

中法韩初中数学教材中“勾股定理”内容的比较分析

汪嘉慧, 李希玲, 肖加清*

黄冈师范学院, 数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2024年3月6日; 录用日期: 2024年6月19日; 发布日期: 2024年6月28日

摘要

“勾股定理”是数学中十分重要的理论, 它不仅用于解决直角三角形相关问题, 同时在物理学、工程学、建筑学等领域, 被广泛应用于解决实际问题。文章从宏观层面和微观层面对国内人教版、法国教材《math4e》版、韩国教材《수학2》版的“勾股定理”部分内容进行分析和比较, 并根据研究结论对我国初中数学教学的实施提出建议。

关键词

初中数学教材, 对比研究, 勾股定理, 习题综合难度模型

Comparative Analysis of the Content on the “Pythagorean Theorem” in Middle School Mathematics Textbooks from China, France, and South Korea

Jiahui Wang, Xilin Li, Jiaqing Xiao*

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Mar. 6th, 2024; accepted: Jun. 19th, 2024; published: Jun. 28th, 2024

Abstract

The Pythagorean theorem is a highly important theory in mathematics, used to solve problems

*通讯作者。

related to right-angled triangles and plays a significant role in various practical fields. This article analyzes and compares the content related to the Pythagorean theorem at both macro and micro levels in the domestic People's Education Press edition, the French textbook "math4e", and the South Korean textbook "Mathematics 2". Based on the findings, suggestions are made for the implementation of middle school mathematics teaching in China.

Keywords

Middle School Mathematics Textbooks, Comparative Study, Pythagorean Theorem, Exercise Comprehensive Difficulty Model

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

数学教育国际比较研究一直是数学教育界备受关注的热点问题，对其他国家数学教科书的研究可以让我们了解学生在数学学习知识载体上的差异[1]。中法韩三国都非常重视数学教育，在现今数学教材的比较研究中，将我国各版本教材和英国、美国、日本等国家的各版本教材进行比较分析的研究较多，而将中国关于法国和韩国教材的比较研究相对较少。各国数学教育改革中常常是相互参照的，教育内容在内容设置上呈现趋同趋势，为进行中小学数学教材比较奠定了基础[2]。中国的人教版教材在中国大陆具有极高的普及率，此教材严格遵循国家教育部门制定的教学大纲和标准，确保教学内容的正规性和权威性。法国的 Sésamath《math4e》版教材，是由一群经验丰富、知识渊博的数学教师编写，此教材巧妙地融合了新课程标准、现代信息技术和创新思维，因而在法国教育界中占有重要地位。韩国天才教育出版社的《수학 2》版教材，严格遵循韩国教育部制定的课程标准和教学大纲，确保教学内容与国家教育目标保持一致，并在韩国市场占有较高的比例。

通过对三本教材的比较分析提取每种教材的优质特色，有效地整合这些特点，从而为教育研究者创造出更具特色和吸引力的教学方法。

2. 研究设计

本研究分别从宏观层面和微观层面比较了人民教育出版社 2013 年出版的《义务教育教材·数学(八年级上册)》(以下简称人教版)、法国 Sésamath 团队 2016 年出版的 Sesamath《math4e》版(以下简称 math4e 版)、韩国天才教育出版社 2015 年出版的《수학 2》版(以下简称수학 2 版)这三本教材的“勾股定理”内容。

在宏观层面，本研究比较了三个版本教材在章节编排上的差异。通过深入分析章节的内容安排，探讨各版本教材在勾股定理章节的重视程度及其教学方法的多样性。

在微观层面，本研究对比了三个版本教材中勾股定理章节的具体教学方法，包括知识探究比较和习题细致分析，通过这些比较，旨在揭示各教材在细节处理和版面设计上的独特之处，进而识别每个版本的编写风格和特色。通过对习题的细致分析，本研究还将探讨三个版本教材在教学难度和课程难度上的差异。

3. 教材的宏观比较

比较“人教版”、“math4e 版”与“수학 2 版”勾股定理部分的编排特点，得到三个版本教材在编

排特点上的异同。在下文, 将三个版本教材关于勾股定理部分的编排一一列出:

Table 1. Arrangement of the Pythagorean theorem chapter in three versions of the textbooks
表 1. 三个版本教材“勾股定理”章节编排

人教版	math4e 版	수학 2 版
第十七章 勾股定理	G1 直角三角形	单元 5 图形的相似和勾股定理
17.1 勾股定理	发现活动	5.1 图形的相似
阅读与思考	核心课程与方法	相似的定义和性质
勾股定理的证明	圆直角三角形	三角形的相似条件
17.2 勾股定理的逆定理	勾股定理	三角形和平行线
阅读与思考	勾股定理的逆定理	三角形的重心
费马大定理	通过动画更正的练习	5.2 勾股定理
数学活动	训练练习	勾股定理
小结	深化演习	数学充电站: 费马留下的作业
复习题		小结 习题

由表 1 我们可以看出人教版、math4e 版和수학 2 版教材在勾股定理部分章节内容编排上有以下几个不同点:

1) 三个版本教材根据其特色采纳了多样化的方法来引导学生对勾股定理的理解。例如, math4e 版本中“发现活动”侧重于激发学生通过自主探索来理解数学原理, 而动画辅助练习则利用视觉工具以增强学生的学习体验。而人教版基本是由老师的语言引导从而激发学生的探索欲而并不是让学生自主进行探索, 三个版本教材在介绍勾股定理的同时, 各自以不同的深入程度拓展到相关概念, 有的版本甚至涉及更高级的数学理论, 如人教版和수학 2 版拓展了费马大定理。融入数学的历史或文化背景, 这样的添加扩展了数学知识的范畴, 为学生开拓了历史和文化视野。

2) 各版本的教材通过不同的方式呈现勾股定理的证明和其性质, 反映出对数学逻辑和知识体系构建的不同理解, 这有助于不同认知水平的学生建立数学概念的连贯性, 教材提供的支持多种多样的学习资源, 包括在线练习、动画教程、数学活动, 以及深入探究的练习, 旨在多角度加强学生的学习体验和知识掌握。学习目标和评估: 每个版本的教材对学习目标和评估的侧重点可能有所不同, 这反映了教材编写者对学习成效的不同期望和要求。

当然, 三个版本教材在勾股定理部分的编排上也存在着相同的地方:

1) 在三个版本教材的编排中, 我们发现三个版本的教材都对勾股定理及其应用进行深入的探究。每个版本都以章节和小节的形式精心组织了内容, 从勾股定理的基本介绍到其广泛的应用。通过一系列丰富多样的教学活动, 如发现式学习、核心课程与方法探索, 促进学生对这一经典定理的深刻理解和掌握。这些活动不仅增强了学生的学习体验, 而且培养了他们的批判性思维和问题解决能力。

2) 三个版本的教材始终地将理论知识与实际操作相结合, 提供丰富的实践练习, 这不仅增强了学生对勾股定理等数学原理的理解, 也锻炼了他们应用这些概念解决实际问题的能力。在每个章节的结束部分, 教材都精心设计了总结和练习题, 以及习题等形式的评估, 旨在帮助学生复习关键概念, 确保他们能够将所学知识内化并运用于未来的学习中。

4. 教材的微观比较

4.1. 知识探究比较

当前,世界各国在数学课程改革中强调学生的自主探究和合作交流的重要性,这些活动对数学学习至关重要。数学探究活动,作为培养学生自主学习和探究能力的关键手段。教材不仅是学生学习和教师教学的核心工具,也是开展数学探究教学的关键资源。中法韩在“勾股定理”部分中都注重展示探究内容,鼓励学生探索知识的生成和发展过程,当然三国在方法上也都各有差异。

从探究内容的角度分析,三个不同版本的教材在探究活动的形式上各有特色。“人教版”教材通过引导学生进入新的知识点来激发其探索欲望,同时也巧妙地融入对上一节课内容的复习,从而起到复习巩固的作用。“수학 2 版”版教材在探究活动上则更为简洁,其主要目的是铺垫接下来的学习内容。“math4e 版”版本则提供了更为丰富多样的探究题型,有效地激发了学生的好奇心。不过,这一版本在引导学生方面略显不足,更多地依赖于学生自主探索的能力。

4.2. 习题比较

4.2.1. 习题数量比较

本节对习题数量的统计包括课堂练习题、课后习题和复习题。其中对于一道大题中出现多个问的时候,根据各个问题之间的关联进行分类,若两个问题之间完全没有任何联系,则当两道习题处理;若两个问题之间存在关联,即后面问题需要利用前面问题进行解答,则视为同一道习题。

Table 2. Comparison of the number of exercises in the Pythagorean theorem section among three versions of the textbooks
表 2. 三个版本教材“勾股定理”部分的习题数量比较

	课堂练习题	课后习题	复习题	总计
人教版	14	34	18	66
math4e 版	-	11	87	98
수학 2 版	13	13	9	35

从表 2 可以看出 math4e 版的题量最多,人教版题量适中,而수학 2 版的题量最少,math4e 版习题数量相比人教版和수학 2 版这两本教材,增加了一个动画纠正练习的栏目,而法国的数学教育强调通过大量习题来强化对数学概念的实践和应用。这种教学方法旨在提升学生解决问题的技巧,深化对数学知识的理解,并确保对数学概念的全面掌握。通过多样化的问题,学生可以将理论知识应用于不同的实际情境中。而수학 2 版的题量最少,一方面是因为在教材编排上,勾股定理是和图形的相似在同一个章节,而且수학 2 版教材上没有勾股定理的逆定理的章节。故수학 2 版题量最少。

4.2.2. 习题类型比较

对习题类型的比较是对除课堂练习以外的课后习题和复习题的类型进行比较。

Table 3. Types of exercises in the Pythagorean theorem section of the people's education press textbook
表 3. 人教版教材“勾股定理”部分习题类型

	复习巩固	综合运用	拓广探索	总计
课后习题	17	12	4	33
复习题	10	5	3	18
总计	27	17	7	51

Table 4. Types of exercises in the Pythagorean theorem section of the math4e textbook
表 4. math4e 版教材“勾股定理”部分习题类型

	exercices corrigés par animation (动画修正练习)	exercices d'entraînement (训练练习)	exercices d'approfondissement (深化练习)	récréation mathématique (数学娱乐)	总计
课后习题	11	-	-	-	11
复习题	-	43	32	12	87
总计	11	43	32	12	98

Table 5. Types of exercises in the Pythagorean theorem section of the mathematics 2 textbook**表 5.** 수학 2 版教材“勾股定理”部分习题类型

	기초 (基础)	기본 (基本)	발전 (拓展)	总计
课后习题	11	2	2	15
复习题	-	6	3	9
总计	11	8	5	24

从表 3、表 4 和表 5 的内容可以看出：

- 1) 三个不同版本的教材在课后习题的内容和分类上有所不同。人教版教材的课后习题包含复习巩固、综合运用和拓广探索；math4e 版教材包含动画修正练习、训练练习、深化练习和数学娱乐；而 수학 2 版教材的课后习题则包含基础、基本和拓展方面。尽管这三个版本在习题类型的命名上有所差异，它们的目的和大致方向却是一致的：都旨在逐步提升难度，不仅满足学生对基础知识的掌握，还在一定程度上进行拓展，以促进学生技能水平的发展。
- 2) 通过对题型进行详细的统计分析，我们发现 수학 2 版和人教版教材在习题设计上表现出一定的单一性。这两个版本的教材习题主要由计算题、解答题和证明题构成，其中计算题占据了绝大多数，超过了所有题型的七成。这种设计虽然有助于加强学生的计算能力，但同时也显得较为局限，因为它缺少了选择题、填空题和判断题这些能够更全面考查学生综合能力的题型。수학 2 版和人教版教材更加注重基础知识的巩固和理解，大量习题旨在训练学生的基本数学技能。相比之下，math4e 版教材在题型设置上显得更为多元和创新。特别值得一提的是，它增加了一个独特的“动画修正练习”栏目，这一新颖的方法不仅为学生提供了一种生动、互动和灵活的学习体验，而且有效地满足了多样化的学习需求，显著促进了学生对数学概念的理解和掌握。

4.2.3. 习题难度

一本教材的习题难度起着学生能否及时掌握所学知识的关键性作用，每个版本的教材中，习题都可以反映该教材在每个知识点的侧重点不同，从而反映出教材在课程的整体水平和重难点。通过评价教材习题的综合难度可以很好地反映该版本教材数学课程的难度水平。本研究以鲍建生教授的综合难度模型为研究工具，综合难度模型包含背景、数学认知、运算、推理、知识含量 5 个难度因素，每个难度因素划分了不同层次的水平，并对各个难度因素中的不同水平赋予一定的权重系数、编码等(见表 6)。计算综合难度系数的公式为：

$$d_i = \frac{\sum n_{ij} d_{ij}}{n} \quad (\sum n_{ij} = n, i = 1, 2, 3, 4, 5; j = 1, 2, \dots)$$

其中， d_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 依次分别是背景、数学认知、运算、推理、知识含量五个难度因素上的取值， d_{ij} 为第 i 个难度因素的第 j 个水平的权重， n_{ij} 则表示这组题目中属于第 i 个难度因素的第 j 个水平的题目

的个数, 其总和等于该组题目的总数 n [3]。

Table 6. Classification table of levels for comprehensive difficulty factors

表 6. 综合难度因素的水平划分表

难度因素/水平	1	2	3	4
背景(A)	无实际背景	个人生活	公共常识	科学情景
数学认知(B)	操作	概念	领会说明	分析深究
运算(C)	无运算	数值运算	简单符号运算	复杂符号运算
推理(D)	无推理	简单推理	复杂推理	
知识含量(E)	一个知识点	两个知识点	三个及以上知识点	

按照表 6 给出的习题难度综合模型对习题进行编码, 编码的习题包括课后习题和复习题, 对编码的数据进行统计整理并利用公式(1)计算各因素的加权平均。习题总数量统计结果为人教版教材“勾股定理”内容共有 51 道习题; math4e 版教材“勾股定理”内容共有 98 道习题。수학 2 版教材“勾股定理”内容 24 道习题, 具体数据如表 7 所示:

Table 7. Statistical table of quantitative indicators for difficulty factors of Pythagorean theorem exercises in three versions of the textbooks

表 7. 三个版本教材“勾股定理”习题难度因素量化指标统计表

难度因素	等级水平	数量			百分比			加权平均		
		人教版	math4e 版	수학 2 版	人教版	math4e 版	수학 2 版	人教版	math4e 版	수학 2 版
背景	无背景	38	73	20	74.51%	74.49%	90.91%	1.53	1.41	1.09
	个人生活	5	19	2	9.80%	19.39%	9.09%			
	公共常识	2	2	0	3.92%	2.04%	0.00%			
	科学背景	6	4	0	11.76%	4.08%	0.00%			
数学认知	操作	24	53	10	47.06%	54.08%	45.45%	2.04	2	2.14
	概念	8	4	4	15.69%	4.08%	18.18%			
	领会说明	12	30	3	23.53%	30.61%	13.64%			
	探究分析	7	11	5	13.73%	11.22%	22.73%			
运算	无运算	8	13	0	15.69%	13.27%	0.00%	1.84	1.87	2
	数值运算	43	85	22	84.31%	86.73%	100.00%			
	简单符号运算	0	0	0	0.00%	0.00%	0.00%			
	复杂符号运算	0	0	0	0.00%	0.00%	0.00%			
推理	无推理	24	25	11	47.06%	25.51%	50.00%	1.67	1.99	1.73
	简单推理	20	49	6	39.22%	50.00%	27.27%			
	复杂推理	7	24	5	13.73%	24.49%	22.73%			
	1 个知识点	23	45	12	45.10%	45.92%	54.55%			
知识含量	2 个知识点	21	41	6	41.18%	41.84%	27.27%	1.67	1.66	1.64
	3 个及以上知识点	7	12	4	13.73%	12.24%	18.18%			

为了更加直观的对比分析人教版、math4e 版、수학 2 版教材习题的综合难度，根据表 7 绘制得到了三个版本教材“勾股定理”部分习题的综合难度雷达图，如图 1 所示。

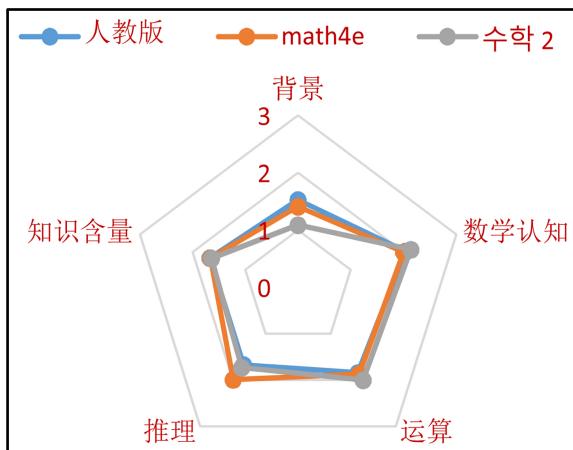


Figure 1. Radar chart of the comprehensive difficulty of exercises on the Pythagorean theorem section in three versions of the textbooks

图 1. 三个版本教材“勾股定理”部分习题的综合难度雷达图

通过图 1 进行分析在深入分析三套教材的习题难度后，我们可以得出以下结论：

人教版教材在知识的广度和深度以及数学概念的认知层面进行了恰当的配比，确保了学生对基础概念的掌握，并在数学与日常生活联系的背景构建上做得较好。但在推动学生的逻辑推理和计算技能方面有待加强。建议引入更多促进逻辑思考的教学元素，如通过情景模拟和团队合作解决问题的任务，来增强学生的深度学习和跨学科应用能力。

math4e 版教材尽管在推理和数学认知方面有显著的强度，但在实际运算和背景相关性上则显得稍微薄弱。该教材在激发学生的探索欲和分析技能方面表现优异，但较高的难度水平可能会对一些学生构成挑战。为此，应当重视分层教学资源的提供，以便学生能够逐步建立起结构化的知识体系，从而提升他们的理解力和实际应用能力。

수학 2 版教材在知识的覆盖、计算能力和数学认知层面达到了均衡，但在数学知识与现实社会联系的背景建设上存在不足。建议通过整合更多的实际案例分析和跨学科项目，来加强学生的数学知识与现实世界相结合的能力，从而提升他们的数学思维和解决问题的能力。

5. 结论与启示

5.1. 教材的宏观比较的结论

三个版本教材在其内容的编排上面存在各自的特点和差异，不同教材对不同层次的学生也有不同的帮助。

1) 人教版教材在内容上呈现出显著的全面性，这不仅帮助学生构建了坚实的数学基础，而且为理解更高阶的数学理论奠定了基础。这一教材有效地满足了具有不同背景和能力水平的学生的需求，为他们提供了丰富的挑战和支持。在教学实施方面，人教版更侧重于教师的引导，通过引人入胜的语言激发学生的探索欲望，并非纯粹依赖学生的自主学习。尽管该教材在章节结束时以阅读思考作为收尾，从而拓展了学生的知识层面，但它在及时自我评估方面略显不足。

2) math4e 版教材在“勾股定理”部分省略了关于“费马大定理”的介绍。虽然这一理论不是勾股定理的直接扩展,但其在数学历史上占有重要地位,对于激发学生对数学文化和历史的兴趣具有显著作用。该教材缺少章首语的特点,可能对偏好直接和系统学习的学生构成优势,使他们能更专注于数学本质的探索。此外,math4e 版教材通过加入团队合作环节,为学生提供了培养协作、沟通等关键 21 世纪技能的机会。然而,这种方法也带来了团队成员间能力差异导致的挑战。

3) 수학 2 版教材在“勾股定理”的介绍中遗漏了“勾股定理的逆定理”。这种遗漏可能削弱了学生对数学概念双向性的理解,即数学定理不仅能从已知条件推导出结果,也可用于验证条件的真实性,这对于培养学生的批判性思维和逻辑推理能力至关重要。在教学实施方面,教师应着重强调勾股定理的应用,并引导学生探索其逆定理的意义。该教材在章节结尾提供了自我评估环节,有助于学生自行检查和巩固学习内容。

5.2. 教材的微观比较的结论

1) 人教版教材在知识探究方面,通过精心设计的引导方式激发学生的好奇心和探索欲望。该教材巧妙地结合了新知识点的引入和对前一节课内容的复习,有效地促进了学习的巩固。尽管习题数量适中,但在题型设计上表现出一定的单一性。教材在知识的广度和深度上取得了良好的平衡,尤其是在数学与日常生活的联系上做得尤为出色。

2) math4e 版教材在知识探究方面提供了丰富多样的题型,有效地激发了学生的好奇心。其独特的“动画修正练习”栏目提供了一种新颖的互动学习体验,有助于满足多样化的学习需求。尽管在推理和数学认知方面有显著的强度,但在实际运算和背景相关性上稍显不足。

3) 수학 2 版教材在探究活动上更为简洁,专注于为学生铺垫接下来的学习内容。该教材在习题设计上表现出一定的单一性,并在知识的覆盖、计算能力和数学认知层面达到了均衡。

5.3. 对教学实施的建议

随着 2021 年“双减”政策的出台和落实以及《义务教育数学课程标准(2022 版)》的发布,学生在课堂上的学习显得更加的尤其重要,一版优秀的教材能使老师的教学更加得心应手,使学生的学习更加轻松;通过对人教版、math4e 版和 수학 2 版三个版本教材“勾股定理”内容的研究,比较各教材的优劣。一方面,深入了解不同版本教材的特性,有助于发现每个教材突出的教学特色。这种认识使教师能够更好地把握教学中的重点和难点,从而提高教学效率和学生学习效果。另一方面,将呈现出来的不同特色进行对比分析,有助于发现不同国家之间的教材差异[4]。我们能够识别出各教材的优点和缺陷。这种“取长补短”的策略不仅有助于优化教学内容和方法,还可以将不同教材的特色相结合,创造出更加独特和吸引人的教学体验。因此,就本研究的结论而言,谈谈对新一轮数学教材“勾股定理”部分内容的教学实施时个人的建议:

1) 强化自我评估环节,为帮助学生更好地巩固所学知识,建议在每个章节末尾加入更为系统的自我评估环节。这可以通过小测试、反思性问题或自评表格的形式实现。这样的设计不仅有助于学生巩固新知识,还能促进他们对学习过程的深度反思。

2) 丰富习题类型,增加更多样化的习题类型,以避免习题单一性,从而全面提升学生的学习体验。这包括引入多种解题方法的问题、实际情景模拟题目以及创新性思考题。我们也应注意到节末探索性问题的设计不应当是已学内容的再现,而应该具有一定的挑战性以促进学生数学思维的培养,可以是当前学习内容的补充或下一章知识的铺垫[5]。习题的多样性不仅能够刺激学生的思维,还能够帮助他们从不同角度理解和应用数学概念。继续在教材中加强数学与日常生活之间的联系,数学是现实世界的抽象反

映和人类经验的总结，应该通过真实问题抽象出相关数学教学内容[6]。

3) 学生能够更好地理解数学知识的实际应用价值。这可以通过结合生活实例、案例研究或项目式学习来实现。这种实践性学习不仅使数学学习更加生动有趣，还能够帮助学生建立数学知识与现实世界之间的联系。

5.4. 研究不足之处

在本文中对三种不同版本数学教材的研究主要采用了文献查阅和比较分析的方法。这些方法虽然为我们提供了深入的定性见解，但它们仍存在一些局限性。主要问题在于，这些研究方法缺乏对定量分析和实际学习反馈的关注，这限制了我们对教材有效性的全面理解。

目前的研究方法较多依赖于定性分析，缺乏对定量分析和实际学习反馈的重视。这限制了我们对教材有效性的全面评估。为了使教材研究更科学、系统且严谨，未来的研究应更深入地利用量化研究方法。例如，通过统计分析、实验设计和学习成果数据的分析来评估教材的实际影响和效果。这种综合研究方法将使教材研究更紧密地贴合实际教学情境，并更有效地指导教材的开发和应用，最终提升教学质量和学习成效。

本研究在内容上主要集中于“勾股定理”内容，而忽视了与其他初中数学知识点的联系，例如代数和三角函数等领域。此外，本研究也未充分探讨勾股定理与其他学科之间的联系性。因此，在未来的研究中，我们应扩大研究视角，不仅要关注单一知识点，还要探索不同数学知识点之间的内在联系，甚至跨学科之间的关联。

参考文献

- [1] 张冬莉, 代钦. 中日初中数学教科书中“勾股定理”内容的比较[J]. 数学教学, 2019(5): 6-10.
- [2] 赵思林. 一部优秀的六国数学教材比较研究专著——《六国初中数学教材代数内容国际比较研究》书评[J]. 中学数学(初中版), 2019(7): 92-93.
- [3] 鲍建生. 中英两国初中数学期望课程综合难度的比较[J]. 全球教育展望, 2002, 31(9): 48-52.
- [4] 张晓宁, 孟圆, 刘海明. 中美高中数学教材数列内容习题的比较研究[J]. 创新教育研究, 2023, 11(3): 507-515. <https://doi.org/10.12677/CES.2023.113083>
- [5] 饶顺. 中日高中数学教材比较——以“指数函数”为例[J]. 数学之友, 2023, 37(6): 2-4.
- [6] 黄良信. 中学数学课程教学的问题设计与实施——评《中学数学教学设计》[J]. 教育理论与实践, 2022, 42(9): F0003.