Creative Education Studies 创新教育研究, 2024, 12(12), 579-587
Published Online December 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2024.1212930

支架式教学模式下基于数学建模素养培养的高中数学教学设计

——以“解三角形的应用”为例

尹　杰，索雨欣，何方国

黄冈师范学院数学与统计学院，湖北 黄冈

收稿日期：2024年8月7日；录用日期：2024年12月20日；发布日期：2024年12月31日

摘　要

支架式教学模式为学习者提供框架，将复杂问题逐步简单化，同时培养学生在学习中的自主性，以达到知识建构的目的。数学学习与应用在数学学科核心素养中的地位逐渐加重，数学建模作为其中之一，搭建了理论与实践的桥梁。本文以数学建模思想为基础，结合支架式教学，以解三角形的应用教学为例，探讨和研究建构主义学习理论下的支架式教学设计。

关键词

支架式教学模式，数学建模，教学设计

The Teaching Design of High School Mathematics Based on the Cultivation of Mathematical Modeling Literacy in the Scaffolded Teaching Mode

—Taking “Application of Triangle Solution” as an Example

Jie Yin, Yuxing Suo, Fangguo He

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Aug. 7th, 2024; accepted: Dec. 20th, 2024; published: Dec. 31st, 2024

文章引用: 尹杰, 索雨欣, 何方国. 支架式教学模式下基于数学建模素养培养的高中数学教学设计[J]. 创新教育研究, 2024, 12(12): 579-587. DOI: 10.12677/ces.2024.1212930

Abstract

The scaffolded teaching model provides learners with a framework to gradually simplify complex problems, and at the same time cultivates students' autonomy in learning, so as to achieve the purpose of knowledge construction. The learning and application of mathematics play an increasingly important role in the core literacy of mathematics, and mathematical modeling, as one of them, builds a bridge between theory and practice. Based on the idea of mathematical modeling, combined with scaffolded teaching, this paper takes the applied teaching of solving triangles as an example to discuss and study the scaffolded teaching design under the constructivist learning theory.

Keywords

Scaffolded Teaching Mode, Mathematical Modeling, Instructional Design

1. 引言

支架式教学认为，教学应围绕和结合当前学习主题以便更好地促进学习者对知识意义的建构，在支架式教学模式下，按照维果斯基的最近发展区要求，为学生提供框架，有助于将复杂的模式逐步分解，培养学生在学习过程中的独立性，将复杂的实际问题转化为数学模型的能力，看到问题本质，以此达到知识建构的目的。《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订》将数学建模过程主要分为：从实际情境中发现问题、提出问题，分析问题、建立模型，确定参数、计算求解，检验结果、改进模型，最终解决实际问题[1]。数学建模对学生综合能力的培养有着重要的意义和价值，在数学建模教学中应潜移默化将数学建模的思想理念贯穿到教学的实际过程当中[2]。学生在处理模型类探究活动时往往不知道如何下手，因此教师可以根据学生当前的认知发展水平与数学建模能力为学生搭建支架，在这个过程中学生逐渐积累经验，学会感悟数学与现实问题之间的关联，逐渐达到自我建构的目的，发展其数学建模核心素养。

本文选取高中数学教材必修二“解三角形的应用”内容，选取数学问题结合实际背景的题目，在新学习这快知识过程中，高二学生经常被其表面现象所迷惑，不敢对其下手，此外仅仅呈现求解过程的教学无法建立学生已有知识与生活经验的框架，因此本文基于数学建模核心素养，并且结合支架式教学理论，对高中数学“解三角形的应用”内容进行教学设计，希冀培养高中生数学建模核心素养。

2. 支架式教学的理论基础

支架式教学来源于维果斯基的“最近发展区”思想。支架式教学认为，为了让学习者更好地建构知识，教学在围绕当前学习的主题并整合学习资源同时，还提供了概念框架，而不是具体内容，更像一个概念的框架，为学习者的学习提供有力支撑。支架式教学环节主要包括搭建脚手架、进入情境、独立探索、协作学习以及效果评价。在支架式教学过程中，教师的作用是帮助学生独立思考，根据学生当前所处的情况，可以通过例子、图标等方式，学生掌握学习的主动权，形成自己的认知结构，在脑海形成具体的知识体系，达到知识建构的目的。支架式教学主要具有下面三方面的理论基础。

2.1. 建构主义理论

建构主义学习理论是一种关于知识和学习的理论，其具有迥异于的传统学习理论和教学思想。建构主义学习观认为学习并不是教师直接把知识传授给学生，学生被动接受。学习是要学生进行自我加工并获取理解的过程。建构主义学生观认为学生不是空着脑袋走进教室的，在日常生活中学生会积累一些经验，会依据自身的经验形成某种解释，因此教学不能忽略学生的已有认知经验，而应该以旧促新。建构主义知识观认为知识不是绝对的，它是对客观世界的一种解释和假设，并不是一成不变的，会随着人们对知识的认识而变得更加深刻。

为了弄清接受学习与发现学习的联系与区别，建构主义者借助脚手架形象地提出了支架式教学这一教学模式[3]，支架式教学基于建构主义，建构者为学生的学习先搭建框架，然后逐渐撤去框架，逐渐培养学生独立思考习惯，达到自我建构的目的。

2.2. 认知发展理论

皮亚杰认为把建构的过程大致分为图式、同化、顺应及平衡四个方面。同化实质学习者在已有的认知结构基础上吸收外界环境中的相关信息，把外界刺激整合到自身原有认知结构内的过程。顺应是指当外界环境发生变化时，原有的认知结构无法同化新信息，而引起的原有认知结构发生重组和改造的过程。具体概括为，新知识与原有知识产生冲突后，学生在原有图示上进行同化，顺应后，将新知识融入自身认知结构，达到平衡[4]。学习是自我建构，并在此过程下不断丰富、提高、完善的过程。认知发展理论与支架式教学都强调了学习过程中的主动性和建构性，即学习是学习者通过与环境的互动，不断重构其认知结构的过程。

2.3. 最近发展区

维果斯基最近发展区指的是学生实际、潜在发展水平之间的差距，前者是独立解决问题，后者是指有同伴合作时解决问题。支架式教学模式便是要在二者之间过渡，根据学生已有的认知水平搭建支架，在教师的引导下逐渐可以依靠自身达到更高水平，于是原有的潜在发展水平会变成原有发展水平，形成新的最近发展区。

3. 支架式教学在对“解三角形的应用”教学中的教学设计

3.1. 教材分析

本节课是高二数学课时，选自人教 A 版必修第二册第六章《平面向量及其应用》，学习完向量的知识后利用向量解决一些实际问题，主要学习利用正弦定理、余弦定理来求建筑物高度、底部不可达之间距离等问题，是对初中直角三角形、全等三角形、相似三角形的进一步深化，通过正弦定理、余弦定理的学习应用培养学高中生的数学建模核心素养，高二学生在首次学习时往往不知所措，因此把其将解决距离、高度、角度问题相结合，让学生在具体情境中感受数学模型，体会数学的思想。

3.2. 学生学情分析

在上节课的教学中，通过向量的方法，学生已经掌握了正弦定理与余弦定理，并且可以用数学符号表示问题，初步解决了一些简单的问题。此外高中生已熟悉初中平面几何的基本定理和性质，并且理解掌握代数运算的基本技能，与日常生活挂钩的如楼房高度、航海距离、建筑高度等可以引发学生的兴趣，以此培养学生的数学转化思想以及建模意识。

3.3. 教学目标与重难点

1) 能够运用正弦定理与余弦定理解决一些有关距离测量的问题。

2) 激发学生学习的兴趣，培养学生运用图形、数学符号的表达意识以及数学转换思维。

教学重点：能够在实际问题中抽象出一个或多个三角形，并且一一求解，找到实际问题的解。

教学难点：根据题意建立数学模型并且求解。

3.4. 教学过程设计

解三角函数的应用考查的题目通常是综合类型的题目，要结合正弦定理、余弦定理等内容。初学的高中生大多可以很熟练的记住正弦定理与余弦定理公式，但若是综合考查便成为一大难点，学生提取有效信息较为困难，无法通过转化建立数学模型，建立完模型后在处理问题时，往往手脚打架，无法根据已知条件建立变量与定量之间的关系，导致无法将题目解出。支架式教学利用在解三角函数的应用教学中，通过搭建手脚支架逐步帮学生把复杂题目分解，在这个过程中逐步找到正确求解方式，让学生看到此类数学问题的本质，学会用数学模型解决实际问题，积累实际经验。建立解三角形应用的支架模型如图 1，并且以具体例子为例，探索其在教学中的应用。

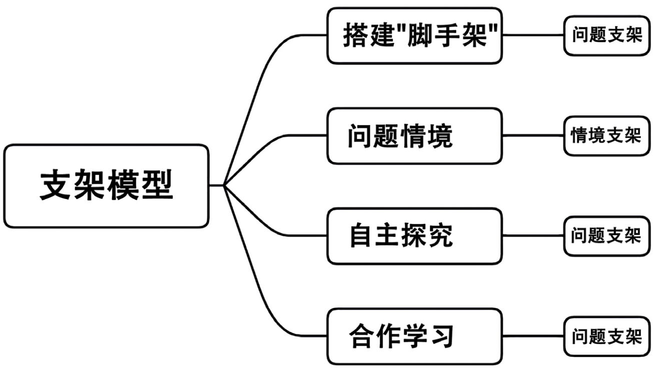

Figure 1. Bracket model for the Resolve Triangle Application
图 1. “解三角形应用”的支架模型

师：同学们，学校门口有一条河流，我想知道河两边路灯的距离，我该如何去测量呢?

生：可以去河对岸拉一条绳子。

师：那如果规定不能去河对岸就在河的一侧又该如何测量呢？同学们思考一下

师：现在老师又想在河的一侧测量另一侧的两棵树之间的距离要如何测量呢？我们来看一下下面两道例题。

例题：如图 2，A、B 分布在河的两岸，要测量 A 与 B 之间的距离，已知在 A 点同侧选取 C 点并且测得 AC 之间的距离，并测量出 $\angle A$ 与 $\angle C$ 的大小，求 AB 之间的距离。

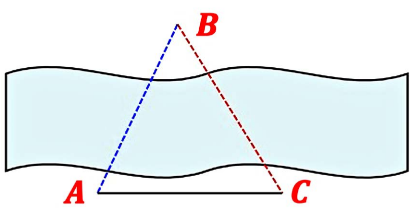

Figure 2. Unreachable model
图 2. 不可到达型

如图 3，A 与 B 两点在河对岸，选定两点 DC，测得 $CD = a$，$\angle BCA = \alpha$，$\angle ACD = \beta$，$\angle CDB = \gamma$，$\angle ADB = \delta$，求 AB 之间的距离。

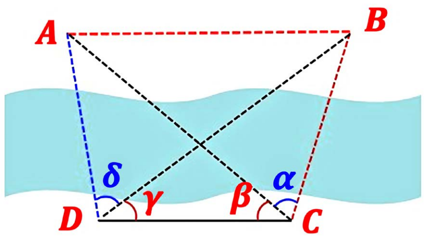

Figure 3. Reachable model
图 3. 可到达型

3.4.1. 搭建“脚手架”

问题支架 1：上节课已经学习正弦、余弦定理，回顾我们如何证明这两个定理的？回顾我们用它解决了什么问题？

问题支架 2：初中知识中是否有解决距离的问题，在初中阶段又是如何解决此类问题的呢？

问题支架 3：对于更一般的，没有特殊角的距离问题又该如何解决呢？可以与上节课学习的正弦定理余弦定理建立联系吗？

评析：通过回顾上节课学习的正弦定理与余弦定理，以及联系初中解决距离的问题的方法，让学生经历从一般到特殊的过程，在学生前置学习的基础上，教师通过支架问题帮助学生构建知识之间的框架，从初中的特殊性到高中的一般性，有助于后面问题的引入，更有助于理解。

3.4.2. 问题情境

情境支架 1：例 1 是求可到达点与不可到达点之间距离的情境，除了测量河两岸的距离还有例如测量楼高等情境。

情境支架 2：例 2 是求两个不可到达点之间距离的情境，同学们思考一下生活中还有哪些问题是两点之间不可到达的，又需要测量的。

评析：这两道题构建的数学与实际生活的联系，通过搭建情境支架有助于学生对此类型题目深入了解，主动建构类似数学模型，让学生感受数学和现实生活的联系，感受数学在现实生活的意义，培养高中生分析问题解决问题的能力，提高学生数学建模的能力。

3.4.3. 自主探究

问题支架 3：如何将题目给的条件转化为数学模型？如何用数学语言表达已知条件？

问题支架 4：上节课学习的正弦定理和余弦定理建立了三角形边和角之间的关系，测量距离涉及边和角的问题，能否也用正弦定理解决呢？是否可以用其建立数学模型呢？

问题支架 5：已知条件只给了一条边的长度，但是根据角度结合正弦定理可以求出其他边的长度，那么如何建立未知边和已知边角或求出的边之间的模型呢？是否可以考虑先用正弦定理再用余弦定理呢？这题和上一题之间有什么关系？

评析：教师根据给定的情境设计支架，根据题目中的信息基于学生一定的提示，层层递进，引导建立适用的数学模型，发展学生的最近发展区，这种支架就有助于学生数学建模能力的培养。

3.4.4. 合作学习

将题目转换为数学语言：1) 在三角形 ABC 中，已知$\angle A$ 与$\angle C$ 以及 AC，求 AB 之间的距离。

由正弦定理可知：在三角形 ABC 中，$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$，而 $\angle A+\angle B+\angle C=\pi$，因此 $\frac{AC}{\sin\left[\pi-\left(A+C\right)\right]}=\frac{AB}{\sin C}$。

2) 已知 $CD=a$，$\angle BCA=\alpha$，$\angle ACD=\beta$，$\angle CDB=\gamma$，$\angle ADB=\delta$，求 AB 之间的距离。建立数学模型。

由正弦定理可知：$\frac{AC}{\sin\left[\pi-\left(A+C\right)\right]}=\frac{AB}{\sin C}$，所以 $AB=\frac{AC\sin C}{\sin B}$。

由正弦定理：在 ΔADC 中，$AC=\frac{a\sin\left(\gamma+\delta\right)}{\sin\left[\pi-\left(\beta+\gamma+\delta\right)\right]}=\frac{a\sin\left(\gamma+\delta\right)}{\sin\left(\beta+\gamma+\delta\right)}$。

在 ΔBDC 中，$BC=\frac{a\sin\gamma}{\sin\left[\pi-\left(\alpha+\beta+\gamma\right)\right]}=\frac{a\sin\gamma}{\sin\left(\alpha+\beta+\gamma\right)}$。

在 ΔABC 中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\alpha}$。

完成题目后，教师引导学生讨论交流，如何测量角度，可以以身边的例子为例，根据测量的角度，以及相应的边长求建筑物的高度。即将具体问题抽象成数学问题，然后建立数学模型，根据缺少的条件，得到要测量的数据，然后建立关系得出答案。

评析：通过以上两个情境支架和三个问题支架的学习，学生从初中过渡到高中，其实际发展水平发展到新认知水平即最近发展区，教师可以有根据地引导学生对所建构的支架进行思考，归纳出解决问题的方法，构建知识框架，以达到知识建构的目的。

3.4.5. 效果评价

例 1 如图 4，AB 是底部不可达的高山，A 为山顶，B 为山底，设计一种测量 AB 高度的方法。

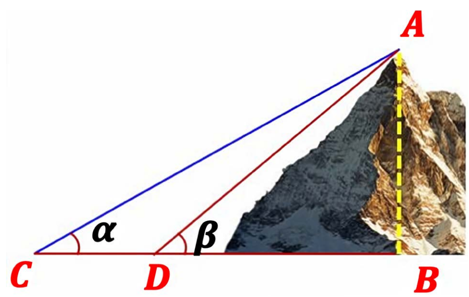

Figure 4. The bottom is not reachable to the model
图 4. 底部不可到达型

解：选择一条水平线 CD，使 C、D、B 在同一直线，在 C 点和 D 点用测角仪器测得 CD 点的仰角为 α，D 点的仰角为 β，那么根据正弦定理可得：$\frac{CD}{\sin\left(\beta-\alpha\right)}=\frac{AC}{\sin\left(\pi-\beta\right)}=\frac{AC}{\sin\beta}$。

因此 $AC=\frac{CD\sin\beta}{\sin\left(\beta-\alpha\right)},\sin\alpha=\frac{AB}{AC},AB=AC\sin\alpha=\frac{CD\sin\alpha\sin\beta}{\sin\left(\beta-\alpha\right)}$。

例 2 如图 5，AB 是底部不可达的亭子高度，它在山顶上，A 为亭子顶部，B 为亭子底部即山顶部，如何设计一种测量亭子 AB 高度的方法。

解：在两侧选取点 C 与点 D，测得 CD，在 C 点测得点 B 仰角 α 与点 A 仰角 γ，在点 D 测得 B 点仰角 β，根据正弦定理可得：

在 ΔBCD 中，$\dfrac{CD}{\sin\left[\pi-(\alpha+\beta)\right]}=\dfrac{BC}{\sin\beta}, BC=\dfrac{CD\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$，

在 ΔABC 中，$\dfrac{AB}{\sin(\gamma-\alpha)}=\dfrac{BC}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\gamma\right)}, AB=\dfrac{BC\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma}=\dfrac{CD\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\sin(\alpha+\beta)}$。

教师让学生思考关于距离测量问题后引导学生思考两类问题：底部不可达三点不可共线与底部不可达三点共线的建筑物高度问题，学生在解决问题的过程中，巩固三角函数正弦定理知识，下面以一道实际问题结合支架式教学框架为例，在解决问题的过程中教师逐步搭建框架，在解决问题的同时发展学生的数学建模能力。

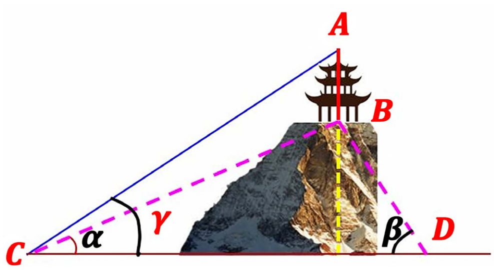

Figure 5. The top is not reachable to the model
图 5. 顶部不可到达型

例 3 索菲亚教堂是重点文物保护单位，其主体建筑集球、圆柱、棱柱于一体，为了估算其高度，在正东方向找到一座建筑物 AB，高为 $15\left(\sqrt{3}-1\right)$ 米，在它们之间的地面上的点 M (B、M、D 三点共线)处测得楼顶 A、教堂顶 C 的仰角分别是 15°和 60°，在楼顶 A 处测得塔顶 C 的仰角为 30°，则小明估算索菲亚教堂的高度为多少米？(图 6)

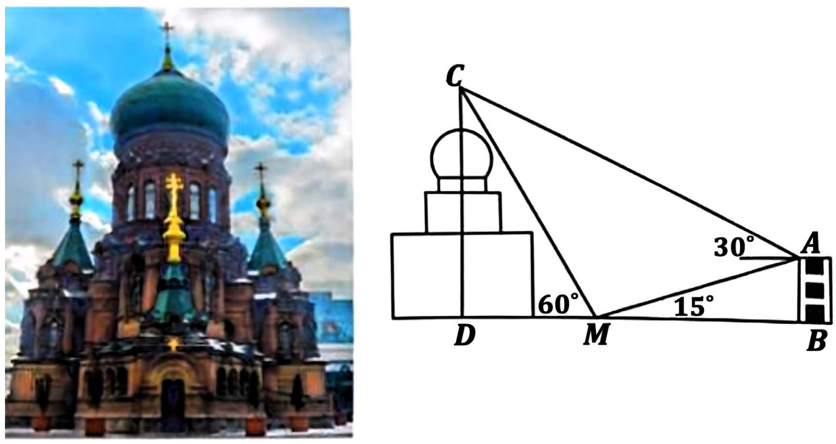

Figure 6. Diagram of the Church of Sophia
图 6. 索菲亚教堂图

问题支架 1：上节课已经学习正弦、余弦定理，回顾我们如何证明这两个定理的？回顾我们用它解决了什么问题？

问题支架 2：在初中解决一些距离问题通过简单的三角函数，那时候都是在直角三角形的背景下。那么对于一般的非直角三角形的又该如何去求解呢？能否运用才学的正余弦定理来解决？

情境支架 1：本题是关于可达点与不可达点距离的问题，要求建筑物的高度问题。

情境支架 2：如何利用已知的直线和角度建立合适的模型，通过已知来求解未知呢？

问题支架 3：将题目用数学的语言表达，建立数学模型然后求解，便是已知 $AB=15\left(\sqrt{3}-1\right)$，$\angle CMD=60^{\circ}$，$\angle AMB=15^{\circ}$，$\angle CAM=45^{\circ}$，求 CD。

问题支架 4：如何利用正余弦定理将所给的条件建立关系？即建立各个边之间的关系。从各个三角形作为切入点。

问题支架 5：要求 CD，已知三角形 CDM 为特殊直角三角形便是求解 CM，又已知直角三角形 ABM 和 AB 边便可知道 AM 的长度，最后在三角形 CMA 中便可建立正弦定理模型。

根据建立的支架一步步得出本题的解答：

由题意知：$\angle CAM=45^{\circ}$，$\angle AMC=105^{\circ}$，所以 $\angle ACM=30^{\circ}$，

在 $Rt\Delta AMB$ 中，$AM=\dfrac{AM}{\sin\angle ABM}=\dfrac{AB}{\sin 15^{\circ}}$。

在 ΔACM 中，由正弦定理得 $\dfrac{AM}{\sin 30^{\circ}}=\dfrac{CM}{\sin 45^{\circ}}$，所以 $CM=\dfrac{AM\sin 45^{\circ}}{\sin 30^{\circ}}=\dfrac{AB\sin 45^{\circ}}{\sin 15^{\circ}\sin 30^{\circ}}$。

在 $Rt\Delta DCM$ 中，$CD=CM\sin 60^{\circ}=\dfrac{AB\sin 45^{\circ}\sin 60^{\circ}}{\sin 15^{\circ}\sin 30^{\circ}}=\dfrac{\left(15\sqrt{3}-15\right)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{1}{2}}=30\sqrt{3}$。

本节“解三角形的应用”以学生对三角形的元认知为基础，根据学生认知发展进行教学研究，回顾正余弦定理的知识以及初中阶段关于距离问题的测量后搭建脚手架，接着引导学生用数学的语言呈现问题，建立合适的数学模型。在合作学习与效果评价这两个环节，教师引导学生建立数学模型，利用正弦定理，建立关系，接着让学生分析如何测量现实长度问题，然后结合具体问题，突破难点，在这个过程中建立了问题支架和情境支架，并且数学模型的难度也逐渐增加，支架具有引导作用，有利于促进学生数学建模能力的发展。

4. 反思

4.1. 支架式教学设疑启思，有效协作探究

概念的建立以及应用阶段体现教师的主导性、学生探究主体性、培养学生核心素养以及提升学习自主能力的重要环节[5]。学生在经历正余弦定理概念的形成到应用在解三角形这个过程中，往往不能完整进行建构，因此提供支架式教学启发学生独立思考，以及促进学生有效协作探究，让学生在课堂讨论中更加积极主动。在这个过程中教师通过给学生设置疑问，促进学生有效协作探究，如在解决三角问题后给学生设置建立实际模型通过测量一些具体值和角度来求实际建筑问题，设置的疑问充分考虑学生的最近发展区，并且以实际生活问题为背景，有利于学生数学建模素养的培养。通过这种构建支架的方式，并且结合教学实际，有助于创建良好的协作探究氛围，促进学生知识的建构。

4.2. 支架式教学联系新旧知识，促进学生知识迁移

支架式教学注重学生知识的建构，注重学生在这个过程中的主体性，侧重新旧知识。在本节中，教师便是充分尊重学生的主体性，引导学生进行知识建构，教师引导学生回忆上节课所学以及初中的有关距离测量知识，让学生产生与原有知识间的认知“冲突”，让学生找到二者之间的联系，并且在初中的基础上扩充，即本节结合正余弦定理解决实际问题，从而将新知识与原有知识进行重组，使学生达到新的认知平衡，数学建模思想在这个过程中起到推波助澜的作用，从而完成意义建构。

4.3. 支架式教学具有一定的局限性

建构主义认为学生具有一定的自主性，因此支架式教学在实施的过程中有一定的难度，这便对教师有更高的要求。在如今大班教学背景下，支架式教学难以兼顾所有学生，同时在实际操作过程中也具有更多的不确定性，教师预设可能有一定的出入，这就对教师机智有更高的要求，教师要灵活处理预设与生成的关系，在这个过程中要充分考虑学生的个体差异性。本节三角函数的应用教学设计中，虽然通过问题支架以及情境支架的方式逐步促进学生最近发展区的发展，但是并不是所有学生在教学提问时都按照预设那样，因此教师要根据不同的回答调整自身的教学支架。总之，数学建模沟通数学理论与实际，支架式教学，不仅促进学生最近发展区的发展，也是培养学生数学建模能力的工具之一，教师要充分结合。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准: 2017 年版 2020 年修订[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 34.

[2] 兰小银, 朱文芳. 数学建模进入中学课程的意义与价值[J]. 数学教育学报, 2023, 32(3): 10.

[3] 章建跃. 建构主义及其对数学教育的启示[J]. 数学通报, 1998(4): 4-9.

[4] 楚伶. 支架式教学在对数函数解题教学中的应用研究[J]. 教育教学论坛, 2021(38): 124.

[5] 沈金泉. 支架式教学模式在高中数学概念教学中的应用研究[D]: [硕士学位论文]. 阜阳: 阜阳师范大学, 2022: 47.