

变学习为探究，化实践为真知

——以《三角形全等的判定》为例

曾 婷，汪锦涛，何春玲

黄冈师范学院数学与统计学院，湖北 黄冈

收稿日期：2024年6月21日；录用日期：2024年12月9日；发布日期：2024年12月16日

摘 要

课堂改革的宗旨是改变传统的教学模式，由教师主导变为学生主体的课堂，倡导学生主动参与、勤于动手、合作交流，使学生在“学中做，做中学”，培养学生数学研究性学习的能力。本文以“三角形全等的判定”为例，将课堂分为巧创情境，引发思考、动手操作，激发思维、合作交流，问题攻破、巩固延伸，能力生成四个环节，在探究性学习中建构“三角形全等”判定条件的深层认识，实现思维进阶，同时为动手操作的数学探究教学带来一次有益尝试。

关键词

动手操作，数学探究，数学思维，教学研究

Change Learning into Inquiry, Turn Practice into True Knowledge

—Taking “The Judgment of Triangle Congruency” as an Example

Ting Zeng, Jintao Wang, Chunling He

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Jun. 21st, 2024; accepted: Dec. 9th, 2024; published: Dec. 16th, 2024

Abstract

The purpose of classroom reform is to change the traditional teaching mode, from teacher-led to student-centered classroom, advocating students to actively participate in, diligent in hands-on, cooperation and communication, so that students can do in learning, learn by doing, and cultivate students' ability of mathematics research-based learning. Taking the judgment of “triangle congruency”

as an example, this paper divides the classroom into four links: creating situation skillfully, triggering thinking and hands-on operation, stimulating thinking and cooperation and communication, solving problems, consolidating and extending, and generating ability. In the inquiry learning, we should construct the deep understanding of the judgment conditions of “triangle congruency”, realize the thinking progression, and bring a useful attempt to the mathematics inquiry teaching of hands-on operation.

Keywords

Hands-On Operation, Mathematical Inquiry, Mathematical Thinking, Teaching Research

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

21 世纪的数学教育是以培养学生创新精神和实践能力为重点的素质教育，探究教学与这种改革的要求不谋而合。在探究式学习下，学生处于一个动态、开放、主动、多元的学习环境，学生的发展以及学习方式是探究性教学的关注要点，推动了学习方式的变革[1]。

现代教育理念的核心在于激发学生的创新精神和实际操作能力，以实现其全面而均衡的发展。探究式教学作为一种卓越而高效的教学方法，受到了广泛的推崇。新一轮国家基础教育课程改革纲要明确指出，要扭转传统中学生被动接受知识的局面，积极倡导学生主动投入探究学习的过程。这一改革鼓励学生通过实践活动，学习并掌握科学、系统的探究技巧，从而强化探究意识，促进创新思维的发展，并提升他们综合运用所学知识的能力[2]。《义务教育数学课程标准(2022 年版)》指出，学生的学习应该是一个主动的过程，认真听讲、独立思考、动手实践、自主探索、合作交流等都是学习数学的重要方式；学生应该有足够的时间和空间经历观察、实验、猜测、计算、推理、验证等活动过程[3]。如今，探究式教学受到了教育理论学者及一线教师大量的探索与实践，在课堂教学中被广泛应用。

“数学探究”是根据学习内容中的数学问题或任务，采用探究的方法经历知识的形成过程，发现问题背后隐藏的数学规律或结论，培养创新精神和实践能力的一种教育活动形式[4]。“数学探究”是新课程改革的亮点之一，实施效果是否理想直接制约着课程目标的落实，这也是人们不断追求的研究课题。

2. 探究与实践视角下的教学新例

“图形与几何”是《义务教育数学课程标准(2022 年版)》中一个十分重要的内容，对学生的直观感知、空间想象、动手操作、运算求解、推理论证等多方面能力有较好的提升。“三角形”是最简单的多边形，是研究其他几何图形的基础；“全等三角形”则是首个研究图形与图形间关系的内容载体，也是学生接触几何推理，学习严谨表达推理过程的第一个几何知识，是培养学生逻辑推理的典型素材；“三角形全等的判定”是后续几何证明和计算的有效方法，也是研究图形性质的基础，在整个初中阶段具有承上启下的作用，对于学生解题能力的提升有着重要意义。同时，“三角形全等的判定”适合采用探究性教学方法，通过巧创情境、动手操作、合作交流等环节，引导学生主动探究三角形全等的判定条件。这种教学方法不仅符合现代教育理念，也符合学生认知发展的规律，能够有效提升学生的数学素养和综合能力。

2.1. 巧创情境，引发思考

在数学课堂上，合适的教学情境能够给学生带来激趣、启思的作用[5]。皮亚杰的认知发展理论认为，学生的认知发展是通过与环境的相互作用而不断进行的。在社会实践中，学生可以通过与社会的相互作用来提升自己的认知能力和发展水平，鉴于初中阶段的学生具有活泼好动、思维敏捷、动手能力强的特点，教师可以创设实操情境。

在上课前，教师可以依据教学内容，准备好一个破损的风筝，以及制作新风筝相应的材料，然后引入问题：印有班级图标的三角形风筝不小心弄坏了，大家有什么办法吗？在同学们的热烈讨论过后，教师总结本节课的探究内容：制作两个一模一样的三角形需要知道这个三角形的哪些信息呢？

创设问题情境时可以将数学问题与学生所处的现实背景相结合，可以结合学生经历的真实事件。通过风筝的制作来探究全等三角形的判定条件，让学生带着数学的眼光去思考问题、解决问题，体会到数学的实用性以及学习数学的必要性。

2.2. 动手操作，激发思维

在操作与实践中学数学，也就是学生在动手动脑相协同的过程中，借助动作思维和逻辑思维感悟知识的发生过程，在数学学习过程中，通过这种方法，学生不仅能够获取到结果性的数学知识，更重要的是，他们能够体验到知识形成的过程，从而获得丰富的过程性知识。这种学习方式不仅注重结果，更强调学习过程中的思考与探索，有助于学生的全面发展[6]。

对于本节课的探究内容，学生很快回答出了三角形的六要素。教师追问：破损的风筝似乎无法提供全部的条件，我们能不能从中选择部分条件，就制作出一样的三角形呢？为了充分发挥学生的主体作用，将课堂真正归还给学生，老师将破损的风筝展示出来，让学生根据能够获取的数据自行展开研究。学生有的用一个角，有的用一条边，有的用一边加一角……在分享时，教师有意识地按照所使用的条件个数由小到大的顺序：在使用一个条件的情况讨论完后，再来讨论使用两个条件的情况，在润物细无声中引领学生学会了分类讨论的数学方法，帮助学生形成更加有条理、有逻辑的思维品质，进而提高推理能力，构建更加合乎逻辑的数学思维体系。

分享还在继续，对于两条边对应相等是否能够判定三角形全等，同学们有着不同的看法，教师依次展示两种情形。

先展示第一种情况，第一种情况(图 1)的代表解释：使 AB 和 $A'B'$ 相等， AC 与 $A'C'$ 相等，这样的话就可以明显看出， $\triangle ABC$ 是一个钝角三角形， $\triangle A'B'C'$ 是一个锐角三角形。则这两个三角形不能重合，所以这两个条件不能判定两个三角形全等。

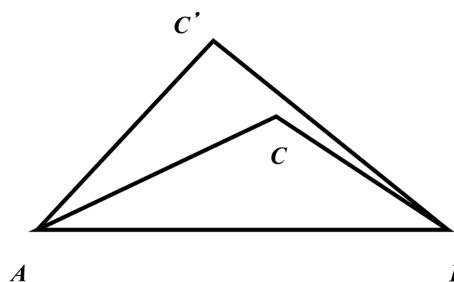


Figure 1. Obtuse and acute triangles with two equal sides

图 1. 两边相等的钝角与锐角三角形

接着展示第二种情况(图 2)：如图的两个直角三角形，使 AB 和 $A'B'$ 相等， AC 与 $A'C'$ 相等，此时两个

三角形全等，所以两个条件可以判定两个三角形全等。

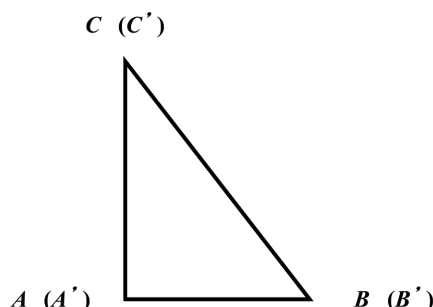


Figure 2. Congruent right triangles with two equal sides
图 2. 两边相等的直角三角形

两种情况似乎都有道理，面对同学们的疑惑，教师充分发挥其引导者的作用，适时对同学们进行引导：两种情况分别都使用了几个条件呢？同学们茅塞顿开，发现，直角三角形有着一个隐藏条件—— 90° 角。

教师引导学生通过画一画来判断一个条件、两个条件不能判定两个三角形全等，给学生提供了充足的实践机会，通过不断的尝试、试错以及反思，学生对于知识的理解会更加深刻。

2.3. 合作交流，问题攻破

建构主义认为学习是一个主动建构知识的过程，学生需要通过与环境的互动来建构自己的知识体系。数学学习活动若欲达到高效，不能仅仅局限于模仿和记忆。相反，实践操作、自主研究和团队协作交流应成为学习数学的核心途径。这些方法不仅有助于深化对数学知识的理解，还能培养学生的创新能力和团队协作精神，使其数学学习过程更为丰富和多元。

在得到一个条件、两个条件不能判定两个三角形全等后，学生自然而然产生疑问：三个条件能否判定两个三角形全等呢？教师顺势布置以下操作任务：已知一个 $\triangle ABC$ ，请你再画一个 $\triangle A'B'C'$ ，使 $AB = A'B'$ ， $BC = B'C'$ ， $AC = A'C'$ 。把画好的 $\triangle A'B'C'$ 剪下，放到 $\triangle ABC$ 上，他们全等吗？

学生在独立探究时，很少会选择三个条件来研究，因此，在课堂教学中要给予学生足够的思考时间，教师可以作为学生的合作者，与学生沟通讨论。学生经过动手发现，在画完一条边就不知道该如何去做了。面对画图上的难点，教师逐层启发学生思考：我们要想画一个 $\triangle A'B'C'$ ，关键是要做什么？确定两点 B' 、 C' 容易，问题在于 A' 如何确定， A' 应该满足什么样的条件？到 B' 的距离等于 AB 的长度的所有的点 A' 组成什么图形呢？那怎么样的 A' 同时满足到 B' 的距离等于 AB 的长度，到 C' 的距离等于 AC 的长度这两个条件呢？接连的问题，旨在帮助学生梳理问题的关键所在，提升学生解决问题的能力。

通过教师的循循善诱，学生掌握了画图的方法。教师继续提问：画图的结果反映了什么规律？你能用文字语言和符号语言概括一下你所发现的规律吗？通过与学生的沟通交流，让学生体会数学命题的表示方法，学会“用数学的语言表达世界”。

尽管掌握了“边边边”的判定方法，但在破损的风筝上没有办法找到已知的三条边，因此，继续对问题进行深入研究：在已知三条边的基础上更改一个条件，现在我们已知两条边和一个角，能否判定三角形全等呢？教师给出问题：已知一个三角形的两边长分别为 10 cm 、 12 cm ，其中一个角为 45° ，请你画出这个三角形，并将已知的数据标注在上面。等同学们完成后教师继续下达指令：将你们的三角形裁剪下来，然后和你周围同学的三角形比对一下，大家都是一样的吗？

通过小组内以及小组间的比对，有同学反映不能重合，教师将两人的三角形同时放置在投影上，方

便同学们观察他们的区别(图 3、图 4)。

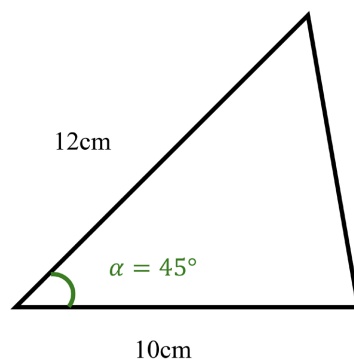


Figure 3. A triangle with known sides and corresponding angles

图 3. 已知两边及其夹角的三角形

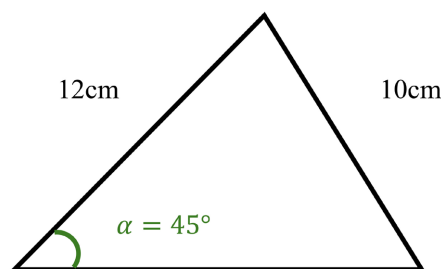


Figure 4. Known two sides and an angle (non-angle) triangle 1

图 4. 已知两边一角(非夹角)三角形 1

学生立即发现第一种情况 45° 的角正好是 10 cm、12 cm 的边所夹的角，第二个三角形 45° 的角是 10 cm 的边所对应的角。

教师继续布置任务：现在请所有已知角是已知边夹角的同學将自己的三角形相互比对一下，你们是一样的吗？已知角不是已知边夹角的同學也相互比对一下，你们是一样的吗？

接連的操作任务旨在启发学生用数学的思维思考世界，用推理、实践的方法分析解决问题，如果正确的判定方式直接由老师揭示出来，或是老师直接指出已知角位置的差异，学生则少了在活动过程中的思考，不利于思维品质的提升。在这个过程中，教师仍然只是充当课堂的引导者，真正的探究过程以及思考活动是同学们小组合作以及独自思考实现的，体现课堂中学生的主体地位，也让探究活动以及动手操作的活动在课堂中顺利生成(图 5、图 6)。

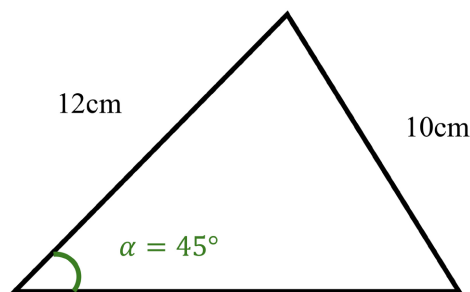


Figure 5. Known two sides and an angle (non-angle) triangle

图 5. 已知两边一角(非夹角)三角形 1

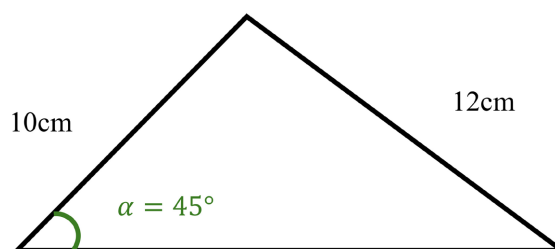


Figure 6. Known two sides and an angle (non-angle) triangle 2
图 6. 已知两边及一角(非夹角)三角形 2

经过比对, 同学们得出结论: 所有已知角是已知边夹角的同学的三角形可以完全重合, 但是已知角不是已知边夹角的同学们他们的三角形有两种不同情况。学生通过操作、讨论, 逐步挖掘, 找到新的判定方式。在整理总结的过程中, 教师根据学生思路, 启发学生思考如何体现出“已知角需要是夹角”这一要求, 锻炼学生数学表达的严谨性和准确性。同时, 自主归纳能够有效培养学生的抽象能力, 能用数学符号进行数学表达, 体现数学思维过程, 形成数学想象力, 发展其核心素养。

2.4. 巩固延伸, 能力生成

学以致用。教师趁热打铁, 再次抛出新问题: 那我们怎样画出和这个已知角相等的角呢? 学生刚开始碰到这个问题可能会出现短暂的不知所措, 教师要适当提点, 帮助学生找到解决问题的方向, 并展示同学们的绘图方案。

方案一: 射线 OA 和 OB 上任取两点 M 和 N , 作出一个 $\triangle OMN$, 根据之前所学的知识, 作出线段 OM' , 又作出 N' , 于是得到 $\triangle OM'N'$, 根据“边边边”的判定方法, 就可以得出这两个三角形全等, 于是 $\angle O = \angle O'$ 。

方案二: 首先以 O 点为圆心, 任意长为半径画弧, 会和射线 OA 、 OB 分别有两个交点, 取为点 C 和点 D , 接下来我们以 O' 点为圆心, OC 为半径画弧, 和射线 $O'A$ 交于点 C' 点, 下面我们以 C' 点为圆心, CD 长为半径画弧, 这两个弧就会有一个交点, 我们取为 D' , 最后, 过 D' 作射线 $O'D'$, 这样我们就画出一个 $\angle A'O'D'$, 这个角就是和已知角 $\angle AOD$ 相等的角。在提出方案二后, 教师引导学生思考: 这两个角为什么相等呢? 学生随即总结: 这种方法也是将一个角等于已知角转化成为了全等三角形加以解决的, 只不过这种方法更加简捷了。

通过探究绘制等角的问题, 一方面巩固了“边边边”的判定定理, 另一方面, 掌握绘制等角的方法后, 学生就能够利用“边角边”定理制作新的风筝, 完成课堂开始时提出的问题, 让学生知道学习数学知识最终是为了解决生活中的实际问题, 思维得到进一步升华。

3. 结语

“为何而教”是数学课堂教学的基本问题之一, 也是数学课堂探究活动的切入点。探究性教学强调学生的主动参与和动手实践, 通过实际操作和合作交流, 学生能够发现问题、解决问题, 从而培养创新思维 and 实践能力。这种能力在社会实践中同样重要, 能够帮助学生更好地适应复杂多变的社会环境。在《三角形全等的判定》课程中, 学生需要通过不断尝试、试错和反思来找到正确的判定条件。这种问题解决的过程在社会实践中同样适用, 能够帮助学生更好地应对各种挑战和困难。

在课堂中, 教师可以利用生活事件吸引学生主动参与, 整个探究的过程中, 主要通过动手操作来辅助探究, 在动手操作的过程中发现新知, 在实际操作中运用多种感官, 通过积极思维获取知识。教师引导学生通过画一画来判断一个条件、两个条件不能判定两个三角形全等, 给学生提供了充足的实践机会,

学生在逐步增加条件个数来探究两个三角形全等的条件。学生在探究的过程中化抽象为直观，在实践体验中掌握知识，建构对于数学知识的理解，发展思维能力，夯实学习基础。在教学过程中，要重视培养学生探究学习的兴趣，重视学生数学学习情感问题，学习兴趣是探究学习的动力，只有整个课堂教学的氛围是宽松、轻快的，教学效果才是立竿见影的。

参考文献

- [1] 周秀君. 数学课堂探究教学的内涵、特征及应用研究[J]. 教学与管理, 2007(21): 122-123.
- [2] 毛耀忠, 张锐. 新课改以来我国数学探究教学的回顾与反思[J]. 教学与管理, 2011(27): 97-99.
- [3] 教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [4] 范文贵. 数学探究学习内涵与策略研究[D]: [博士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2005.
- [5] 朱惠良. 数学情境创设的原则与策略的研究[J]. 数学教学通讯, 2023(20): 64-65+79.
- [6] 董林伟, 石树伟. 做数学: 学科育人方式的实践创新[J]. 数学通报, 2021, 60(4): 22-24+62.