**Creative Education Studies** 创新教育研究, 2024, 12(6), 387-395
Published Online June 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2024.126403

# 探索HPM与PME的结合之桥：等比数列前$n$项和的教学设计

贺 楠[1]，李 钊[1]，苏智平[2]

[1]黄冈师范学院，数学与统计学院，湖北 黄冈
[2]武汉市供销商业学校，湖北 武汉

收稿日期：2024年3月6日；录用日期：2024年6月20日；发布日期：2024年6月29日

## 摘 要

在对HPM与PME相结合的可行性与必要性分析的基础上，以“等比数列前$n$项和”为例，对该理论在等比数列求和教学过程中的应用进行了分析，并开发了相应的教学片段设计。该教学片段通过数学史导入新课，利用五种推导方法得到等比数列前$n$项和公式，并从PME视角分析HPM对学习该内容的作用及机理，使学生体会数学家们当时的思维方式并收获数学知识。该教学方法在理解和掌握知识的同时有效培养学生的核心素养，为教师提供了一种新的教学方法和理念，以期改进等比数列的教学设计从而提高课堂教学质量与效果。

## 关键词

HPM，PME，等比数列

# Exploring the Bridge of Combining HPM and PME: Teaching Design for the First *n* Sum of Proportional Sequence

**Nan He[1], Zhao Li[1], Zhiping Su[2]**

[1]School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei
[2]Wuhan Supply and Marketing Business School, Wuhan Hubei

Received: Mar. 6th, 2024; accepted: Jun. 20th, 2024; published: Jun. 29th, 2024

## Abstract

**Based on the feasibility and necessity analysis of the combination of HPM and PME, taking “the**

文章引用: 贺楠, 李钊, 苏智平. 探索 HPM 与 PME 的结合之桥: 等比数列前 *n* 项和的教学设计[J]. 创新教育研究, 2024, 12(6): 387-395. DOI: 10.12677/ces.2024.126403

**first *n* terms and formulas of proportional sequence" as an example, the application of this theory in the teaching process of proportional sequence summation was analyzed, and a corresponding teaching segment design was developed. This teaching segment was introduced into a new lesson through mathematical history, and five deduction methods were used to obtain the first *n* terms and formulas of proportional sequence. The role and mechanism of HPM in learning this content were analyzed from the perspective of PME, enabling students to experience the thinking patterns of mathematicians at that time and gain mathematical knowledge. This teaching method effectively cultivates students' core competencies while understanding and mastering knowledge, providing teachers with a new teaching method and concept to improve the teaching design of proportional sequences and enhance the quality and effectiveness of classroom teaching.**

## Keywords

**HPM, PME, Proportional Sequence**



## 1. 问题提出

《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》(以下简称课标)中提出：如何将数学史融入中小学的数学教学是数学教育领域的一个重要课题[1]。近年来涌现出了许多关于数学史融入中小学教学的专著、教学设计和策略等方面的研究。如，汪晓勤提出，个体数学理解的过程与数学历史发展过程具有相似性，数学史不仅有助于确定学生的认知障碍，还有助于克服这些障碍[2]。王海青有效地运用数学史进行教学设计，对高中“正弦定理”和“余弦定理”的教学内容进行分析并提出相应的教学建议[3]。

然而，好的教育离不开对学生心理的研究。PME (数学教育心理)是通过关注和研究学生的心理发展过程来研究数学教育[4]。近几年，越来越多的数学研究者意识到数学教育心理对学生数学学习的重要作用，对此展开了系列研究。如，喻平表明，PME 在数学教师专业发展方面做了大量研究，取得了一系列有意义的成果，尤其是在教师的专业发展研究方面[5]。王雪等人从 PME 视角下研究数学概念教学，设计出符合特征和学生学习心理规律的教学方案，最终有效地实现数学概念的加工[6]。

2005 年，冯晓华指出：数学史通过影响认知因素及非认知因素参与并推动数学学习活动，由此影响数学学习活动的全过程，探讨了 HPM 和 PME 结合的研究[7]。2017 年，徐章韬提出，HPM 与 PME 的协调，即在研究数学内容的同时兼顾研究学生的心理，这有助于解决教学中的难题[8]。最近，李玲和徐章韬也通过回顾正态分布的历史，并从 PME 的视角解读正态分布的历史，从历史中寻找学生认知生长点，进行正态分布教学设计[9]。因此，将 HPM (数学史与数学教育)与 PME 相结合，可以深层次分析数学史在数学学习中的作用机理及影响，帮助学生理解和掌握知识，同时也为教师提供了一种新的教学方式和理念，促进教师专业成长。此外，HPM 和 PME 相结合在传承数学文化、优化数学教育、促进数学教育改革、培养创新人才和促进教育公平等方面具有重要的社会价值，对推动数学教育的发展、培养优秀人才和促进社会进步具有积极的影响。

等比数列在高中数学学习中扮演着重要的角色，关于等比数列的教学设计与教学对策的研究多以培养学生核心素养、融入数学史、开展体验式课堂为主。如，柴有茂以“等比数列”的教学设计为例，从三方面呈现等比数列通项公式等相关知识，从而内化为学生数学核心素养的过程与方法[10]。吴现荣等人

认为 HPM 视角下的等比数列教学激发了“情感之悦”，学生得以走进了数学家的心灵之中，成了课堂的主人[11]。陈德燕以“等比数列的前 $n$ 项和”教学为例，展开基于情境、问题导向的探究体验式课堂教学实践[12]。截至目前，通过文献查阅发现，已有研究倾向于探究有关等比数列的情境教学，且研究者聚焦于发展学生的核心素养，关于等比数列还未涉及教育心理方面的研究，更没有将 HPM 与 PME 结合后应用于等比数列的教学研究中。将 HPM 和 PME 结合融入到教学设计之中，帮助教师更好地设计符合数学历史和教育发展规律的教学内容，同时考虑到学生的认知特点和心理需求，制定更有效的教学策略和方法。通过结合 HPM 和 PME 的研究成果，教师可以更深入地了解数学教育的本质和学习者的特点，从而更好地指导和激发学生的学习兴趣和潜力，还有助于促进教育研究和教学实践的互动与融合，推动数学教育的创新和提高教学质量。因此，该研究对 HPM 与 PME 相结合的可行性与必要性分析后，以“等比数列”为例，从 PME 视角分析 HPM 对学习等比数列前 $n$ 项和的作用及机理，进行等比数列前 $n$ 项和的教学设计，从而建立起 HPM 与 PME 的结合之桥，为数学教学注入更多数学史和心理学的元素，以期提升教学的质量和效果。

## 2. 探索 HPM 与 PME 的结合之桥

### 2.1. HPM 与 PME 相结合的可行性与必要性分析

HPM 和 PME 是两个不同但相关的领域，它们在研究内容、研究方法以及目标和应用等方面存在一些异同点，如表 1 所示。

**Table 1.** Differences and similarities between HPM and PME
**表 1.** HPM 和 PME 的异同点

| | HPM | PME |
|---|---|---|
| 研究内容 | 数学概念的演变、数学教育的历史背景、教学方法的演变等。 | 学生学习数学的心理过程、认知和情感因素以及教学策略等。 |
| 研究方法 | 文献研究、历史分析、教学实践观察等。 | 实证研究、实验研究和问卷调查等。 |
| 目标 | 促进数学教育的发展，挖掘数学概念的深层含义，丰富教学内容。 | 改善数学课堂的教学效果，促进学生的认知发展和提高学生学习成绩。 |
| 应用 | 帮助教师理解和传授数学知识。 | 帮助教师了解学生的认知特点和设计教学策略。 |
| 相同点 | 两者都关注数学教育领域，都追求提高数学教学的质量和效果。两者都是在不同的角度和方法下，探讨数学教育问题，为数学教学提供理论支撑和实践指导。 | |

HPM 关注数学发展的历史和数学教育的教学方法。在教学过程中，HPM 的应用更多地体现在帮助教师理解和教授数学知识。PME 则聚焦于数学教育的心理学问题，旨在帮助教师更好地理解数学概念的本质和演变过程，从而更好地教授数学知识，主要应用于教师专业发展和教学改进。

总体而言，两者都关注数学教育领域，都致力于提高数学教学的质量和效果，是在不同的角度和方法下，探讨数学教育问题，为数学教学提供理论支持和实践指导。尽管 HPM 和 PME 在研究对象、方法、目的和应用上存在一些差异，但它们都旨在促进数学教育的发展，提高学生对数学的理解和掌握。因此，这两者在数学教育研究中都具有重要的意义。将二者相融合，不仅可以进一步分析数学史在数学学习中的作用机理及效果，更好地体现 HPM 的教育价值[7]，便于学生理解和掌握知识，同时也为教师提供了一种新的教学方式和理念，促进教师专业成长。

### 2.2. HPM 与 PME 相结合应用于等比数列教学的理论分析

等比数列有着悠久的历史，它的概念和性质在古代就已经被人们所研究和应用。古希腊数学家毕达哥拉斯对等比数列进行了一定的研究，发现了一些重要性质，例如相邻两项的比值相同。这些性质成为毕达哥拉斯学派研究几何和数学的基础。古印度数学家阿耶巴塔在他的著作《阿耶巴塔耶数学》中对等比数列进行了研究。近代，欧拉、高斯等也对等比数列进行了深入的研究，他们在数论、代数和分析等领域中应用了等比数列的概念和性质。

在实际的教学中，老师可以通过讲述等比数列的历史背景和发展过程，以及等比数列概念的起源和演变，帮助学生更深入地理解等比数列的本质和重要性。通过研究等比数列的教学方法和策略，设计更具启发性和互动性的教学活动，可以协助学生更有效地掌握和运用等比数列。另外，了解学生的认知和情感需求，有助于更具针对性地设计教学策略。教师还可以通过诊断学生的思维方式和困惑点，提供个性化的反馈和支持，帮助学生克服困难和提高学习效果。教师可以设计多种形式的教学活动和评估方法来培养学生对等比数列的深入理解和应用能力。通过设计探究式的提问与讨论，能引导学生思考等比数列的实际应用问题，培养实际问题解决能力和创新能力。

综上，通过将 HPM 和 PME 融合后应用于等比数列的教学中，教师可以更好地满足学生学习需求，提高课堂教学效果，激发学生对数学的兴趣。同时，这也有助于教师更好地理解学生对等比数列的理解和学习过程，从而更有效地设计教学策略和教学活动，有助于促进教育研究和教学实践的互动与融合，推动数学教育的创新和提高教学质量。

## 3. 《等比数列的前 *n* 项和》教学片段设计

### 3.1. 新课引入

导入语：等比数列前 $n$ 项和公式的发现可以追溯到古代数学时期。在古埃及和古巴比伦时期，人们已经知道如何计算等比数列的前几项和。古埃及人通过观察尼罗河的水位变化，古巴比伦人则通过观察天文现象，分别发现了一种计算等比数列和的方法。这些早期的方法虽然简单，但它们为后来的数学家提供了思路和启示。

问题 1：公元前 1650 年，埃及祭司阿莫斯在纸草上用僧侣文记载了一个早在 200 年前就存在的等比数列的相关趣题。有 7 座房屋，每座房屋内有 7 只猫，每只猫吃 7 只老鼠，每只老鼠吃 7 颗麦穗，每颗麦穗含 7 个容积单位的麦子，请问房屋、猫、老鼠、麦穗和麦子的容积总数是多少[13]？

师生活动：学生可能发现这一数列是由 7、$7^2$、$7^3$、$7^4$、$7^5$ 这组等比数列组成的。通过这组数列求出总数，把这组数列的 5 个数逐项相加求解，得到 19,607。教师举出类似例子，19 世纪，英国数学家亚当斯在他的《学者算术》中也用 7 做了一个类似的例子："在去伊夫斯的途中，我遇见了一个男人，他身边有七个女人，每个女人手里都拿着 7 个袋子，每一个袋子里装着 7 只猫。那么，和我们一起前往伊夫斯圣地的女人，物品袋和猫，一共有多少[14]？"

问题 2：传说在古代，百万富翁为了奖励一个年轻人，承诺第一天给他一元、第二天给他两元、每天给他前一天钱的两倍，一直到第三十天时截止。请问这个百万富翁能够信守诺言吗？

师生活动：学生计算得出，富翁应当给年轻人 $1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{29}$ 元，但项数比较多，计算量过大。

追问(1)：有没有简单的方法对等比数列进行求和？

师生活动：学生思考片刻，教师引出相关数学史。巴比伦人大约在公元前 3000 年就已经总结出的等比数列 $1,2,2^2,\cdots,2^9$ 的求和公式：$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9=2^9+2^9-1$。

从历史资料来看，古埃及人对乘法的规律与我们现在所用的方法是不一样的，他们早已经把以公比为 7 的等比数列的前 $n$ 项和的递推关系式 $7,7^1,7^2,7^3,7^4,7^5,\cdots,7^n$ 总结为：$S_n=\left(1+S_{n-1}\right)\times 7$。

即可以求得一组等比数列的前 $n$ 项和与其前 $n-1$ 项和的内在联系[15]。

设计意图：在情景 1，2 中，通过数学史、古代有趣的故事来引入，使学生们的学习积极性得到有效地提高，让他们能够全面地参与到课堂当中，追随着数学家的脚步，去体验数学历史中所包含的快乐与魅力，感悟古代与现代数学的联系，深刻地认识到数学课程所带来的广阔而深刻的现实意义。同时，从 PME 视角出发，在对等比数列的概念进行有效研究的过程中，可以通过介绍数学史上对等比数列前 $n$ 项和的发现和应用，激发学生对等比数列的兴趣，为后面的探究等比数列前 $n$ 项和公式的学习打下良好基础。

## 3.2. 探索与发现

### 3.2.1. 归纳猜想法

问题 3：已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1$，公比为 $q$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$。

师生活动：教师带领学生分析得到，$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 中含有 $n$ 个未知量，利用通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$，可将其化为仅含三个未知量，达到减少未知量的目标[10]。

即

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}=a_1\left(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}\right)$$

追问(1)：求 $S_n$，需求 $D_n=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}$，如何求 $D_n$？

师生活动：教师引导学生从具体情况出发。当 $q=1$ 时，$D_n=n$。

追问(2)：当 $q=2$ 时，$D_n=?$

师生活动：学生得出，$D_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$。$D_1=1,D_2=3,D_3=7,D_4=15,D_5=31,\cdots$。

追问(3)：如果将 $D_1,D_2,D_3,D_4,D_5$ 每项都加 1，那么会构成一个什么样的特殊数列？

师生活动：学生发现，2，4，8，16，32 构成公比为 2 的等比数列。

追问(4)：$D_1,D_2,D_3,D_4,D_5$ 能否用 2 的指数次幂形式表示？

师生活动：学生思考后得到，$D_1=2^1-1$、$D_2=2^2-1$、$D_3=2^3-1$、$D_4=2^4-1$、$D_5=2^5-1$。

追问(5)：试猜想，$D_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$ 结果是什么？

师生活动：学生回答，$D_n=2^n-1$。

追问(6)：当 $q=3,4$ 时，设 $X_n=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}$、$Y_n=1+4+4^2+\cdots+4^{n-1}$。

类比 $q=2$，会不会有 $X_n=3^n-1$，$Y_n=4^n-1$？

请完成表 2 和表 3。

师生活动：学生完成表格后发现，

$$X_n=\frac{3^n-1}{2},Y_n=\frac{4^n-1}{3}。$$

**Table 2.** Student fill in the blank 1

**表 2.** 学生填空 1

| $N$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_n$ | 1 | 4 | 13 | 40 | 121 | … |
| $3^n-1$ | 2 | 8 | 26 | 80 | 242 | … |

**Table 3.** Student fill in the blank 2
**表 3.** 学生填空 2

| $N$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_n$ | 1 | 5 | 21 | 85 | 341 | … |
| $4^n-1$ | 3 | 15 | 63 | 255 | 1023 | … |

教师总结：当$q=2,3,4$时，分别猜想出以下式子结果：

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\frac{2^{n-1}}{1};$$
$$1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}=\frac{3^{n-1}}{2};$$
$$1+4+4^2+\cdots+4^{n-1}=\frac{4^{n-1}}{3}.$$

追问(7)：能进一步猜想$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=?$

师生活动：学生猜想得到：$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}(q\neq 1)$。

教师总结，如此，

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}\\&=a_1+q\left(a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-2}\right)\\&=a_1+qS_{n-1}\end{aligned}$$

### 3.2.2. 提取公比法

导入语：那么上述猜想是否正确呢？请 1 组同学们分小组探索并推导上述公式。

师生活动：教师引导学生根据古埃及人的方法，尝试将公比提取出来，

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}=\frac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1}=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}(q\neq 1)。$$

问题 4：经过推导式子中出现了$S_{n-1}$，能否找到$S_n$和$S_{n-1}$之间的关系？

师生活动：学生利用前$n$项和$S_n$的定义，得$S_n=S_{n-1}+a_n$，于是$S_n=a_1+q\left(S_n-a_n\right)$。

从而求出，

$$S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}(q\neq 1),$$

教师总结，古为今用，这种推理方式采用了古埃及人和印度人的思维方式，从阅读资料中可以看出，这种表达方式是相当繁琐，他们当时还不具备我们现在所拥有的代数符号。因此，在提取公比的过程中，我们能够体会到古人在解题过程中所特有的思维方式，通过对数学史料的研究，为我们接下来的学习带来启发，提供指引。

### 3.2.3. 等比定律法

导入语：根据$S_n=a_1+q\left(S_n-a_n\right)$，变形可以得到：

$$\frac{S_n-a_1}{S_n-a_n}=q\left(s_n-a_n\neq 0\right)。$$

将其按照前 $n$ 项和的定义展开成：

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}}=q\text{ 。}$$

问题 5：上述比例关系式的推导能否运用等比数列的定义得到呢？请 2 组同学派代表回答。

师生活动：教师学生总结得到，由等比数列的概念可得，

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=q\text{ 。}$$

追问(1)：能否用 $S_n$ 来表达等比数列的定义？

师生活动：学生发现，

$$\frac{S_n-a_1}{S_n-a_n}=q\text{ 。}$$

从而推导出公式

$$S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\left(q\neq1\right)\text{ 。}$$

教师总结，基于组 1 的基础上组 2 进行相应的推导能够发现，等比数列的前 $n$ 项和公式的证明也是可以运用等比定律的方法的，恰好这种证明方法古希腊著名数学家欧几里得利用《几何原本》中进行说明，特别值得注意的是当 $n\neq1$ 时，$S_n-a_n\neq0$，那么当 $n=1$ 时，$S_1=a_1$ 成立，这也是我们本节等比数列求和的一个重难点[16]。

#### 3.2.4. 错位相减法

问题 6：将 $S_n=a_1+q\left(S_n-a_n\right)$ 变形得到：$S_n-qS_n=a_1-a_1q^n$ 。

观察等式左边，能得到新的证法吗？请 3 组同学派代表回答。

师生活动：3 组学生思考后发现，同样在 $S_n=a_1+q\left(S_n-a_n\right)$ 的基础上进行变形，发现将公比 $q$ 乘上构造出一个新式，即：$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}$ 。

两边同乘公比 $q$ 得：$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^n$ 。

与上式联立变形得：$S_n-qS_n=a_1-a_1q^n$ 。

当 $q\neq1$ 时，

$$S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\text{ 。}$$

教师总结，3 组同学的证明方法，就是课本上重点强调研究的推导方法—错位相减法，错位相减法是由瑞士数学家欧拉在 18 世纪《代数学基础》进行系统解释的[12]；同学们在进行等比数列求和公式的推导中和历史上著名数学家们的思路历程是不谋而合。

#### 3.2.5. 掐头去尾法

师生活动：学生观察得到，

$$S_n-a_1=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1},$$
$$S_n-a_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-2}.$$

发现等式的右侧，前者是后者的 $q$ 倍。

教师总结，得到，

$$S_n - a_1 = q\left(S_n - a_n\right)。$$

将数列的前 $n$ 项和 $S_n$ 首尾项分别相减，这种方法通过把等比数列进行掐头去尾再运算的思想方法最初是 18 世纪由法国数学家拉克洛瓦在推导并总结出来的，这对于完善等比数列求和公式的发展历史具有重大意义。

设计意图：利用上述 5 种方法，环环相扣地推导出公式，形成以一个中心为中心的求和公式的推导，然后循序渐进地让学生们亲身体验一下，历史上数学家们发现、探索、研究等比数列求和公式的全过程，体会到数学家们在发现和推导时的思维方式，并在小组中进行碰撞、归纳、展示，让课堂变得更加自主、生动，从而使学生们敢于面对挑战，激发他们对数学的热爱和自信。而且，PME 注重学以致用，通过让学生动手实践，观察和总结等比数列前 $n$ 项和的规律，可以促进他们的数学思维和发现能力，培养他们的自主学习和解决问题的能力。总体而言，将 PME 与 HPM 相结合对等比数列的作用是积极的，有助于提高学生的数学学习兴趣和学习效果。

### 3.3. HPM 与 PME 运用方式分析

等比数列前 $n$ 项和的课堂教学是将 HPM 与 PME 结合后融入课堂：采用了复制，顺应和重构的方式来运用数学史和数学教育心理，从而更丰富地开展课堂教学活动。

课堂开始通过复制数学历史，以古埃及数学名题“纸草问题”为例导入课堂环节，在学生感受数学史风趣内在的同时，帮助学生理解教学内容，激发学生对数学的兴趣和好奇心，营造积极的学习氛围。其次在等比数列求和公式的探索与发现环节，充分理解数学史上推导求和公式的归纳猜想法、提取公比法、等比定律法之间的关系，环环相扣地推导出公式，运用顺应式数学史融入教学中，培养其逻辑思维和问题解决能力，建构数学思想，深入理解数学概念。接下来的课堂上采用重构法分析整个探究与发现过程，通过错位相减法和掐头去尾法的方法进行总结，将公式进行变形，再逐步地增加变化公比，从中归纳猜想出一般性的规律方法，进而运用到公比为 $q$ 的数列，从中体悟由熟知到未知的转化，让学生逐步参与到发现和探索中，激发学习动机和学习兴趣；另一方面，将 $S_n = a_1 + q\left(S_n - a_n\right)$ 式子进行移项合并，围绕一个核心打造求和公式的推导，让学生体会到数学家们在发现和演绎的过程中所产生的思维，并且在小组讨论中进行碰撞、归纳，从而使课堂变得更为自主、生动。

## 4. 结语

等比数列具有悠久的历史，数列的发展历程不仅反映了人类对数学规律的探索和认识，也反映了数学在历史进程中的重要作用，有助于培养学生的抽象思维、逻辑推理等核心素养。该课例的教学片段通过数学史导入新课，利用五种推导方法得到等比数列前 $n$ 项和公式，并通过 PME 视角分析 HPM 对学习该内容的作用及机理，使学生体会数学家们当时的思维方式并收获数学知识。将 HPM 和 PME 结合后应用于实际教学中是积极有效的，教师可以更好地满足学生学习需求，提高课堂教学效果，激发学生对数学的兴趣。

该研究以期能够为教育工作者提供启示，引导他们更深入地理解和运用 HPM 和 PME 的理论，为数学教学注入更多数学史和心理学的元素，提升教学的质量和效果。同时，期待未来能有更多的研究关注 HPM 与 PME 结合后在更多数学教学中的应用，为数学教育领域的发展贡献更多有益的探索和成果。

## 参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[2] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[3] 王海青. 数学史视角下“正弦定理”和“余弦定理”的教学设想[J]. 教学与管理, 2017(28): 67-69.

[4] 李士錡. PME: 数学教育心理[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2001: 6.

[5] 喻平, 徐文彬. PME 关于数学教师专业发展的研究及启示[J]. 数学通报, 2012, 51(5): 6-11.

[6] 王雪, 李中平. PME 视角下的数学概念教学设计框架[J]. 中学数学, 2023(17): 18-20.

[7] 冯晓华, 袁敏. 关于 HPM 和 PME 结合的研究[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2005(5): 661-664.

[8] 徐章韬. 架 HPM 与 PME 沟通之桥[J]. 数学通报, 2017, 56(3): 1-3, 10.

[9] 李玲, 徐章韬. 正态分布的教学设计: 从历史中寻找学生认知生长点[J]. 数学教育学报, 2023, 32(2): 12-17.

[10] 柴有茂. 核心素养引领下的“等比数列”教学设计[J]. 当代教育与文化. 2018, 10(3): 85-88.

[11] 吴现荣, 宋军. HPM 视角下的等比数列前 n 项和公式教学[J]. 数学通报, 2016, 55(7): 28-31+34.

[12] 陈德燕. 基于情境、问题导向的探究体验式课堂教学实践——以“等比数列的前 n 项和”教学为例[J]. 数学通报, 2020, 59(4): 35-38+42.

[13] 汪晓勤. 纸草书上的数列问题[J]. 数学教学, 2010(1): 29-31.

[14] 汪晓勤. 从古希腊几何难题引出的数学问题[J]. 数学通报, 2021, 60(3): 8-12+17.

[15] 张勤, 李德安. 数学史融入中学数学教学初探——以“等比数列求和公式推导”为例[J]. 数学通讯, 2016(4): 23-25.

[16] 蔡东山, 翟鑫婷, 沈中宇. HPM 视角下的等比数列求和公式教学[J]. 数学教学, 2019(9): 8-12.