

基于GeoGebra的数学分析可视化教学设计

梁韵红, 冯麒元, 徐俊峰*

五邑大学数学与计算科学学院, 广东 江门

收稿日期: 2024年6月2日; 录用日期: 2024年7月12日; 发布日期: 2024年7月23日

摘要

随着教育信息化的迅猛发展, 新一代的教师在充分运用各种多媒体教学资源的同时, 也不得不面对时代所带来的挑战。在数学教育领域, 信息技术与数学学科教学的紧密结合能够创造出一种富有创新性的教学环境。运用信息化手段可以将数学知识变得更加形象、具体和动态, 从而充分展示数形协同的过程。本文探索基于GeoGebra软件对数学分析中抽象的概念进行可视化教学实践。

关键词

数学分析, GeoGebra软件, 可视化

Visual Teaching Design for Mathematical Analysis Based on GeoGebra

Yunhong Liang, Qiyuan Feng, Junfeng Xu*

School of Mathematics and Computational Science, Wuyi University, Jiangmen Guangdong

Received: Jun. 2nd, 2024; accepted: Jul. 12th, 2024; published: Jul. 23rd, 2024

Abstract

With the rapid development of educational informatization, the new generation of teachers have to face the challenges brought by the times while fully utilizing various multimedia teaching resources. In the field of mathematics education, through the close integration of information technology and mathematics subject teaching, we can create an innovative teaching environment. By utilizing information technology, we can make mathematical knowledge more vivid, concrete, and dynamic, thus fully demonstrating the process of mathematical collaboration. This article explores the visual teaching practice for abstract concepts in mathematical analysis based on GeoGebra software.

*通讯作者。

文章引用: 梁韵红, 冯麒元, 徐俊峰. 基于 GeoGebra 的数学分析可视化教学设计[J]. 创新教育研究, 2024, 12(7): 323-333. DOI: 10.12677/ces.2024.127469

Keywords

Mathematical Analysis, GeoGebra Software, Visualization

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着信息时代的到来, 社会各领域都面临着新的挑战, 与此同时, 教育理念和教学模式也迎来了新的发展机遇, 而在数学教育领域中, 信息技术与数学教学的有效结合, 创造了一种新型的教学环境, 这种环境让学生在掌握课本知识的基础上, 能够主动学习、深入思考和探索[1]。信息化技术的运用, 使得数学知识更加生动和直观, 从而充分展示了数形结合的过程。这一一体化, 既包括了课程内容与课堂教学的技术与资源的整合, 也包括了与数学教学、学习等各个层面的整合。

数学分析是数学专业中一门至关重要的基础课程, 其特性包括学习周期长、知识点众多、难度高以及理论抽象等。该课程主要依靠象征性的语言来表达, 它的形式化、象征性的特征, 让一些学生感到枯燥无味, 很难激起他们的学习兴趣。但是, 不能忽视数学分析在以后的学习中所起的作用, 其严谨的思维风格, 在培养学生高级思维、提高问题解决能力方面起着至关重要的作用。然而, 在教学活动中, 如果教师只使用传统的教学方法, 比如手画图形, 这样的静态图像可能不够生动直观, 可能会减少学生的参与感和兴趣。因此, 教师应探索更具创新性和吸引力的教学策略, 以提高学生对学习的兴趣, 帮助他们更深入地理解和掌握数学分析中的关键概念和技巧[2]。对此, 在教学实践中我们需要借助可视化的方法和信息技术的手段来展示数学分析的内容, 让学生参与多媒体技术的实践, 贴近学生的现实生活, 体验数理概念和运算逻辑从深奥到简洁、从抽象到具体、从静态到动态的过程, 进而建立教师与学生合作探究的教学模式, 提高学生对数学分析的学习兴趣, 使学生不断钻研知识、不断突破自己, 实现从被动学习到主动学习的转变[3]。

GeoGebra 是一个自由开放的、集几何和代数为一体的动态教学软件, 为教育领域带来了独特的教学指导意义。这款软件在数学教学中具有极高的实用价值, 能够帮助学生更直观地理解数学概念, 提高学习效果。现已有很多中学教师利用 GeoGebra 软件进行辅助教学, 这不仅可以为师生提供了一个交互式实验平台, 从抽象与可见形式结合的视角进行教学实践, 为理论和图形展示相结合的教学提供了强有力的载体, 还可以激发学生强烈的求知欲望、促进学习效果提升。

借助集合几何与代数功能的动态数学软件 GeoGebra, 为数学分析课程的理论与图形展示相结合提供了强大的教学平台, 改变传统的教学手段, 静态的手绘图形向直观的动态演示的展示进行变换, 可建立起数与形的联系, 得到数与形的有机结合, 实现抽象与具体之间的转变, 还有助于学生对数学分析中的一些概念、定理的了解与掌握, 有助于学生突破重点、难点, 从而有效地提高教学效果, 改变学生的学习方法。

2. GeoGebra 软件在数学分析的教学设计

2.1. GeoGebra 软件在函数极限定义的教学设计

1) 函数极限定义

函数极限定义($\varepsilon - \delta$ 语言)的具体内容为设 f 为定义在 $[a, +\infty)$ 上的函数, A 为定数。若对任给的($\varepsilon > 0$),

存在正数 $M (\geq a)$ ，使得当 $x > M$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称函数 f 当 x 趋于 $+\infty$ 时以 A 为极限，记作 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty)$ 。

2) 难点

函数极限定义的难点在于对无穷增大、无限接近以及函数图象的理解，传统教学方式是教师利用静态的展示图进行口述，这需要学生通过想象来理解概念，但在已经学习数列极限定义基础上，学生面对简单已学的函数可通过画图辅助自己理解函数极限定义并计算函数的极限，但若面对复杂未学的函数，学生很难通过自己画图来理解概念并计算，这时候动态的演示图比静态的展示图教学效果更好，会帮助学生很快理解函数极限，自然而然形成函数极限的定义。

与传统的静态展示相比，通过演示法和练习法等方法进行教学的效果更好，即利用 GeoGebra 软件进行演示函数的动态极限，并在课后通过布置作业帮助学生多练习和观察其他函数的极限过程，以及思考函数极限在其他学科的应用。

3) 步骤

在教学过程中，将 GeoGebra 软件与教科书中的例子有机地结合起来，是一种很好提高教学效果的方法。以下是具体的实施步骤，

① 命令区输入

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1};$$

② 创建滑动条 a ，区间为 $0 \sim 100$ ；

③ 在命令区分别输入 $A = (a, 0)$ ， $B = (0, f(a))$ ；

④ 在命令区输入 $p(x) = |f(x) - 1|$ ；

⑤ 在命令区输入 $C = (0, p(a))$ [4] (图 1)。

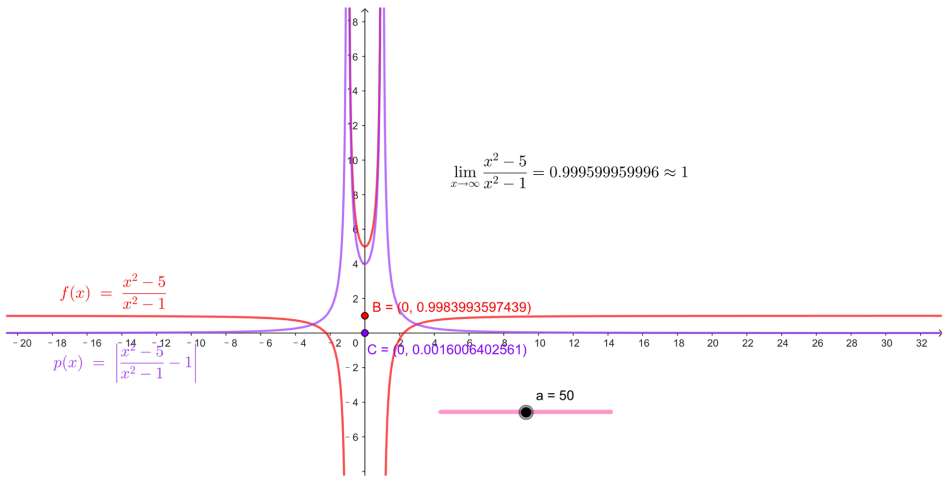


Figure 1. Visualization effect diagram of the limit of function $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1}$

图 1. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1}$ 的极限可视化效果图

4) 课时

在教学过程中，可以让学生先观察函数

$$f(x)=\frac{x^2-5}{x^2-1}$$

的图象，再拖动滑动条 a ，观察点 A 、 B 的移动趋势。学生可以直观发现， A 点表示 x 的变化， B 点表示函数 $f(x)$ 的变化。随着滑动条的拖动，即表示当 x 无穷增大时， B 点越来越靠近 $(0, 1)$ ，即函数 $f(x)$ 越来越靠近 1 这个数。另外，在拖动滑动条的过程中，学生还观察到函数 $p(x)$ 所表示的点 C 的变化趋势，随着 x 的无穷增大时，点 C 越来越靠近 $(0, 0)$ ，表示 x 趋于无穷大时，函数 $p(x)$ 趋于 0 这个数。通过这种直观、动态的图象展示，学生就很清晰知道 x 趋于无穷大时 $f(x)$ 的变化趋势以及函数 $f(x)$ 极限逼近的过程，此时他们可以得出一个结论：随着 x 的无穷增大， $f(x)$ 越来越接近 1，再通过 GeoGebra 软件计算函数的极限验证，我们可知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5}{x^2-1} = 1.$$

在授课过程中，为了让学生充分感受到无穷增大、无限接近的概念以及函数图象的直观展示，可以再按照上面步骤，在命令区输入其他函数表达式，让学生观察随着 x 趋于无穷大或者 x 趋于某个数时其他函数图象的趋势，例如 $x \rightarrow 2^-$ 时 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 图象的趋势(图 2)。

在这种动态演示的直观感受下，学生可以得出“随着 x 的无穷增大或者趋于某个数时，函数越来越接近一个数”这一结论，自然而然他们就很容易形成函数极限的概念。

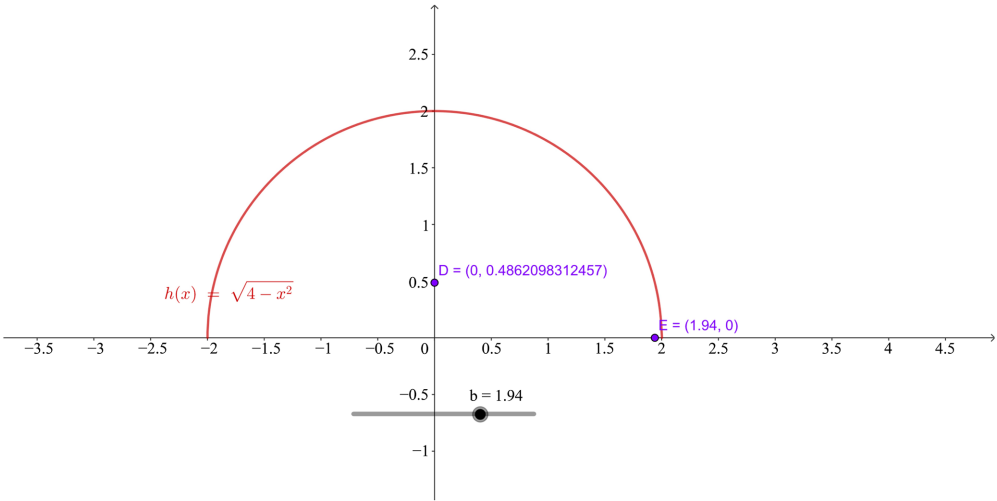


Figure 2. Visualization effect diagram of the limit of function $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

图 2. 函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 的极限可视化效果图

5) 课后

课后，可以让学生结合相关作业，运用 GeoGebra 软件来演示和理解作业中的函数图象及极限计算。这样做可以使学生更直观地掌握各种函数的图象和极限计算过程，从而深化对函数极限概念的理解，有助于学生积累相关的知识和经验，为学生后面的课程学习奠定了基础。

另外，还可以让学生课后研究利用 GeoGebra 软件在高中物理教学中关于函数极限的应用，如电源输出功率 $P_{\text{出}}$ 随外电阻 R 的变化情况，即根据 GeoGebra 软件上 $P_{\text{出}}$ 对应的具体函数图象来观察随着 R 的变化， $P_{\text{出}}$ 的特殊值以及区域变化，进一步还可以研究电源内电阻 r 的功率 P_r 、闭合电路的总功率 P 、电源的效率 η 随外电阻 R 的变化[5]。

2.2. GeoGebra 软件在二重积分上的教学设计

2.2.1. 二重积分的概念

1) 定义

设 $f(x, y)$ 是定义在可求面积的有界闭区域 D 上的函数。 J 是一个确定的数, 若对任给的正数 ε , 总存在某个正数 δ , 使对于 D 的任何分割 T , 当它的细度 $\|T\| < \delta$ 时, 属于 T 的所有积分和都有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i - J \right| < \varepsilon,$$

则称 $f(x, y)$ 在 D 上可积, 数 J 称为函数 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分, 记作

$$J = \iint_D f(x, y) d\sigma,$$

其中 $f(x, y)$ 称为二重积分的被积函数, x, y 称为积分变量, D 称为积分区域。

2) 难点

在二重积分定义的教学中, 教师大多通过求解曲顶柱体的体积进行引入二重积分的概念, 这一求解过程的思想方法与定积分概念的引例类似, 也是通过“分割、近似求和、取极限”这三个步骤得到, 所不同的是定积分概念是在二维图形上讨论, 但二重积分概念是在三维图形上讨论, 这就需要学生想象过程。这源于二重积分的几何意义, 即曲顶柱体的体积计算, 具体过程如下: 首先, 将曲顶柱体的底部区域分割成若干个小区域; 然后, 在每个小区域上, 用平顶的柱体来近似替代曲顶柱体; 接着, 计算这些平顶柱体的体积; 最后, 对所有小平顶柱体的体积进行求和, 并取极限, 从而得到曲顶柱体的体积, 这一过程也正好构成了二重积分的定义[6]。

在求曲顶柱体的体积时用小平顶柱体作为小曲顶柱体的近似值时, 小平顶柱体在传统的教学方式是通过静态的图展示给学生, 不能直观展示动态的、可以拖动不同角度观察的图。在求曲顶柱体的体积时用小平顶柱体作为小曲顶柱体的近似值, 但是小平顶柱体难以通过静态图展示各个角度的图形, 而 GeoGebra 软件可以演示一个小平顶柱体, 甚至多个小平顶柱体的动态过程。

3) 步骤

在授课过程中, 结合求解曲顶柱体的体积这一例子并利用 GeoGebra 软件动态演示“分割、近似求和、取极限”这一过程, 具体步骤如下:

① 打开 3D 绘图区, 在指令区输入

$$f(x, y) = 4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16};$$

② 打开绘图区, 在指令区分别创建整数滑动条 n, k , 区间为 1~20;

③ 在指令区分别输入直线 $x = 0, y = 0$, 命名为 a, b ;

④ 在直线 a, b 上描点, 分别命名为点 C 、点 A ;

⑤ 分别在 x 轴和 y 轴创建单位向量, 命名为 u 和 v ;

⑥ 在指令区分别输入射线(A, u), 射线(C, v), 命名为射线 c 和射线 d ;

⑦ 在射线 c, d 上描点, 分别命名为点 B 、点 D ;

⑧ 在指令区分别输入

$$\begin{aligned} E &= (x(A), y(C)), F = (x(B), y(C)), \\ G &= (x(A), y(D)), H = (x(B), y(D)); \end{aligned}$$

⑨ 在指令区分别输入线段 DG , 线段 CE , 线段 EA , 线段 FB , 线段 GH , 线段 HF , 线段 FE , 线段 EG ;

⑩ 在指令区分别输入

$$\text{序列} \left(\text{线段} \left(\left(x(E), y(E) + \frac{y(G) - y(E)}{n} t \right), \left(x(F), y(E) + \frac{y(G) - y(E)}{n} t \right) \right), t, 1, n \right),$$

$$\text{序列} \left(\text{线段} \left(\left(x(E) + \frac{x(F) - x(E)}{n} t, y(E) \right), \left(x(E) + \frac{x(F) - x(E)}{n} t, y(G) \right) \right), t, 1, n \right);$$

⑪ 在指令区分别输入

$$\text{余式}(k, n), \text{floor}\left(\frac{k}{n}\right),$$

命名为 e, o ;

⑫ 在指令区输入

$$L = \left(x(E) + \frac{e(x(F) - x(E))}{n}, y(E) + \frac{o(y(G) - y(E))}{n} \right);$$

⑬ 在指令区输入

$$\text{多边形} \left(\begin{array}{l} \left(x(L), y(L) \right), \left(x(L) + \frac{x(F) - x(E)}{n}, y(L) \right), \\ \left(x(L) + \frac{x(F) - x(E)}{n}, y(L) + \frac{y(G) - y(E)}{n} \right), \\ \left(x(L), y(L) + \frac{y(G) - y(E)}{n} \right) \end{array} \right),$$

命名为四边形 $q1$;

⑭ 在指令区输入

$$\text{棱柱}(q1, f(x(L), y(L)));$$

⑮ 在指令区输入

$$\text{点 } P = (x(L), y(L), f(x(L), y(L)));$$

⑯ 在指令区输入

$$\text{序列} \left(\text{序列} \left(\text{棱柱} \left(\text{多边形} \left(\begin{array}{l} \left(x(E) + \frac{x(F) - x(E)}{n} t, y(E) + \frac{y(G) - y(E)}{n} s \right), \\ \left(x(E) + \frac{x(F) - x(E)}{n} (t-1), y(E) + \frac{y(G) - y(E)}{n} s \right), \\ \left(x(E) + \frac{x(F) - x(E)}{n} (t+1), y(E) + \frac{y(G) - y(E)}{n} (s+1) \right), \\ \left(x(E) + \frac{x(F) - x(E)}{n} t, y(E) + \frac{y(G) - y(E)}{n} (s+1) \right) \end{array} \right), \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left(f \left(x(E) + \frac{x(F) - x(E)}{n} t, y(E) + \frac{y(G) - y(E)}{n} s \right) \right) \right), s, 0, n-1 \right), t, 0, n-1 \right)$$

(如图 3，图 4 所示)

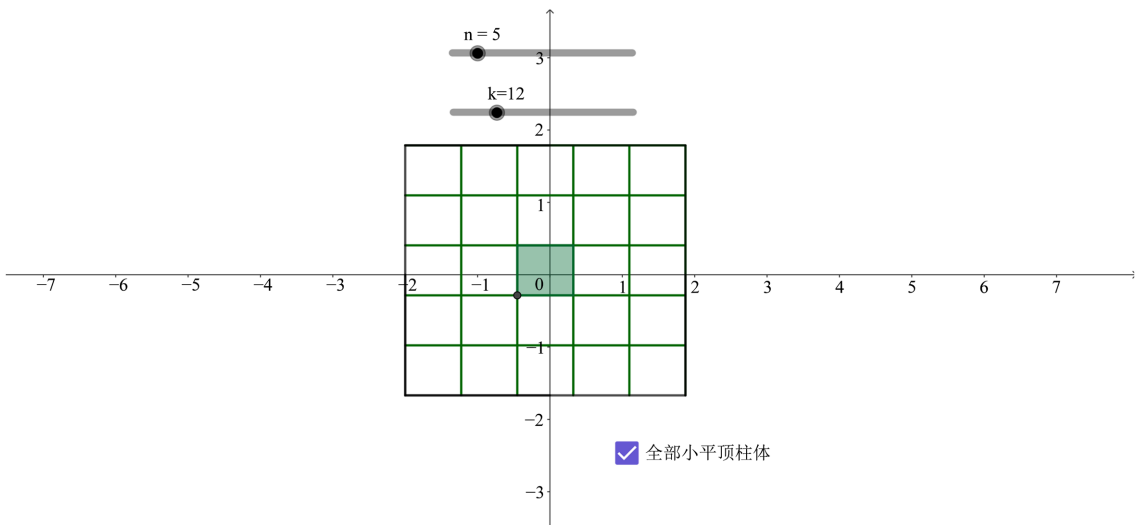


Figure 3. XOy plane diagram of a small flat top cylinder dividing a curved top cylinder
图 3. 分割曲顶柱体的一个小平顶柱体的 xOy 平面图

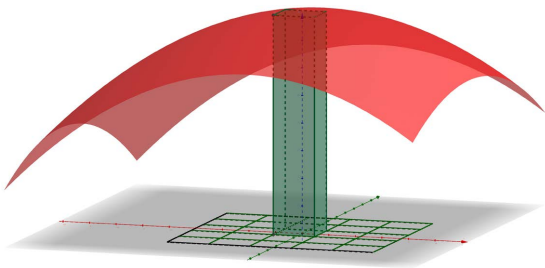


Figure 4. A small flat top cylinder that divides the curved top cylinder
图 4. 分割曲顶柱体的一个小平顶柱体

4) 课时

在教学中，学生会发现，二重积分的概念与定积分的概念体现出来的思想方法是相同的，同样是一个“分割，近似求和，求极限”的过程，教师可以通过演示法先给学生演示分割的小平顶柱体的其中一个，再展示全部小平顶柱体(如图 5)，还可以转换各种角度展示小平顶柱体的各个细节。接着通过拖动滑动条 n ，改变分割的小平顶柱体的个数，形象地展示二重积分里的加细分割和取极限的过程[7]。学生通过“分割、近似求和、取极限”这一直观动态的演示，更加深刻理解二重积分概念的本质。

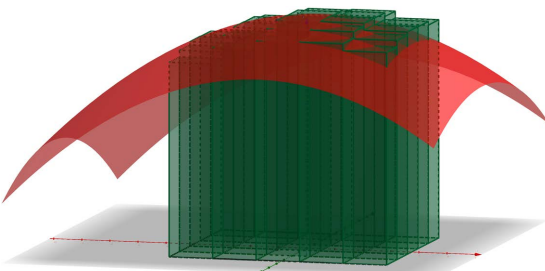


Figure 5. Demonstration diagram of all small flat top columns
图 5. 全部小平顶柱体的演示图

5) 课后

课后学生可根据这一动态过程,结合作业尝试自己验证其他曲顶柱体的体积。二重积分可以解决物理学与工程技术中的非均匀平面的质量、质心、转动惯量等问题,例如在解决空间物体 V 的转动惯量时,把 V 看作由 n 个质点组成的质点系,然后用取极限的方法求得 V 的转动惯量,这同样运用的是“分割,近似求和,求极限”的过程,学生可以进一步尝试演示验证二重积分的计算问题[7]。

2.2.2. 直角坐标系下二重积分的计算

1) 难点

对于一般区域,通常可以分解成 x 型区域或 y 型区域两类区域来进行计算。学生在计算直角坐标系下的二重积分时,经常面临区分区域 D 是 x 型区域还是 y 型区域的困难,同时也难以确定积分的上、下极限。除此之外,面对复杂的函数图象所围成的区域,学生难以理解所围区域的形状,导致后续的计算无法进行。所以,在教学过程中可结合课本实例并利用 GeoGebra 软件将所围成的区域画出来,帮助学生区分区域和找出积分的上、下极限。

2) 实例分析及步骤

例题 1: $\iint_D xy^2 d\sigma$, 其中 D 是由抛物线 $y^2 = 6x$ 与直线 $x = 1.5$ 所围成的区域;

例题 2: $\iint_D \sqrt{x} d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq x\}$ 。

具体步骤为:

① 在指令框输入 $\frac{1}{6}y^2 \leq x \leq 1.5$ (图 6);

② 在指令框输入 $x^2 + y^2 \leq x$ [8] (图 7)。

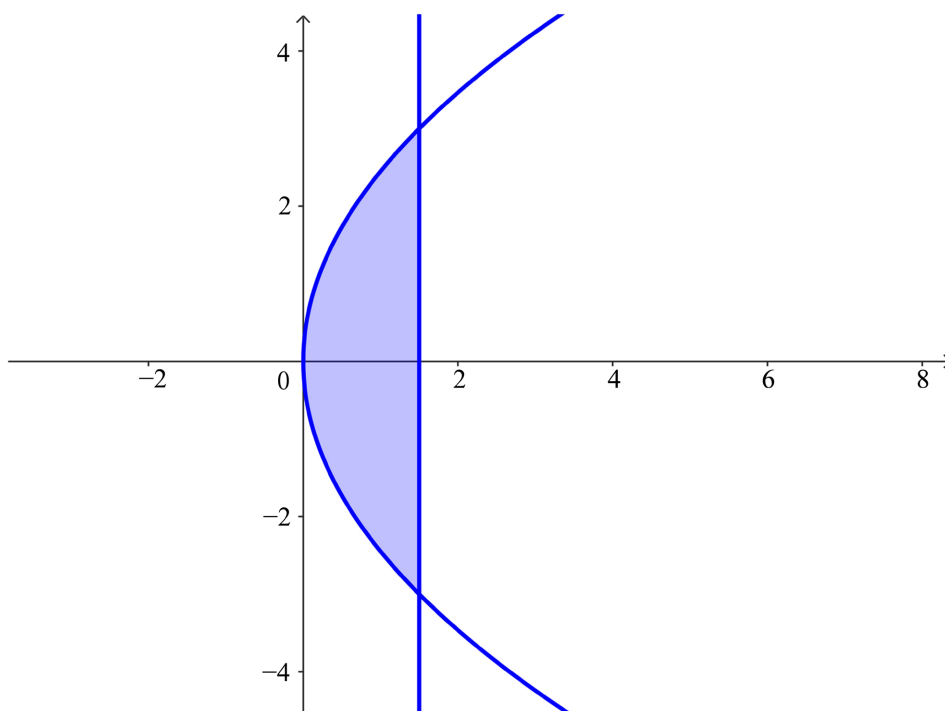


Figure 6. The area enclosed by $y^2 = 6x$ and $x = 1.5$

图 6. $y^2 = 6x$ 与直线 $x = 1.5$ 所围成的区域

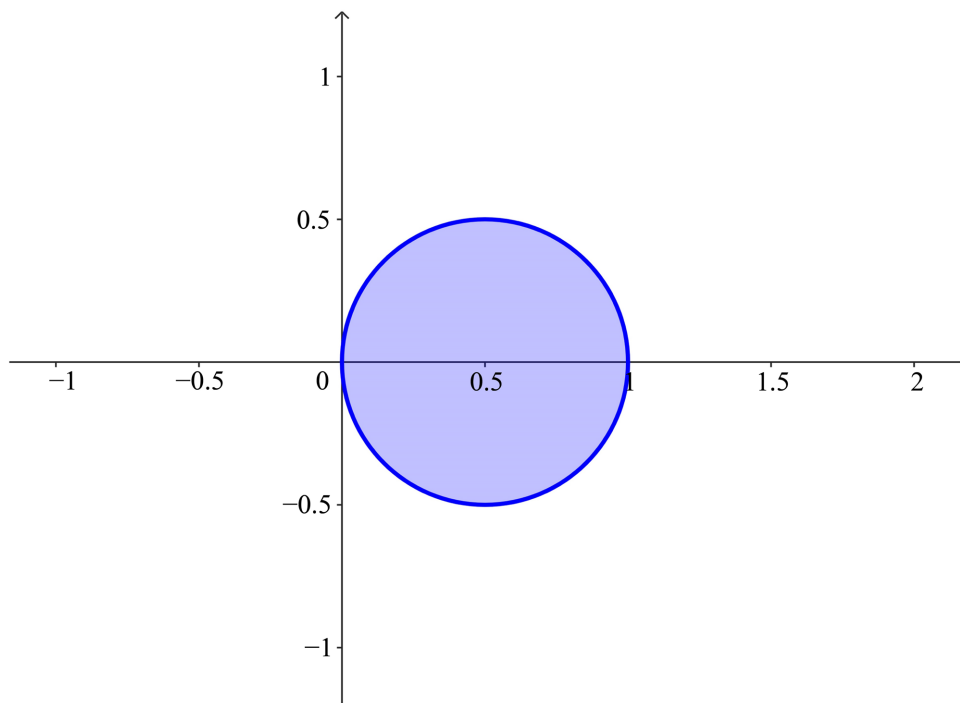


Figure 7. $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq x\}$

图 7. $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq x\}$

3) 步骤

在教学过程中, 将 GeoGebra 软件与教科书中的例子有机地结合起来, 是一种很好提高教学效果的方法。以下是具体的实施步骤:

在判断是 x 型区域或 y 型区域, 要先理解这两个区域的特点: 当 D 为 x 型区域时, 垂直于 x 轴的直线 $x = x_0$ ($a < x_0 < b$) 至多与区域 D 的边界交于两点; 当 D 为 y 型区域时, 直线 $y = y_0$ ($c < y_0 < d$) 至多与 D 的边界交于两点。在教学过程中, 让学生仔细观察这两个区域是 x 型区域或 y 型区域, 再思考积分的上下极限。通过观察图 6 和图 7, 可以把这两个区域当成 x 型区域。接下来确定积分的上下极限, 也就是 x 和 y 的范围, 根据例题给出的表达式和区域可得知,

例题 1 的区域为

$$D = \{(x, y) | -\sqrt{6x} \leq y \leq \sqrt{6x}, 0 \leq x \leq 1.5\},$$

例题 2 的区域为

$$D = \{(x, y) | -\sqrt{x-x^2} \leq y \leq \sqrt{x-x^2}, 0 \leq x \leq 1\}.$$

利用 GeoGebra 软件结合例题画出区域, 不仅在课堂上方便直观呈现出来, 而且与比传统教学方式的手绘图相比更节约时间, 提高教学效率。

4) 课后

课后学生可结合作业中的题目, 利用 GeoGebra 软件画出相关区域。另外学生可以根据课本例题尝试画出空间直角坐标系下的三维区域, 例如牟合方盖分成八瓣、维维安尼体等(图 8, 图 9), 再进一步根据 GeoGebra 软件展示图形的对称性特点, 利用二重积分和三重积分的分别求得其曲面的面积和体积[9]。在此过程中 GeoGebra 软件展示的图形直观展示了区域图形的特点, 简化了计算过程。

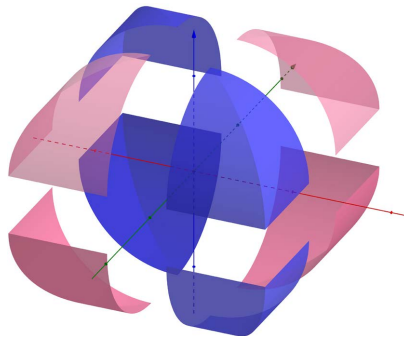


Figure 8. Mouhe square cover divided into eight petals
图 8. 牟合方盖分成八瓣

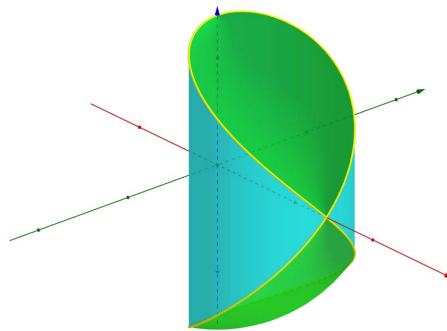


Figure 9. Viviani body
图 9. 维维安尼体

3. 研究总结

数学本科生师范生在现代教育技术课程学习了 GeoGebra 软件，并在教育实习期间使用 GeoGebra 软件，与高中数学相结合进行教学，可知 GeoGebra 软件可以提高教与学的效率，但大学数学教师反而目前在数学分析教学与现代教育技术融合不足，不符合当代所要求的数字化教育的趋势。由于文章篇幅有限，我们仅给出了部分案例，实际上，数学分析重要的知识点都通过 GeoGebra 软件展示。通过本文的研究实践，我们总结如下：

- ① “基于 GeoGebra 的数学分析可视化教学设计”是将数学分析教学与现代信息技术相融合的有效方式之一，不仅充分展示数与形的结合，实现抽象与具体之间的转变，还丰富了现代教育技术与数学分析教学融合的案例资源，为数学专业或高等数学的师生的教与学提供了参考。
- ② “基于 GeoGebra 的数学分析可视化教学设计”相较于采用传统教学模式，展现出显著的优势。GeoGebra 软件将复杂的数学对象简明化，将抽象的数学关系具体化，以及该软件不仅简单易上手，还准确性高。在教学过程中，将 GeoGebra 软件作为辅助工具，可以节省时间，还可以自由根据实际题目进行编辑相应的数学模型，提高教师的教学效率。
- ③ 笔者通过研究发现使用 GeoGebra 软件作为辅助工具进行数学分析教学能给学生学习数学分析提供一种新的学习方式和途径，以直观、动态的演示图指导学生对数学的概念、定理等进行更深层次的了解与掌握，从而使学生更好地掌握这些知识，提高学习效率。
- ④ 笔者通过课时和课后研究发现，利用 GeoGebra 软件结合例题或作业引导学生演示验证、课后探究，并一步一步引导学生演示和探究自己感兴趣的数学模型，激发学生的好奇心和求知欲，循序渐进实现“以老师为中心”向“学生为中心”的课堂教学模式之间的转变。

另外, 笔者在研究过程中有一定的局限性。笔者在分析课时和课后时, 可能所分析的教学过程和深度还不是很完整, 还需要进一步提升。以及笔者所掌握的技术有限, 即使 GeoGebra 软件功能强大, 笔者未能完全发挥 GeoGebra 软件在数学分析可视化上的优势。

笔者会在未来的教育过程中继续投入到 GeoGebra 软件与数学教学相结合的研究中去, 并不断学习相关的技术方法和专业知识, 积累教学经验, 增强对文献的阅读能力, 丰富 GeoGebra 软件辅助数学教学的案例资源库。

基金项目

国家一流本科专业建设点——数学与应用数学专业(教高厅函〔2021〕7号); 2021年度五邑大学线下一流课程建设项目《数学分析》(KC2021048)。

参考文献

- [1] 闫永芳. GeoGebra 软件在数学分析教学中的应用举例[J]. 北京印刷学院学报, 2021, 29(4): 131-134.
- [2] 李清微, 汤灿琴, 王利东. 基于 GeoGebra 软件的数学分析可视化教学探索[J]. 科教文汇, 2023(11): 66-70.
- [3] 路云, 褚鹏飞. GeoGebra 软件在条件极值问题求解中的应用举例[J]. 科技导刊, 2022(21): 59-62.
- [4] Baye, M.G., Ayele, M.A. and Wondimuneh, T.E. (2021) Implementing GeoGebra Integrated with Multi-Teaching Approaches Guided by the APOS Theory to Enhance Students' Conceptual Understanding of Limit in Ethiopian Universities. *Heliyon*, 7, e07012. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2021.e07012>
- [5] 陈达超. 教育数字化背景下的 GeoGebra 软件辅助高中物理教学研究[D]: [硕士学位论文]. 南昌: 江西师范大学, 2023.
- [6] 李建涛. 高等数学课程中基于 GeoGebra 软件的信息化教学[J]. 辽宁大学学报(自然科学版), 2021, 48(4): 381-386.
- [7] 韩华. 高等数学教学中学科融合的一些思考——高等数学与工程制图教学的结合[J]. 科学咨询(教育科研), 2023(6): 173-176.
- [8] Ziatdinov, R. and Valles, J.R. (2022) Synthesis of Modeling, Visualization, and Programming in GeoGebra as an Effective Approach for Teaching and Learning STEM Topics. *Mathematics*, 10, Article 398. <https://doi.org/10.3390/math10030398>
- [9] 张东海. 牟合方盖曲面的参数方程及其在 GeoGebra 中的应用[J]. 中学数学月刊, 2015(6): 48-50.