

体悟建模过程优化数学课堂

——以“体重与脉搏”为例

王雪君, 戴阔斌

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2024年8月1日; 录用日期: 2024年12月19日; 发布日期: 2024年12月31日

摘要

数学建模活动是基于数学思维、运用数学模型解决现实问题的一类综合实践活动,也是高中数学课程的四条主线之一。如何根据课标中对数学建模过程的有效划分在课堂中实施完整的数学建模活动是当前数学建模教学的一个重要方向。文章以“体重与脉搏”的建模过程为例,展示从现实情境入手,经历问题目标提炼、问题呈现、模型建立与求解、模型检验、模型优化与评价的中学数学建模的完整环节。

关键词

数学建模, 高中数学, 体重与脉搏

Understanding the Modeling Process and Optimizing the Mathematics Classroom

—Taking the “Weight and Pulse” as an Example

Xuejun Wang, Kuobin Dai

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Aug. 1st, 2024; accepted: Dec. 19th, 2024; published: Dec. 31st, 2024

Abstract

Mathematical modeling activity theory is a kind of comprehensive practical activity based on mathematical thinking and using mathematical models to solve practical problems, which is also one of the four main lines of high school mathematics curriculum. How to effectively implement complete mathematical modeling activities in class according to the division of mathematical modeling process in the curriculum standard is an important direction of current mathematical modeling

文章引用: 王雪君, 戴阔斌. 体悟建模过程优化数学课堂[J]. 创新教育研究, 2024, 12(12): 561-568.

DOI: 10.12677/ces.2024.1212928

teaching. This paper takes the modeling process of “Weight and Pulse” as an example to show the complete link of middle school mathematical modeling, which starts from the real situation, goes through the problem objective extraction, problem presentation, model establishment and solution, model testing, model optimization and evaluation.

Keywords

Mathematical Modeling, High School Math, Weight and Pulse

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》聚焦数学学科六大核心素养, 作为其中之一数学建模则是对现实问题进行数学抽象、用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题的素养。此外, 《课标》还将数学建模活动与数学探究活动列为高中数学课程四条主线之一, 这一举措进一步突出了数学建模在高中数学课程中的重要地位。在应试教育体制的长期影响下, 部分教师在开展数学建模活动时更多地倾向于对学生数学知识及技能的培养, 忽视了学生数学思维发展以及现实问题解决能力的提升, 这样的数学建模活动不仅偏离了数学建模活动的本心, 又在一定程度上加重了学生的学习负担。数学建模作为连接课堂与现实、数学与应用的纽带, 教师应该以何种方式开展数学建模教学、又如何通过数学建模活动培养学生的核心素养成为当前亟待解决的问题。笔者以《课标》案例 28 “体重与脉搏” 为例展开对数学建模教学活动的一次尝试。

2. 数学建模教学研究现状

2.1. 国外研究现状

20 世纪 70 年代以来, 世界各国开始在教材中增加数学建模相关内容, 在日常教学中开展数学建模活动以不断加强学生对实际问题的解决能力和数学应用能力。1975 年, 美国数学教育改革委员会在《K-12 级中学数学的纵评与分析》中明确指出把数学建模加入中学数学课程中并将其列为教育改革的重心, 并在此后通过开展各类数学建模竞赛的形式不断加强师生对数学建模的重视[1]。1990 年, 俄罗斯开始使用将数学建模作为重要组成部分的新版数学教科书, 进一步突出数学建模在数学教学中的重要地位和作用。1994 年, 日本在《中小学课程改革方案》中突出强调培养学生问题解决能力, 提出结合现实生活问题开展综合性数学活动以体现数学的应用价值[2]。2003 年, 德国首次将数学建模能力作为评价高中生数学能力的维度之一列入课程标准, 并对数学建模水平作了详细的划分[3]。2010 年, 瑞典在数学教学中强调教师要注重培养学生发现现实问题和数学问题之间关联性的能力, 并以数学建模能力和模型求解能力作为数学教育的主要目的之一[4]。可以看出国际上对于发展学生的实际问题解决能力和数学应用能力极为关注, 在数学课程、教科书、课程标准等多方面不断强调数学建模教学的重要作用, 并在数学建模教学领域也取得了一定的实践经验。

2.2. 国内研究现状

近年来, 国内诸多学者尝试从不同角度对中学数学建模进行研究。

李明振、喻平指出在高中数学建模教学实施过程中的三个问题: 教学设计存在弊端、师资能力有限、学生对数学建模的学习困难, 并提出了对应的策略。李大潜指出数学建模的教育是数学与工业间最重要的教育界面, 要对目前的数学课程体系和教学内容进行改变[5]。徐斌艳对中国和德国学生数学建模水平做了比较研究, 对建模水平、年级差异、性别差异、数学建模水平发展几个角度做出了比较分析[6]。冯永明、张启凡将数学建模教学分为三个阶段: 简单建模、典型案例建模和综合建模, 并提出了中学数学建模的教学途径及建议[7]。郑叶群提出将高中数学建模素养渗透到课堂教学中的措施, 将数学建模教学融入到教学的各个环节中, 重视相关学科之间的联系, 以此提升高中生的数学建模素养[8]。综合以上诸多学者对于高中数学建模教学的研究, 多为培养数学建模核心素养、在数学教学的各个环节融入数学建模思想、探讨数学建模教学目标等。但针对数学建模内容的教学研究较少, 关于教师如何从实际问题出发直至模型评价环节的数学建模教学策略的研究较少。

2.3. 数学建模过程

联系现实世界与数学世界以构建解决实际问题的模型并最终解决实际问题的过程即为数学建模过程。高中数学建模框架的确立历经了三个阶段: 阶段一: 1902 到 2002 教学大纲中依据 PISA 测试将数学建模全过程确定为四阶段循环框架; 阶段二: 2003 年版高中数学课标则采用了国外学者 Blum 提出的五阶段循环模型; 阶段三: 17 版新课标将 Blum 对其五阶段模型的修改完善后提出的七步骤模型作为高中数学建模的流程框架, 如图 1。在实际的建模活动中, 其各个步骤并不是缺一不可, 在进行高中数学建模活动教学时也不一定完全遵循课标要求的七阶段循环框架, 可根据实际问题对局部阶段进行调整。本研究将以七阶段循环模型为依据, 从现实情境问题入手探寻设计高中数学建模教学的设计思路及方法。

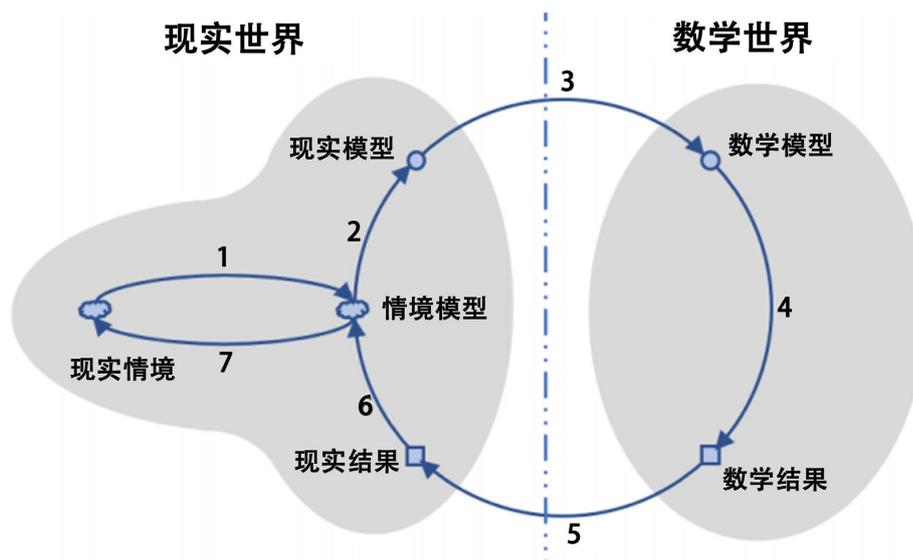


Figure 1. The idea of high school mathematical modeling teaching design
图 1. 高中数学建模教学的设计思路图

3. 教学环节

3.1. 呈现现实情境

为联系学生的现实生活经验, 引导学生用数学的眼光找到合适的研究对象, 可选用以下方式引入本案例的现实情境: 播放一则关于野生动物营救的视频, 为了保证营救活动顺利开展, 动物需在麻醉状态

下接受治疗, 麻醉剂在注射过程中需要通过监测与动物被麻醉前(即静息状态下)的脉搏率以控制其用量。但是由于野生动物的攻击性, 麻醉前的脉搏率难以实施测量, 因此野生动物营救医疗队陷入了困境。

从现实情境中抽象出要解决的具体问题是: 根据现实背景, 寻求能够反映动物脉搏的量, 建立其与脉搏关系的模型, 并根据模型结果为动物营救活动提出建议。

3.2. 提炼相关目标

首先对情境中的核心概念进行界定, 脉搏率是单位时间内心跳的次数, 即单位时间内流过心脏的血流量与心脏每跳动一次挤压出来的血量的比值。事实上, 在现实生活中, 血流量与心脏每次收缩挤压出来的血量都不易测量与获得, 因此需要寻找一个常见且容易测量的身体指标, 用它来刻画动物的脉搏率。结合学生提倡生活经验及生物学背景知识, 容易总结出人类的脉搏率与其年龄、运动、情绪、体重等都存在着一定的关系, 不难发现动物群体的脉搏率也受这些因素影响。由于野生动物营救活动所需为动物在静息状态下的脉搏, 因此运动、情绪均为无关因素, 年龄与体重两个因素中, 后者更易测量获得, 故在此情境下, 选择研究体重与脉搏的关系, 并构建二者关系的数学模型以求得动物在静息状态下的脉搏, 为营救活动顺利开展提供模型依据。

3.3. 数学化

(1) 问题呈现

生物学家认为, 睡眠中的恒温动物依然会消耗体内能量, 主要是为了保持体温。研究表明, 消耗的能量 E 与通过心脏的血流量 Q 成正比; 并且根据生物学常识知道, 动物的体重与体积成正比。请利用表 1 中给出的体重与脉搏相关数据解决以下问题:

Table 1. Animal weight and pulse data

表 1. 动物体重与脉搏数据表

动物名	体重/g	脉搏率/(心跳次数/min)
鼠	25	670
大鼠	200	420
豚鼠	300	300
兔	2000	205
小狗	5000	120
大狗	30,000	85
羊	50,000	70
马	450,000	38

① 根据生物学常识, 给出血流量 Q 与体重 W 关系的数学模型;

② 从表 1 可以看到, 体重越轻的动物脉搏率越高。请根据上表提供的数据寻求数量之间的比例关系, 建立脉搏率 f 与体重 W 关系的数学模型;

③ 根据表 1, 作出动物体重和脉搏率的散点图, 验证建立的数学模型。

(2) 问题分析

为了建立体重与脉搏的关系模型, 需要识别该过程中相关因素并进行自变量、因变量和参数的划分, 脉搏显然是因变量, 影响它的因素主要包括动物体重、单位时间内流过心脏的血流量、心脏每跳动一次

挤压出来的血量 q 、心脏大小等因素。

根据生物学常识, 心脏每跳动一次挤压出来的血量 q 与心脏大小成正比, 动物体重 W 与其心脏大小均成正比。另外, 由问题的提出可以看到, 对于恒温动物, 其热量主要通过体表散发, 因此散热量与其体表面积近似成正比。由于动物的体表面积难以测量, 因此在此建模过程中需要将睡眠中的动物假设为一个便于计算其体积与表面积的规则几何体。

(3) 符号说明(表 2)

Table 2. Symbol explanation table
表 2. 符号说明表

符号	定义
W	体重
V	体积
S	身体表面积
f	脉搏率
Q	每分钟血流量
q	心脏跳动一次出血量
E	消耗的能量

(4) 模型假设

- ① 假设恒温动物均处于睡眠状态, 且身体所获得的能量都转化为热量, 全部用来维持体温;
- ② 假设外部环境维持在稳定状态, 即不会出现使动物体温出现明显变化的外部温度波动;
- ③ 假设动物心脏体积与自身体积成正比;
- ④ 假设动物的体重与其体积成正比, 即密度均匀。

3.4. 模型建立与求解

为了找到动物体重、体积与体表面积之间的关系, 我们不妨将睡眠中的动物近似看作一个球体, 引入半径 R , 借助数学公式来描述和推导。则:

$$V = k_1 W$$

$$S = k_2 R^2$$

$$V = k_3 R^3$$

所以:

$$S = \left(\frac{k_2^3}{k_3^2} \right)^{\frac{2}{3}} V^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{令 } k_4 = \left(\frac{k_2^3}{k_3^2} \right)^{\frac{2}{3}}, \text{ 所以 } S = k_4 V^{\frac{2}{3}}.$$

同理:

$$S = k_5 W^{\frac{2}{3}}$$

又由生物学知识假设能量全部转化为热量, 热量又全部通过动物体表面积散发, 则有:

$$E = k_6 Q$$

$$E = k_7 S$$

所以:

$$Q = \frac{k_7}{k_6} S$$

$$\text{令 } k_8 = \frac{k_7}{k_6}, \text{ 所以 } Q = k_8 S$$

最终得到体重 W 与每分钟心脏血流量 Q 的关系:

$$Q = kW^{\frac{2}{3}}$$

其中, $k_i (i=1,2,3,4\dots)$ 均为比例系数。

对于问题二的解决, 则是在问题一的基础上, 继续寻求每分钟心脏血流量 Q 与脉搏率的比例关系。由生物学假设可以知道, 动物心脏大小与其体积成正比, 同时, 动物体积大小与其体重成正比。因此, 不难看出每分钟心脏血流量 Q 与体重 W 存在比例关系, 即:

$$q = mW, (m \text{ 为比例系数})$$

由此可以推出:

$$f = \frac{Q}{q} = kW^{-\frac{1}{3}}$$

关于模型中 k 的取值如何确定, 可以让学生先尝试将表 1 中的数据代入求得, 会发现对于不同种类的动物而言, 其系数 k 取值不同。该过程可以启发学生发现由系数 k 未知带来的问题, 引导学生发现该模型仍需完善, 从而进一步用数据去完善之前的数学模型。系数 k 的确定方法并不唯一, 需要信息技术来解决, 经由 MATLAB 软件拟合, 我们可以得到模型:

$$f = 2076.78 \cdot W^{-\frac{1}{3}}$$

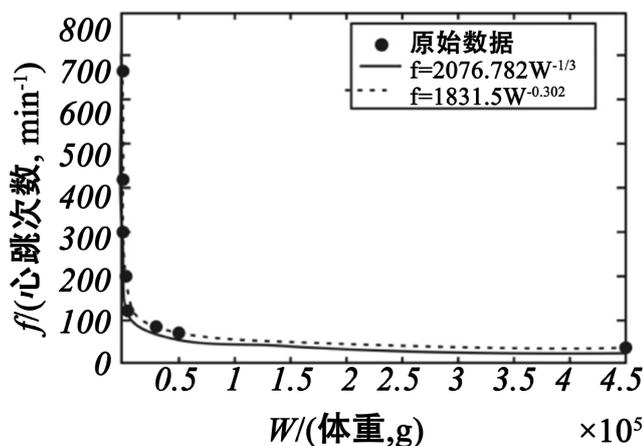


Figure 2. Fitting chart of weight and pulse
图 2. 体重与脉搏拟合图

在数据拟合过程中, 不妨再对表 1 给出的数据单独进行拟合以得到模型结果(虚线表示)与考虑了生物学背景的模型结果(实线表示)进行对比, 总结二者之间的区别及成因(图 2)。

3.5. 模型检验

模型建立后, 检验是数学建模过程中非常重要且必不可少的环节。若检验后误差在允许范围内, 说明模型是合理的, 可以推广应用; 若误差较大, 则需要对模型进行优化或重新构建。检验所求数学模型是否合理的方法并不唯一, 可选取表 1 中给出的数据代入检验, 也可借助散点图对比其在模型函数图像附近的情况进行直观判断, 还可以代入学生自身体重与脉搏率的数据进行检验。

3.6. 模型优化

在平面直角坐标系中描绘散点图的过程中发现由于动物之间体重差异过大, 在坐标系内难以较为准确地呈现其点地位置, 且横轴与纵轴的单位长度不一致, 描绘出的各点分布极不均匀, 在一定程度上阻碍了模型的应用。

我们可以通过对数据进行转换, 使两个变量间的关系能够在坐标系中更直观地体现出来。由于数据都是正数, 很容易想到把数据同时取对数达到解决其在 y 轴附近分布不均匀、变化太快的问题。运用对数运算转换数据, 即对 $f = kW^{-\frac{1}{3}}$ 两边取自然对数, 得到 $\ln f = \ln k + \left(-\frac{1}{3}\right) \ln W$, 最终使得数据的分布近似于线性分布, 如图 3。经此处理, 形成了对数线性模型, 使得数据的呈现更加直观, 从而增强了数据分析的科学性, 也对数学建模的过程进行了一次优化。

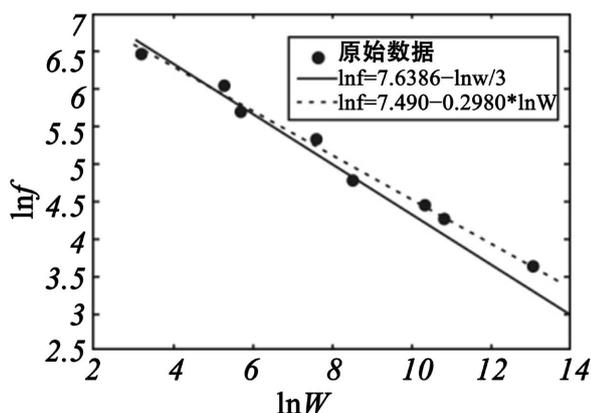


Figure 3. Linear distribution chart of weight and pulse
图 3. 体重与脉搏线性分布图

3.7. 模型评价

(1) 模型的优点

在模型建立过程中, 将休眠中的动物近似看作一个球体, 借助已经掌握的数学公式建立数学模型, 一定程度上简化了问题。在数据处理过程中通过两边取对数的方法转化数据, 使得数据计算结果的呈现更为直观。

(2) 模型的缺点

由于问题中的数据有限, 且仅考虑动物体重这一变量, 未考虑其他可能相关的影响因素, 以及某些动物的体重与脉搏数据会存在特殊情况等等, 都会降低该模型求解结果的准确性。

(3) 模型的推广

在最后环节中可以回归现实情境中的问题,即医疗队对野生动物静息状态下脉搏的估算。除此之外,可以借助该模型来解释生活中的一些现象,如新生儿的脉搏比成人脉搏快等等。在大数据的支持下优化模型并结合现代医疗问题,通过控制体重来预防心脏病,降低心脏病的发病率。

通过这一过程可以让学生理解数学建模活动至此并不是以句号结尾,而是仍留有问号,随着知识背景的发展与完善,仍然可以推进该模型不断向前发展与完善。

4. 总结

笔者为了让教师在数学建模活动教学过程中使学生循序渐进地体会数学建模各个环节的核心内容,一改传统的从问题解读、问题分析等开始的数学建模方式,而是从现实情境、现实问题入手,先引发学生的思考与关注,让学生概括问题;再结合学生的生物学背景知识给出相应的案例与数据,依据已有的数学知识(如一次函数、反比例函数、比例关系等)让学生经历构建体重与脉搏关系模型的过程;在模型求解的基础上检验其存在的问题结合“数据转换”思路进行模型优化,体会该模型在现实问题中的作用并对其作出评价。

本次数学建模过程的部分环节仍需学生进一步思考,如建立数学模型与优化数学模型的方式并不唯一,学生查阅资料后不难发现还有线性回归方程、大数据分析、MATLAB 拟合、EXCEL 分析等多种方法。这一思考与查阅过程有利于培养学生挖掘数学方法、查阅文献资料、探究学科融合等多方面的能力,这对学生思维与能力的拓展都起着不可忽视的促进作用。

参考文献

- [1] 顾予恒, 何波祿. 高中数学建模方法的选择——以“身高与体重”为例[J]. 数学通报, 2021, 60(8): 52-55.
- [2] 黄丽纯, 杨坦. 高中数学建模教学中的模型反思策略——以“停车距离问题”为例[J]. 数学通报, 2023, 62(2): 47-52+56.
- [3] 姜明睿. 基于数学新课标的中学数学建模教学改革创新实践研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2023.
- [4] 周颖. 从知识到生活的高中数学建模实践研究[J]. 数学教学通讯, 2023(18): 52-55.
- [5] 李大潜. 数学建模的教育是数学与工业间最重要的教育界面[J]. 数学建模及其应用, 2012, 1(1): 38-41.
- [6] 徐斌艳, Matthias Ludwig. 中德学生数学建模能力水平的比较分析——以中国上海和德国巴登符腾堡州学生为例[J]. 上海教育科研, 2008(8): 66-69.
- [7] 冯永明, 张启凡. 对“中学数学建模教学”的探讨[J]. 数学教育学报, 2000(2): 84-88.
- [8] 郑叶群. 如何把高中数学建模核心素养渗透于课堂教学[J]. 教育现代化, 2019, 6(23): 253-254.