元函数极值的方法求解。启发学生思考，如果不易从隐函数约束条件中得到显函数应怎么办？从几何直观入手，得出极值点处成立的必要条件，并启发学员，从理论上对条件进行推导证明。从引例的求解过程中可以看到，我们只需关注与导数有关的信息，以此为出发点，得出拉格朗日乘数法的推导过程，帮助学生理解拉格朗日乘数法的来源和思想。在讲解过程中注意循序渐进，引导学员在已有知识的基础上主动思考，凸显以学为中心的教学理念。

2.1. Engage (吸引)

以一个实际军事问题引入本节课内容，激发学生的学习兴趣。

引例：边防哨所不仅是祖国领土的标志，也是国家安全的第一道防线。为了更好地监控边界活动，我军在边境线上新设一个哨所 A 。受限于战略要求，哨所位置需要远离边防公路。为做好哨所内边防人员的后勤保障工作，现沿边防公路寻址修建营地 M ，以方便哨所和外界的联系。问营地 M 修建在何处时其和哨所 A 之间的距离最短？

引导学员对实际问题进行合理的简化，即在忽略边防公路的宽度以及营地与边防公路的距离的条件下，同时假设边防公路与哨所在同一平面上。用数学语言描述问题：在曲线上寻找点 M 使得 AM 之间距离最小。假设边防公路方程为 $xy=6\left(x>0\right)$。以 A 为原点，建立平面直角坐标系，可以绘制边防公路的曲线并得到 M 点所满足的条件。为解决这个问题，需要将约束条件显化处理代入目标函数，从而将目标函数和约束条件方程浓缩到一个函数式，将条件极值问题转化为无条件极值问题，按照求极值的方法求解即可。

这一实际问题的引入，不仅让学生意识到数学在军事决策中的价值，还帮助他们初步掌握数学建模的思路和方法。

2.2. Explore (探索)

对引例的目标函数和约束条件可视化，引导学员对所得结果进行分析，结合图像(如图 1 所示)可以很明显看到：如果对自变量只有定义域的限制，它在原点处取得最小值，而对自变量加上限制条件即公路方程后，原点不再是最小值点。

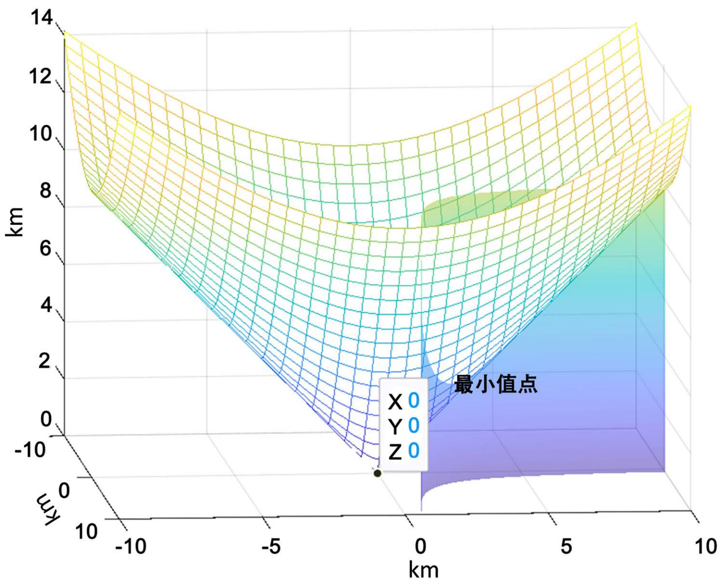

Figure 1. The object function and constraint graph of the cited example
图 1. 引例目标函数和约束条件图形

提出问题：约束条件无法显化怎么办？比如假设公路方程为 $x^2+x+y^2+y-1=0$，在公路上如何寻找一点 $M\left(x_0,y_0\right)$ 使哨所 A 到营地 M 的距离最小？引导学生通过观察目标函数的等值线图和约束条件的曲线(如图 2)，探索在条件极值点处二者之间的关系。

学生发现在点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 处成立：$n_\varphi // n_f$ ，即 $\nabla\varphi // \nabla f$ ，成立

$$\frac{f_x\left(x_0,y_0\right)}{\varphi_x\left(x_0,y_0\right)}=\frac{f_y\left(x_0,y_0\right)}{\varphi_y\left(x_0,y_0\right)},$$

这样就从几何直观上得到了条件极值点处所满足的等式。继续启发学生思考，如何验证所得结果是否正确呢？

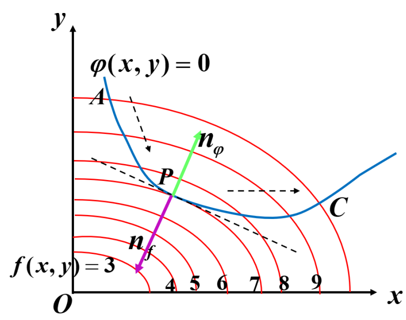

Figure 2. Contour graphs and constraints
图 2. 等值线图形和约束条件

探索阶段引导学生更进一步思考约束条件无法显化时应如何解决，从几何直观出发，猜测条件极值点处的等式条件，并思考如何验证猜测，并将这些直觉推广到更一般的情景。

2.3. Explain (解释)

大部分学员不清楚如何验证，引导学员由已知出发研究未知问题。从几何上发现，目标等式在极值点处成立，因此可从函数取得极值的必要条件入手进行验证。部分学员想到用已知的“代入法”进行验证，提问：此时约束条件不易显化，应如何代入？另外从引例的求解过程中会发现，我们关心的是导数(偏导数)的情况。带领学员回忆多元函数微分学内容，结合隐函数求导定理，在条件极值点处导出需满足的方程组并引入拉格朗日乘子，总结拉格朗日乘数法的计算步骤。

在拉格朗日乘数法推导过程讲解完成后，对拉格朗日乘子和拉格朗日乘数法的重要意义进行介绍。拉格朗日乘子对应经济学中资源或约束的影子价格[9]，可以帮助决策者理解约束的边际重要性以及如何通过调整资源分配来优化目标函数。数学家拉格朗日在著作《解析力学》阐述了“拉格朗日乘数法”，在最优化理论的发展史上具有非常重要的意义：为处理无约束与约束优化问题，提供了一个统一框架，极大地扩展了优化问题的求解范围。这种思想也启发了后续一系列优化理论的发展，包括罚函数法、内点法等，这些方法都是处理复杂优化问题时不可或缺的工具。在比亚迪第五代 DM 技术中也能看到基于拉格朗日方法的身影。

同时也要注意，拉格朗日乘数法只给出函数在某条件下取极值的必要条件，因此求出的点是否为极值点，还需要加以讨论。在实际问题中，往往可以根据问题本身的性质来判定所求的点是不是极值点。通过例 1 的求解过程，使学生熟悉拉格朗日乘数法的计算步骤。

2.4. Elaborate (深化)

在解释阶段，正式引入拉格朗日乘数法，解释其背后的数学原理和历史背景。通过板书和多媒体辅助，引导学生理解如何构建拉格朗日函数，将条件极值问题转化为无条件极值问题。思政内容侧重于拉格朗日乘数法在最优化理论中的深远影响。

通过进一步思考引入拉格朗日乘数法的推广。假设边防公路为空间曲线如 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 时如何确定营地位置使其与哨所的距离最小？

学生会发现，目标函数变为三元函数，自变量和约束条件个数增加，提问：拉格朗日乘数法能否解

决这样的问题？大部分学生猜测可以。实际上，拉格朗日乘数法可推广到多变量和多个约束条件下的情形。进一步提问：拉格朗日函数如何来写？要强调有几个约束条件就会有几个拉格朗日乘子。求解的方程组中方程个数等于自变量个数加上条件个数。例如，求函数 $u = f(x, y, z)$ 在附加条件 $\varphi(x, y, z) = 0$，$\psi(x, y, z) = 0$ 下的极值：可以构造拉格朗日函数：

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z)$$

有了例 1 的基础，学生动手计算满足条件的最小值点。更进一步，通过练习和思考题，深化学生对条件极值问题解决策略的理解。

练习 1 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面，使切平面与三个坐标面所围成的四面体体积最小，求切点坐标。

练习 1 可以对本章多元函数微分的几何应用部分内容进行回顾，说明目标函数较复杂时注意将问题转化：求分式的最小值转化为求分母的最大值，结合对数函数的性质进一步转化目标函数，体现转化的重要性以及解方程组的技巧。

练习 2 函数 $z = x^2 - y^2$ 在闭区域 $x^2 + 2y^2 \le 4$ 上的最大值和最小值分别为_____。

练习 2 意在说明闭区域上函数的最值问题的求解方法，将边界上最值的求解问题转化为条件极值问题。

深化阶段，学生应用拉格朗日乘数法解决不同类型的问题。通过这些练习，学生不仅能巩固理论知识，还能提高解决复杂实际问题的能力。最后，对条件极值部分内容进行总结，突出所运用的数学思想方法。

代入法将问题转化为求一元函数的无条件极值问题，属于降元法；拉格朗日乘数法将二元函数的条件极值问题转化为求三元函数的无条件极值问题，属于升元法。无论升元法还是降元法都将条件极值问题转化成无条件极值问题进行求解，这样的转化过程也称为“化归”，这也就是本节课蕴含的数学思想方法。

2.5. Evaluate (评价)

评价是“5E”教学模式的检验环节，主要包括过程性评价和终结性评价两种。过程性评价主要发生在前四个环节，教师利用非正式评价对学生在某一环节中的知识掌握情况进行检验的方式；终结性评价是在前四个环节完成后，教师利用纸笔测试以及引导学生进行自我评价等方式对整节课的教学效果进行评估的过程。在过程性评价中，注意观察学生能否从设置的题目中快速甄别出有效信息，进而从情境中抽象出数学问题，最后运用新知识解决问题；在进行终结性评价时，通过设计测试题，全面评估学生对条件极值概念的掌握情况。除测试题外，还设置了思考题，鼓励学生通过小组讨论方式拓宽思路，加深对拉格朗日乘数法的理解。在此过程中，教师也应当促进课堂间的多向交流，引导学生自主评价，自己总结本节课所学到的数学知识和数学思想。

思考题 1) 拉格朗日乘数法计算所得结果是否漏掉若干个极值点？如何弥补？2) 条件极值在大家所学专业中有哪些应用，尝试总结归纳几个典型应用案例。

通过评估学生的参与度、解决问题的策略和提交的最终结果，进行综合评价，确保每位学生都能掌握条件极值问题的求解方法。

3. 教学效果

在条件极值的教学实践中，观察学生在课堂上表现积极。学生专注于老师的讲课内容，氛围活跃，

能够紧跟老师的节奏，积极参与讨论和练习环节。结合作业情况可以发现，这种积极的学习态度促进了知识的有效吸收，也起到了培养学生逻辑思维能力的效果。

通过调查结果汇总(见表 1)可知，5E 教学模式的应用，使学生对授课形式以及教学效果满意程度显著提升。

Table 1. Summary of class satisfaction
表 1. 课堂满意度汇总表

项目	实验组			传统授课组		
	满意	比较满意	不满意	满意	比较满意	不满意
对授课的形式	27	1	1	23	1	1
提高学习兴趣	31	2	0	28	5	1
提升自学能力	25	1	0	23	4	0
理论与实践相结合	24	1	0	22	3	1
总体满意度	107	5	1	96	14	3
总体满意度百分比	95.6%			84.9%		

在教学过程中，从引例入手讲解多元函数的条件极值问题，使得学生体会到数学在军事问题中的重要作用，初步掌握数学建模的思路与方法，从而培养学生运用数学知识分析问题、解决实际问题的能力，达到学以致用的目的。在拉格朗日乘数法推导完成后，以数学家拉格朗日在条件极值问题求解中的创新发现，启发学员在发现问题，解决问题的过程中培养创新意识，更好为国防建设服务。

4. 结束语

本文通过 5E 教学模式的应用，为条件极值的教学设计提供了一种有效的框架。这一框架不仅有助于学生掌握理论知识，还培养了他们解决实际问题的能力。通过吸引、探索、解释、深化和评价的逐步推进，学生不仅学会了如何应用拉格朗日乘数法解决问题，还提高了批判性思维和创新能力。5E 教学模式与数学知识的创建过程相呼应，在这个过程中融入数学思想方法，有利于提升学生的数学素养。教师应找准吸引和探索阶段的切入点，充分发挥好 5E 教学模式的优势，充分发挥教师的主导作用，提高课堂效果。

参考文献

[1] 王晶莹. 美国探究教学模式述评[J]. 上海教育科研, 2010(4): 61-63+51.
[2] 林文贤. “三全育人”理念下“数学分析”教学案例——以《条件极值》为例[J]. 科技风, 2024(1): 19-21.
[3] 赵小文, 宁荣健, 张莉. 基于条件极值的研究式教学设计谈大学生创新思维和科研能力的培养[J]. 大学数学, 2021, 37(5): 113-119.
[4] 景慧丽, 李应岐. 以学为中心的互动探究性教学在“拉格朗日乘数法”教学中的应用[J]. 湖北工程学院学报, 2021, 41(3): 40-43.
[5] 张雁. 基于探究式学习的高等数学课程设计与教学实践——条件极值部分[J]. 数学学习与研究, 2019(5): 7.
[6] 杨丽娜. 拉格朗日乘子法几何意义的教学设计[J]. 高等数学研究, 2023, 26(2): 49-51+60.
[7] 路云, 褚鹏飞. GeoGebra 软件在条件极值问题求解中的应用举例[J]. 科教导刊, 2022(21): 59-62.
[8] 张永凤. 条件极值问题的一题多解与应用意识的培养[J]. 高等数学研究, 2020, 23(2): 16-19.
[9] 吴汉洪, 徐国兴. 影子价格两种定义的统一性及其经济学含义[J]. 当代经济管理, 2007(1): 9-12+21.
[10] 于琪, 常海斌, 代丽丽, 等. “5E”教学模式下数学史融入数学概念教学的实现路径研究——以“完全平方公式”为例[J]. 理科考试研究, 2024, 31(12): 14-18.