

Seminar研讨式教学在线性代数中的探索 ——以实对称矩阵为例

王志敏, 江会发, 刘东南, 刘霞文, 段 萌

湖南工业大学理学院, 湖南 株洲

收稿日期: 2024年6月3日; 录用日期: 2024年7月15日; 发布日期: 2024年7月24日

摘 要

线性代数是大学工科学生必修的公共课, 该课程与学生的专业息息相关, 采用Seminar研讨式教学法能开发学生的潜能, 提高学生的自学能力和研究能力。而实对称矩阵是线性代数课程中的一个重要内容, 在许多知识点的学习中起到了重要的作用。文章介绍了关于实对称矩阵的Seminar研讨式教学在泛函分析中的体现, 比如在运算上、定义上、特征值和特征向量上。

关键词

Seminar研讨式教学, 线性代数, 泛函分析, 实对称矩阵

Exploration of Seminar Discussion Teaching in Linear Algebra

—Taking Real Symmetric Matrices as an Example

Zhimin Wang, Huifa Jiang, Dongnan Liu, Xiawen Liu, Meng Duan

School of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan

Received: Jun. 3rd, 2024; accepted: Jul. 15th, 2024; published: Jul. 24th, 2024

Abstract

Linear algebra is a compulsory public course for college engineering students, which is closely related to their majors. The use of Seminar discussion teaching method can develop students' potential and improve their self-learning and research abilities. Real symmetric matrices are an important part of the course of linear algebra, which play an important role in the learning of many knowledge points. This article introduces the application of Seminar discussion teaching of real

symmetric matrices in functional analysis, such as in terms of computation, definitions, eigenvalues, and eigenvectors.

Keywords

Seminar Discussion Teaching, Linear Algebra, Functional Analysis, Real Symmetric Matrices

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Seminar 教学法是一种以学生为主体,充分发挥学生的主观能动性,使学生达到从多角度、多层次对知识点理解、吸收并运用的目的。Seminar 研讨式教学法是在老师的指导下,学生通过互相之间的交流,做出一些有价值的成果。这种教学法让学生进行了学术交流,感受了做研究的心态,提高了做学问的兴趣,从而一定程度上为日后大四的毕业论文打下基础。通常,在做学术时,创新是一个非常重要的点,而 Seminar 教学法能挖掘学生的潜能,让学生思维活跃,于是更能促进学生在学术上创新,从而在学术上有所成就。Seminar 教学法与深度学习教学法进行对比,深度学习教学法能让学习者积极地、批判性地学习新的知识,主动建构自己的知识框架[1],但却不能让学习者达到从多角度、多层次对知识点理解,以及不能达到让学习者更好地吸收知识点的目的。线性代数是高等学校理工科学生的重要必修课之一,也是大部分专业课程必备的数学基础课程[2]。将 Seminar 研讨式教学法运用到线性代数中能提高学生的自学能力和思维能力。

2. Seminar 研讨式教学设计——以实对称矩阵为例

实对称矩阵是线性代数中的一类重要矩阵[3],也是一类应用广泛的矩阵,很多科学问题的求解都离不开实对称矩阵[4]。实对称矩阵与矩阵对角化的内容紧密联系,而矩阵对角化又与矩阵的特征值、特征向量这一块密不可分。于是,根据实对称矩阵在线性代数中关于特征值、特征向量的结论,发现这些结论可以拓展到数学专业研究生课程—泛函分析中的自伴算子上。因此可准备一次关于实对称矩阵的 Seminar 研讨式教学。

2.1. 课前准备工作

对湖南工业大学电气工程专业和自动化专业的大二与大三学生都进行 Seminar 研讨式教学。对这些学生中每个班的本科生进行教学,一个班大概 40 人左右,分成 5 个小组。首先,从 5 个小组中选择一名代表。然后,对学生下达研究的目标。希望学生通过查找相关资料,寻找实对称矩阵与泛函分析中的自伴算子的异同点。最后,请每个小组的代表在课堂上利用 ppt 和板书向本班的所有同学阐述本小组的研究状况。在整个课前准备工作过程中,老师与学生保持通畅的联系,并对学生的研究情况进行跟踪和一定的指导。

2.2. 课堂研讨工作

我们将利用 90 分钟(两节课)的时间进行研讨。在 45 分钟的一节课上,7 个小组的代表先分别上台进行发言。等 7 位代表发言完,其余的学生可发言表达自己的观点,从而对 7 位代表所说的进行补充或修

改。一旦有学生发表言论,此时其余学生都可对此进行辩论。辩论的时间为 40 分钟左右。辩论完后,将进行教师总结。教师总结主要从下面三个角度进行总结。

1) 空间中的运算

线性代数中实对称矩阵的运算是在实数域下进行的,符合矩阵的运算性质。运算相对来说比较简单。而泛函分析中自伴算子的运算是在复的 Hilbert 空间下进行的。复的 Hilbert 空间指的是复数域上完备的内积空间。而内积空间中的运算是由向量之间做内积来定义的。因此自伴算子的运算要符合复数域上向量内积的运算性质。

2) 定义

在线性代数中,根据实数域上矩阵的运算,给出了实对称矩阵的定义:

定义 1: [5] 设 A 为 n 阶实方阵,若有 $A^T = A$, 则称 A 为实对称矩阵。

从上述定义中,可以发现实对称矩阵中元素是关于主对角线对称的。利用这一特点,可以得到许多有意思的结果。下面先介绍一下共轭算子的定义:

定义 2: [6] 设 H 是 Hilbert 空间, T 是从 H 到 H 的有界线性算子。由 Riesz 表示定理知,存在从 H 到 H 的有界线性算子 T^* 满足对任意 $x, y \in H$,

$$(Tx, y) = (x, T^*y)$$

成立,则称 T^* 是 T 的 Hilbert 共轭算子。

从实数域拓展到复数域,利用向量内积的运算,在有界线性算子的条件下,给出了泛函分析中自伴算子的定义:

定义 3: [6] 设 H 是复的 Hilbert 空间, T 是从 H 到 H 的有界线性算子。如果 $T = T^*$, 称 T 为自伴算子。

3) 特征值和特征向量

无论是实对称矩阵还是自伴算子,它们都与特征值和特征向量息息相关。故先分别给出特征值和特征向量在线性代数和泛函分析中的定义:

定义 4: [5] 设 A 为 n 阶实方阵,如果存在一个数 λ 和一个非零向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 使得 $Ax = \lambda x$, 则称数 λ 为方阵 A 的一个特征值, 向量 x 称为 A 的属于特征值 λ 的特征向量。

定义 5: [6] 设 H 是复的 Hilbert 空间, T 是从 H 到 H 的有界线性算子, λ 是复数。如果存在 H 中的非零向量 x 满足 $Tx = \lambda x$, 称 λ 为 T 的特征值, x 为 T 的与 λ 相应的特征向量; 所有特征值集合为 T 的点谱, 记为 $\sigma_p(T)$ 。

接下来介绍一些实对称矩阵关于特征值和特征向量的结论。

定理 1: [5] 实对称矩阵的特征值全为实数。

证: 设 A 为 n 阶实对称矩阵, λ 为 A 的一个特征值, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 则

$$Ax = \lambda x. \quad (1)$$

上述等式两侧同时取共轭, 有 $\overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \overline{\lambda} \overline{x}$ 。由于 A 为 n 阶实对称矩阵, 于是

$$\overline{Ax} = \overline{\lambda x}. \quad (2)$$

在(1)式两侧同时左乘 $\overline{x}^T$, 根据(2)式和 A 为 n 阶实对称矩阵, 可得

$$\overline{\lambda x}^T x = (\overline{\lambda x})^T x = (\overline{Ax})^T x = \overline{x}^T Ax = \overline{x}^T \lambda x = \lambda \overline{x}^T x.$$

从而 $(\overline{\lambda} - \lambda) \overline{x}^T x = 0$ 。由定义 4, 可知 x 为非零向量, 故 $\overline{x}^T x \neq 0$, 于是

$$\bar{\lambda} - \lambda = 0,$$

这意味着 $\lambda = \bar{\lambda}$ ，因此 λ 为实数。由此，实对称矩阵的特征值全为实数。定理得证。

定理 2: [5] 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量必正交。

证: 设 A 为 n 阶实对称矩阵, λ_1, λ_2 为 A 的两个不同的特征值, x_1, x_2 为 A 的分别属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 则可得

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \quad (3)$$

和

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2. \quad (4)$$

在(3)式两侧同时取转置, 再根据 A 为 n 阶实对称矩阵, 有

$$x_1^T A = x_1^T A^T = (Ax_1)^T = (\lambda_1 x_1)^T = \lambda_1 x_1^T.$$

在上述等式两侧同时右乘 x_2 , 再结合(4)式, 可得

$$\lambda_2 x_1^T x_2 = x_1^T \lambda_2 x_2 = x_1^T Ax_2 = \lambda_1 x_1^T x_2.$$

从而 $(\lambda_1 - \lambda_2)x_1^T x_2 = 0$ 。根据定理 1, 发现 λ_1, λ_2 都为实数。因此结合内积的运算, 发现

$$x_1^T x_2 = (x_1, x_2) = 0,$$

即 x_1 与 x_2 正交。定理得证。

基于上述两个关于实对称矩阵的结论, 从自伴算子的角度出发, 介绍一些自伴算子关于特征值和特征向量的结论。

定理 3: [6] Hilbert 空间 X 上的自伴算子的特征值全为实数。

证: 设 T 是自伴算子。如果 λ 和 μ 都是实数, 根据内积的定义以及共轭算子的定义和性质, 有

$$\begin{aligned} \| [T - (\lambda + i\mu)I]x \|^2 &= ((T - (\lambda + i\mu)I)x, (T - (\lambda + i\mu)I)x) \\ &= (x, (T - \lambda I + i\mu I)(T - \lambda I - i\mu I)x) \\ &= (x, (T - \lambda I)(T - \lambda I)x + (\mu I)(\mu I)x) \\ &= (x, (T - \lambda I)(T - \lambda I)x) + (x, (\mu I)(\mu I)x) \\ &= ((T - \lambda I)x, (T - \lambda I)x) + (\mu x, \mu x) \\ &= \|(T - \lambda I)x\|^2 + \mu^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

于是若 $\mu \neq 0$, 则

$$\| [T - (\lambda + i\mu)I]x \| \geq \mu \|x\|. \quad (5)$$

下面说明 $T - (\lambda + i\mu)I$ 是一单射。反之, 假设 $T - (\lambda + i\mu)I$ 不是单射, 则存在 $x_1, x_2 \in X$ 满足 $x_1 \neq x_2$ 和 $[T - (\lambda + i\mu)I]x_1 = [T - (\lambda + i\mu)I]x_2$ 。然后有

$$[T - (\lambda + i\mu)I](x_1 - x_2) = 0.$$

从而由(5)式有 $0 = \| [T - (\lambda + i\mu)I](x_1 - x_2) \| \geq |\mu| \|x_1 - x_2\|$, 而 $|\mu| \|x_1 - x_2\| \geq 0$ 。于是 $\|x_1 - x_2\| = 0$ 。由此 $x_1 = x_2$ 。因为这与 $x_1 \neq x_2$ 矛盾, 所以 $T - (\lambda + i\mu)I$ 是一单射。因此 $\text{Ker}(T - (\lambda + i\mu)I) = \{0\}$, 这与定义 5 矛盾, 故 $\mu = 0$ 。这说明自伴算子 T 的特征值全为实数。定理得证。

定理 4: [6] 设 T 是 Hilbert 空间上的自伴算子, 则对应于 T 的不同特征值的特征向量正交。

证: 设 $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_p(T)$ 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, x_1, x_2 分别是 T 对应 λ_1, λ_2 的特征向量。于是由定义 5, 有 $Tx_1 = \lambda_1 x_1$,

$Tx_2 = \lambda_2 x_2$ 。由定理 3, 可得 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 。利用 $Tx_1 = \lambda_1 x_1$, 得到

$$(Tx_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2)。(6)$$

由定义 2 和定义 3, 有

$$(Tx_1, x_2) = (x_1, T^* x_2) = (x_1, Tx_2)。$$

再结合 $Tx_2 = \lambda_2 x_2$, 得到

$$(Tx_1, x_2) = (x_1, Tx_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2)。(7)$$

由(6)式和(7)式, 发现 $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0$ 。而 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, 于是 $(x_1, x_2) = 0$ 。故对应与 T 的不同特征值的特征向量正交。定理得证。

在教师利用 35 分钟从上述三个角度进行总结之后, 学生可利用剩下的 15 分钟对教师总结的内容提出疑问, 让教师进行一个解说。

2.3. 课后

学生通过本次讨论, 加深了对线性代数中实对称矩阵和泛函分析中自伴算子的理解, 体验了一次做研究工作的心路历程, 从一开始的查资料, 到后面的做 ppt, 再到发言, 体会了传统课堂上体会不到的经历, 对日后书写毕业论文打下了基础。这会让学生在日后的学业上增强了自信心。我们知道创新这个词现在是一个具有高热度的词, 哪里都需要创新, 同样的教学也要创新。在这次课上, 学生在某种程度上明白了科研创新可以从哪些角度展开, 比如在空间上、在运算上等。因此, 课后每位学生需上交一个学习心得, 这样才能更好的把握每位学生在这次 Seminar 研讨式教学中的学习情况。

老师课后对关于本次 Seminar 研讨式教学的两节课进行反思, 回想课堂产生的效果是否达到 Seminar 研讨式教学的目标, 有没有充分调动学生的积极性, 以及有没有哪些地方可进一步改进的, 并为下一次讨论课提前思考要规避哪些之前做的不足的地方。同时, 老师在课后要多多阅读书籍, 增加自己的知识贮备, 让讨论课越上越精彩, 越上越有趣。

2.4. 成绩评定

老师根据课堂上学生的表现情况, 以及学生课后书写学习心得的情况给学生一个总成绩, 其中课堂上学生的表现情况占总成绩的百分之五十, 学生课后书写学习心得占总成绩的百分之五十。课堂上学生的表现情况从学生的执行力、参与程度、表达能力、以及创新能力等几个方面来看。从语言表达、情感流露、符合实际等方面判断学生课后书写学习心得的情况。根据学生的总成绩, 引入定量分析方法来评估 Seminar 研讨式教学法对学生学习成效的影响, 并进行长期追踪研究, 评估研讨式教学对学生长期学业成就的影响。

3. 结语

从实对称矩阵的定义和与之对应的特征值和特征向量的结论到自伴算子的定义和与之对应的特征值和特征向量的结论, 可以看出考察的定义域是由实数域拓展到复数域, 而对应的运算是由关于矩阵的运算拓展到关于算子的运算。经过这样的对比分析, 可以更加清楚自伴算子是实对称矩阵拓展的情况。但是老师在课堂上的总结只是从特征值和特征向量的角度出发给出了一些结论, 还可以从其他一些角度出发, 得到一些相关的结论, 这就需要根据具体情况去进行分析。总之, 经过拓展性教学能加深对实对称矩阵和自伴算子的理解, 同时, 激励学生积极学习其他知识, 因此, 进行 Seminar 研讨式教学是非常有必要的。

Seminar 研讨式教学法在线性代数教学中的应用,特别是在实对称矩阵的教学上,这是数学教育方法学领域的一个创新点。通过结合实对称矩阵与泛函分析中的自伴算子,展示了一个跨学科的教学案例,这不仅对数学教育有重要意义,也对泛函分析的教学提供了新的视角。

基金项目

国家自然科学基金青年项目(12101219);湖南省自然科学基金青年项目(2022JJ40141);湖南省教育厅优秀青年项目(23B0568)。

参考文献

- [1] 张平菲,王甜甜,徐承杰.基于情境创设的初中数学深度学习教学设计研究[J].创新教育研究,2023,11(9): 2572-2577.
- [2] 张丽静,刘白羽,申亚男.实对称矩阵对角化教学的应用案例[J].大学数学,2019,35(2): 116-121.
- [3] 刘合国,廖军.实对称矩阵标准形的一些应用[J].湖北大学学报(自然科学版),2023,45(5): 664-678.
- [4] 陈亮,杜翠真,高勤.实对称矩阵对角化中正交矩阵的初等变换求法[J].大学数学,2016,32(4): 68-72.
- [5] 张发明,肖海青.线性代数(第一版)[M].北京:北京大学出版社,2018.
- [6] 卢玉峰,杨义新,刘浏.泛函分析(第二版)[M].北京:科学出版社,2016.