

基于课题式教学理论的“函数的概念”片段教学设计探析

郑凌凤¹, 赵育林¹, 何雅晴², 李佳有³

¹湖南工业大学理学院, 湖南 株洲

²长沙县天华中学, 湖南 长沙

³丁青县第二初级中学, 西藏 昌都

收稿日期: 2024年5月10日; 录用日期: 2024年7月2日; 发布日期: 2024年7月11日

摘要

函数是初中最为重要且抽象的概念, 学生对于函数概念理解存在极大误差, 因此基于课题式教学理念, 通过梳理函数概念的发展历程, 挖掘函数概念的本质, 在课堂教学中引导学生感知运动变化过程, 理解函数的本质——对应, 生成函数的概念, 为初中函数概念教学提供一种新的尝试。

关键词

函数的概念, 课题式教学, 函数教学, 再创造

Exploration of Teaching Design for the “Concept of Functions” Fragment Based on the Theory of Project-Based Teaching

Lingfeng Zheng¹, Yulin Zhao¹, Yaqing He², Jiayou Li³

¹College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan

²Changsha County Tianhua Middle School, Changsha Hunan

³Dingqing County No.2 Junior High School, Changdu Tibet

Received: May 10th, 2024; accepted: Jul. 2nd, 2024; published: Jul. 11th, 2024

Abstract

Function is the most important and abstract concept in junior high school, and there is a great error in students' understanding of the function concept. Therefore, based on the concept of project-

文章引用: 郑凌凤, 赵育林, 何雅晴, 李佳有. 基于课题式教学理论的“函数的概念”片段教学设计探析[J]. 创新教育研究, 2024, 12(7): 23-29. DOI: 10.12677/ces.2024.127424

based teaching, by sorting out the development of the function concept, digging out the essence of the function concept, and guiding the students to perceive the process of movement and change in classroom teaching to understand the essence of the function-correspondence, the concept of function is generated, so as to provide a new attempt for the teaching of the concept of function in junior high school.

Keywords

Concepts of Functions, Project-Based Teaching, Function Teaching, Reinvention

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

课题式教学[1]是教师通过对于数学史的研究,依据知识结构与知识发展历程,在理清数学知识是如何产生的,发展过程中经历了哪些重要阶段,具有哪些重要价值,蕴含哪些重要数学思想等问题的基础上,将数学内容设计为数学课题进行研究,并将研究成果运用于课堂教学的一种教学模式。而在进行课题研究时,往往创造出来的是学术形态的数学知识,当进行课题式教学时,教师需要将学术形态的数学知识进行教育形态化,要依据数学史与学生的数学现实和生活经验,重新构造适合学生的问题情境展开教学,在课堂上引导学生围绕知识产生的本原性问题与派生性问题,通过问题驱动的方式,确保学生历经知识产生的几个关键阶段,完成知识真正意义上的“再创造”,并随着一个个数学课题的完成,让学生能够掌握整体性知识,理解知识产生的重要性,体会其价值与思想,其基本架构[2]如图1所示。

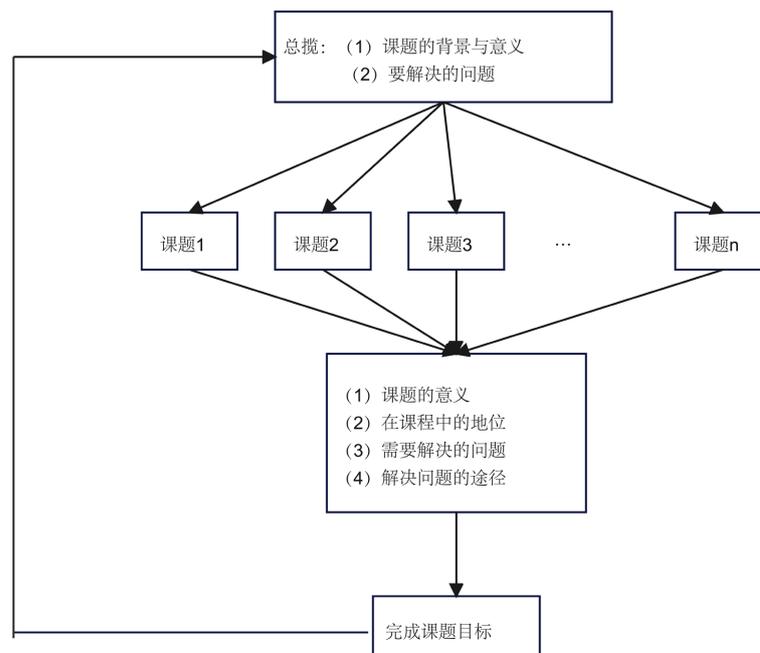


Figure 1. Basic architecture of project-based teaching method
图1. 课题式教学法基本架构

函数概念是初中学生接触到的第一个抽象概念，八年级学生虽然已经从具体形象思维逐步过渡到抽象逻辑思维，但其抽象逻辑思维还有待发展；加上第一次接触函数概念，从原来学习过的对“数”的研究转向对“变量”的研究，总会觉得函数概念晦涩难懂。有研究表明多数学生没有办法理解函数概念的本质，认为只有表示两个量关系的方程或者代数式才是函数，并且认为函数一定要有规律，能够用解析式进行表达[3]。根据历史发生原理，学生在数学学习过程中的个人认知障碍与科学知识发展过程中所遇到的障碍具有很高的相似性[4]。而课题式教学从数学史出发，追溯知识产生的本原性问题，将其运用于函数概念课堂教学，学生能够经历类似函数概念产生与发展的几个重要阶段，在课堂上“再创造”函数概念，从中明晰函数概念提出的价值，理解函数概念的本质，体会函数所蕴含的思想，发展学生的函数思维。因此我们基于课题式教学理论对于“函数的概念”这一课时的新知讲授部分进行片段教学设计，希望能够为函数概念教学提供一种新的思路与尝试。

2. 函数概念的发展历程分析与教学启示

函数概念伴随着数学的发展，不断地改进与精细化，其产生源于人们对于各种各样运动的研究，在研究过程中受到笛卡尔的变量思想的启发，便引出了函数的概念。莱布尼兹在17世纪末引入了函数的概念，起初他将函数定义为 x 的幂，而后指出与曲线上相关的像曲线上的点的纵坐标、横坐标等六个量称为函数[5]。该定义被称为函数的“幂”定义。

1718年，约翰·伯努利把变量和常量以任何方式组成的量叫“ x 的函数”，其中包括了代数式子与超越式子。1748年欧拉指出函数就是由常量与变量组成的解析表达式，欧拉的观点被大多数人所认同，“解析式说”成为了这时候的主流观点。

1775年，欧拉提出了函数的另一个定义，即当两个变量，一个变量随着另一个变量的变化而变化时，称前面这个变量为后面这个变量的函数。该定义强调了两个变量之间的变化依赖关系，表示函数是否通过解析式表达都是无关紧要的，对于人们认为函数必须能够用解析式表达的观点造成的冲击，此时函数概念处于“变量依赖说”阶段。

德国数学家狄利克莱于1837年指出如果对于 x 的每一个确定的值，都存在唯一确定的一个 y 值与之对应，就称 y 是 x 的函数。该定义强调和突出了函数概念的本质，即对应思想，抛弃了之前定义中的一些思想束缚，这就是人们常说的函数的经典定义，被称为“变量对应说”，人教版初中数学教材中的定义就与之相似。

19世纪康托尔创建了集合论，函数概念进入了集合论的范畴，使得函数概念更加清晰与准确，应用更加广泛。

由上可知，函数概念产生源于对运动过程中两个变量之间关系的研究，因此在教学过程中，应让学生也去感知运动变化这一过程，以此体会提出函数概念的必要性。并且，函数概念在发展历程中主要经历了从“幂”定义到解析式说，再到变量依赖说，再到变量对应说，最后进入集合论说阶段，每一次的发展进步都是对函数概念本质进一步的概括与深化。因此根据函数概念的发展历程，基于课题式教学理论的“再创造”思想，函数概念课堂教学应让学生经历函数概念生成的几个重要阶段，以此加深学生对于函数概念对应的本质的理解，并在此过程中引导学生自主生成函数概念，完成函数概念的“再创造”。

3. “函数的概念”课题式教学片段教学设计

根据知识产生背景与学生的“数学现实”，基于课题式教学理论对“函数的概念”这一课时进行片段教学设计，函数概念的教学应以感受运动与变化过程，理解函数对应的本质，生成函数概念为设计路线，创设与学生生活相关的情境，以问题驱动的教学方式进行课堂教学。

问题情境 1: 播放视频, 一列高铁列车以 300 km/h 的速度匀速行驶, 行驶时间为 t h, 行驶路程为 s km。
 s 与 t 之间存在怎样的关系?

问题 1: 请根据你所列出的关系式, 完成以下表格(见表 1), 说一说你发现两个变量之间还存在怎样的关系?

设计意图: 高铁是学生外出时容易接触到的交通工具, 以高铁行驶时间与路程的关系这一情景引入符合学生的生活实际。在此情境中, 学生可以得到时间与路程的关系式为 $s = 300t$, 此时学生认知处于函数概念发展的“解析式说”阶段。教师播放视频以便于学生感知运动变化过程, 而通过清晰明了的表格可以让学生发现时间取定一个值时, 路程的值也唯一确定, 以此为揭示函数概念的本质奠定基础。

Table 1. Table of the relationship between high-speed rail travel distance and time

表 1. 高铁行驶路程与时间关系表

| | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|-----|
| 时间 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
| 路程 | | | | | | ... |

问题情境 2: 飞机的起源可以追溯到人类对于飞行的渴望, 在 19 世纪末期莱特兄弟通过研究鸟类的飞行原理设计出了飞机, 实现人类历史上第一次有人驾驶的飞行, 飞机的出现也给我们的生活带来了极大的便利, 图 2 是某架飞机起飞后高度 y 与时间 x 的关系图, 请你仔细观察, 说一说你有什么样的发现。

问题 2: 请根据黑板上图像与老师一起完成以下表格(教师移动点 R, 学生填写表 2), 并联系问题情境 1, 说一说你的发现。

Table 2. Table of time altitude relationship during aircraft takeoff

表 2. 飞机起飞时时间与高度关系表

| |
|----|
| 时间 |
| 高度 |

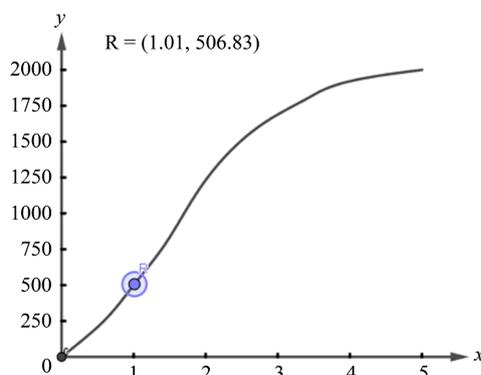


Figure 2. Aircraft takeoff route map

图 2. 飞机起飞路线图

设计意图: 此处还是以学生熟悉的运动变化问题情境展开, 但是学生发现此处两个变量之间的关系无法用关系式进行表示, 这时便引发了学生的认知冲突, 激发学生的求知欲。问题 2 中教师引导学生观察图像和填写表格, 学生可以发现当时间变化时, 其高度也在随之变化, 此时学生认知处于函数概念发展的“变量依赖说”阶段, 而且当时间确定时, 飞机飞行的高度也是确定的, 学生从中便能感知问题情境一、二之间两个变量关系的共同点。但还存在一个问题, 就是当多个不同的 x 值对应同一个 y 值时,

这一情况还未得到辨析，因此还需要创设情境进行解决。

问题情境 3: (利用几何画板播放摩天轮转动动画, 如图 3 所示) 摩天轮是游乐园最受欢迎的项目之一, 在摩天轮上, 游客可以俯瞰整个游乐园的美景, 同时感受高空中的惊险与刺激。下表(见表 3)为某游乐园摩天轮高度 h m 与时间 t min 之间的关系。

问题 3: 从表格中你有什么发现?

问题 4: 请你观察一下, 这里的 x 值确定的时候, y 值是否确定下来了?

Table 3. Table of time and height relationship during Ferris wheel rotation

表 3. 摩天轮旋转时时间与高度关系表

| | | | | | |
|----|----|------|----|------|----|
| 时间 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 |
| 高度 | 18 | 28.4 | 30 | 28.4 | 18 |

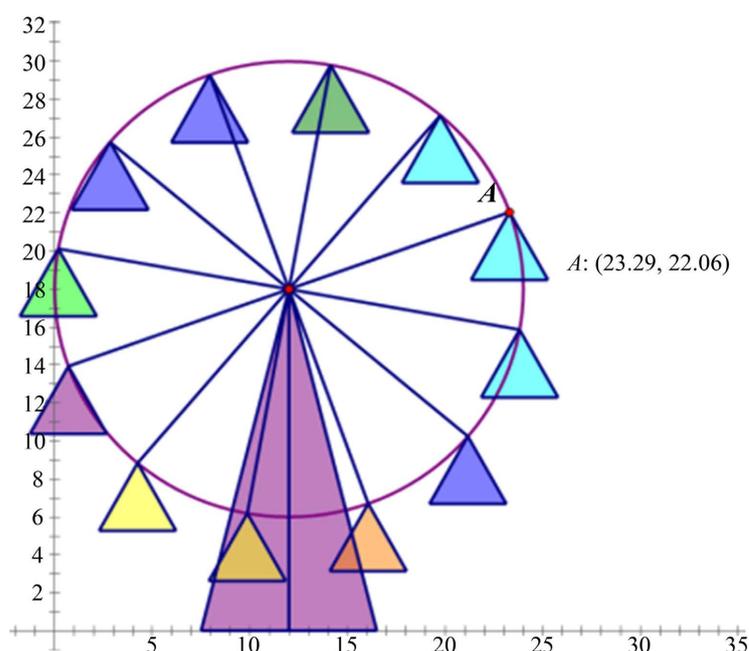


Figure 3. Animation diagram of Ferris wheel rotation

图 3. 摩天轮转动动画示意图

设计意图: 在此问题情境中, 通过动画的演示让学生感悟运动过程中两个变量的变化过程。但通过对表格进行观察, 学生能够发现两个变量之间的关系无法通过已有知识用关系式或者图像进行给出, 而且学生发现这里 x 值变化时, y 值有可能不发生改变, 例如这里当 x 取 6 或者取 18 时, y 均取 28.4, 这时学生就会产生疑惑, 此处两变量之间存在怎样的关系呢? 通过问题 4 的连续追问, 学生会自然地发现当 x 的值确定时, 此处 y 值也随之确定, 也就是说, 对于每一个确定的 x 值, 只有唯一的一个 y 值与之对应, 此时学生对于函数概念的认知处于“变量对应说”阶段, 这样便能逐步引导学生揭示函数概念的本质。

问题 5: 回顾我们以上三个情境, 你发现两个变量之间的关系, 我们可以怎样进行表示?

问题 6: 通过以上分析过程, 无论怎样表示两个变量之间的关系, 两个变量之间的关系存在怎样的共性?

设计意图: 通过对以上三个问题情境进行分析, 学生能够很快发现表示两个变量之间的关系, 可以用关系式、图像与表格三种方式, 但无论用哪种方式进行表示, 当 x 的值确定时, y 值也随之确定, 此时

教师揭示函数的概念：一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量 x 和 y ，并且对于 x 的每一个确定的值， y 都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 x 是自变量， y 是 x 的函数。如果当 $x = a$ 时 $y = b$ ，那么 b 叫做当自变量为 a 时的函数值。至此学生自主生成了函数的概念，完成对于函数概念的“再创造”过程，学生虽未接触数学史，但是却历经了函数概念发展的几个重要阶段，以此加深对函数概念本质的理解。

问题 7： $y = 1$ 是不是函数？

设计意图：面对这个问题，大多数学生会觉得它并不是一个函数，因为从其解析式来看它只有一个变量，但如果用表格或者图像进行表示，再从函数概念的本质出发，就会发现此处对于确定的每一个 x 值，均有一个确定的 y 值与之对应，只不过这里的 y 值均为 1，所以它是一个函数。此问题可以让学生巩固函数概念，进一步掌握函数概念的本质，并且渗透数形结合的思想，提升学生多角度解决问题的能力，发展学生的数学学科核心素养。

4. 教学思考

4.1. 感知运动与变化过程

函数概念的产生源于人们对于运动过程的研究，在运动过程中发现两个变量之间的关系，以此建立概念。课题式教学指出，课堂教学要遵循知识发展的历史，抓住知识产生的本原性问题。而因为函数概念的抽象性，需要大量实例支撑促进学生对于概念的理解。因此在本节教学设计中，创设了三个问题情境：高铁运行、飞机起飞以及摩天轮的转动，均是学生生活中能够接触到的运动情境，从中提出数学问题符合学生的“数学现实”和知识的发展过程。此外，通过播放视频，运用 GeoGebra、几何画板等让学生感知运动过程中两个量的直观变化过程，加深学生对于函数是用于刻画客观世界运动变化的模型的理解。

4.2. 理解函数对应的本质

函数概念的本质即 x 与 y 之间的单值对应关系，学生只有在掌握了函数概念本质的前提下，才能促进之后函数内容的学习。本节教学设计在三个问题情境中，均利用表格清晰明了的特性，引导学生发现无论用什么方式表达两个变量之间的关系， x 与 y 的值均是一一对应的，如此自然的让学生从问题的分析、解决过程中抽象出函数概念的本质，加深概念的理解。

4.3. 自主生成函数概念

在课题式教学理念^[1]的指导下，课堂教学要让学生经历知识产生与发展的几个重要阶段，确保学生经历数学知识“再创造”的“仿真”过程，让学生能够像数学家创造知识时那样思考，与思想进行对话。本节教学设计在研究函数概念产生背景的前提下，让学生经历类似函数概念发展的“解析式说”到“变量依赖说”再到“变量对应说”几个阶段，从一开始的解析式表达两个变量之间的关系，再到无法用解析式表达，从图像中发现两个变量的依赖关系，最后到图像和解析式均无法表达，而从表格中发现两个变量之间的对应关系，让学生在认知冲突中解决问题，经历类似数学家一样火热的思考，以此对函数的概念进行“再创造”，而教师在此过程中只起到引导作用，更多的是学生自己的思考、感悟与总结。

基金项目

湖南省教育厅 2022 年普通高等学校教学改革研究重点资助项目“‘一流专业’背景下数学与应用数学专业建设的模式创新与实践研究”（编号：HNJG-2022-0195）。长沙县教育科学“十四五”规划课题资

助项目“TPACK 理论下 GeoGebra 软件在高中函数教学中的应用研究”(编号: CSXJK202344)。

参考文献

- [1] 沈威, 曹广福. 中学数学课题式教学概述[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2020(8): 62-66.
- [2] 曹广福, 刘丹. 课题式教学法探析[J]. 数学教育学报, 2020, 29(3): 32-36.
- [3] 陈蓓蓓. 初中函数概念的教学设计研究[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中师范大学, 2021.
- [4] 徐理宜, 陈算荣. 基于历史发生原理下的初中函数概念教学[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2019(18): 16-17.
- [5] 陈中. 函数概念的历史演变[J]. 数学通报, 1992(10): 31-33.