Creative Education Studies 创新教育研究, 2024, 12(8), 106-112
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2024.128513

Hans汉斯

情境教学视角下的数学建模教学

——以“包装彩绳”教学为例

罗 斌*，郭子杰

黄冈师范学院数学与统计学院，湖北 黄冈

收稿日期：2024年3月21日；录用日期：2024年8月1日；发布日期：2024年8月12日

摘 要

数学建模活动是对生活实际问题进行数学抽象，用数学语言表达问题、用数学方法创设模型解决问题的活动。如何在教学过程中发展学生数学核心素养是当下研究的热点。本文依据情境教学理念，启发学生思考、把握事物间的关联，将其应用在《普通高中数学课程标准(2017年版2020修订)》的“包装彩绳”教学中，以期促进学生数学建模核心素养的形成与发展，最终解决实际问题。

关键词

数学建模，情境教学，包装彩绳

Mathematical Modeling Teaching from the Situational Teaching Perspective

—Taking “Packaging Color Rope” Teaching as an Example

Bin Luo*, Zijie Guo

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Mar. 21st, 2024; accepted: Aug. 1st, 2024; published: Aug. 12th, 2024

Abstract

Mathematical modeling activity is a mathematical abstraction of the actual problems of life, expressing the problem in mathematical language, creating a model to solve the problem with mathematical methods. How to develop students’ mathematical core literacy in the teaching process is the hot spot of research nowadays. Based on the concept of situational teaching, this paper inspires students to think, grasp the connection between things, and applies it to the teaching of

*通讯作者。

文章引用: 罗斌, 郭子杰. 情境教学视角下的数学建模教学[J]. 创新教育研究, 2024, 12(8): 106-112.
DOI: 10.12677/ces.2024.128513

“Packaging Colored Ropes” in the “*General High School Mathematics Curriculum Standard* (2017 *Edition*, 2020 *Revision*)”, in order to promote the formation and development of students’ core literacy in mathematical modeling and ultimately solve the actual problem.

Keywords

Mathematical Modeling, Situational Teaching, Packaging Color Rope

1. 问题提出

《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 修订)》(以下简称：高中课标)中提出了：“高中数学教学以发展学生数学学科核心素养为导向，创设合适的教学情境，启发学生思考，引导学生把握数学内容的本质[1]。”认为情境教学对启发学生思考起到了重要的作用。数学情境教学就是运用注入式或映射式的方式创设情境并融于数学场域中，形成适宜学生学习成长的数学情境，强化学生数学意识与数学素养的一种教学方式[2]，对激发学生求知欲，培养学生发现问题、解决问题的能力有着至关重要的影响，对落实以核心素养导向的课程目标起到举足轻重的作用，通过拓展数学教学的新模式，在一定程度上促进了数学教学效果[3]。可见，在课堂教学过程中如何从情境出发引导学生把握数学内容成为亟须教师思考并解决的重要问题。

作为数学学科的六大核心素养之一，数学建模能力的提出体现了以学生发展为本的教育理念。高中课标中提出了：“数学建模活动是基于数学思维运用模型解决实际问题的一类综合实践活动，是高中数学课程的重要内容[1]。”强调在教学过程中应紧密联系情境，通过对现实问题进行数学抽象，用数学方法构建模型解决问题，是数学建模活动的核心环节。因此数学建模与情境息息相关，在课堂教学过程中，教师创设学生符合学生最近发展区的现实情境，引导学生在实际情境中发现和提出数学问题，通过运用简单的数学理论和知识，选择合适的函数或方程建立数学模型，以解决实际问题，并在教学过程中使学生理解数学建模的方法，积累数学建模活动经验，形成数学建模核心素养[4]。

本文选择的“包装彩绳”问题改编高中课标中《教学与评价案例》中的案例 27，选择该内容作为数学建模教学案例的目的，一方面为帮助教师更好地贯彻落实课程标准所提出的要求，为教师教学、考试命题和课程评价提供典型素材；另一方面选择与学生生活相关的案例，能够使学生用数学的角度观察生活，发现生活中数学的原型[5]。因此，如何在数学课堂促进学生数学建模能力的发展意义重大。本文以“包装彩绳”教学为例，延伸出多种情境，探讨在课堂中开展数学建模教学活动，以期提升学生数学建模核心素养。

2. 教学案例呈现

为了让学生经历数学建模活动的基本过程，设置多个生活场景来辅助教学，以期使学生从生活中发现数学、应用数学，进而提高学生的数学建模核心素养。

2.1. 知识初探

情境一：小李去礼品店给小张买了一盒生日礼物，为了美观起见，礼品店服务员用彩绳做了一个新

颖的捆扎(见图 1)，她说，这样捆扎不仅美观大气，而且比一般的十字捆扎(见图 2)包装更节省彩绳。(注：长方体礼品盒的高小于长和宽)

【提出问题】你同意这种说法吗，并给出你的理由。

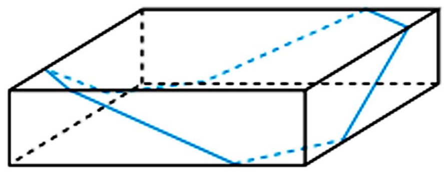

Figure 1. Fancy strapping
图 1. 花式捆扎

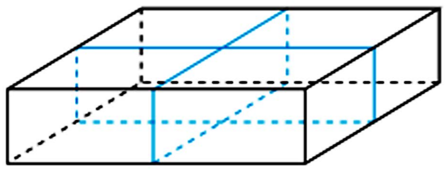

Figure 2. Cross strapping
图 2. 十字捆扎

【分析】题目中的条件并未给出礼品盒的长、宽、高，也未给出具体的字母和数据，通过“这样捆扎不仅美观大气，而且比一般的十字捆扎包装更节省彩绳”这句话，给出问题的目标指向和解决问题的理由与依据。作为高度生活化的真实情境中的真实问题，如何把实际问题数字化是需要着重考量的部分。从数学视角看，“包装彩绳”问题的核心是空间折线的长度最短问题。而解决此问题需要思考两个方面，一是证明花样捆绑比一般的十字捆扎更节省彩绳；二是探索怎样的花样捆扎更节省彩绳，因此重点即如何把现实问题转化为抽象的数学问题。

【建立模型】将上述问题抽象成以下数学模型，礼品盒——长方体；彩绳——折线；如何节省彩绳的长度——图 1 中的折线长小于图 2 中的折线长；给出你的理由——给出数学证明。因而给出如下数学问题。

见图 3，设长方体礼品盒的长宽高分别为 x、y、z，

1) 试比较 $EF+FG+GH+HI+IJ+JK+KM+ME$ 与 $2x+2y+4z$ 的大小；

2) 若点 E、F、G、H、I、J、K、M 在相应的边移动时，$EF+FG+GH+HI+IJ+JK+KM+ME$ 是否有最小值？若有，尝试求出最小值。

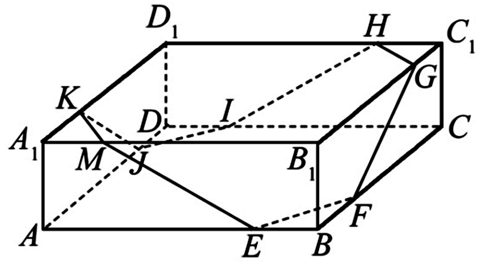

Figure 3. Fancy bundle gift box
图 3. 花式捆扎礼品盒

【设计说明】在数学建模的过程中，常常把实际问题数学化，通过对情境中实际问题抽象成空间折

线的长度比较问题，是学生数学建模的难点。通过降维的思想将情境中的三维的空间折线长度问题转化为二维的平面折线长度问题是本节课的重点与难点。由于点 E、F、G、H、I、J、K、M 都是动点，如果用代数的方法进行解题会导致出现较多变量，不利于实际操作，因此通过降维和转化的思想，将长方体的面展开成平面图形，更有利于问题的有效解决。

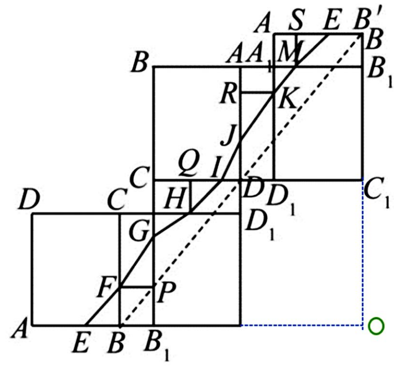

Figure 4. Expanded view of the surface of the gift box

图 4. 礼品盒表面展开图

【解决问题】依据十字捆扎的方式，把彩绳的长度记为 L。因为长方体每个面上的那一段绳都与相交的棱垂直，所以 $L = 2x + 2y + 4z$ 。

见图 4，可以想象将长方体盒子展开在一个平面上，易知，

$$\begin{aligned}&EF+FG+GH+HI+IJ+JK+KM+ME\\&<(EB+BF)+(FP+PG)+(GC_1+C_1H)+(HQ+QI)\\&\quad+(ID+DJ)+(JR+RK)+(KA_1+A_1M)+(MS+SE)\\&=2x+2y+4z=L\end{aligned}\text{。}$$

在理想状态下，当把彩绳扎紧时，整条彩绳的平面展开图是一条线段，即

$$EF+FG+GH+HI+IJ+JK+KM+ME$$

取最小值 BB'，此时需要的彩绳长度最短，将彩绳长度记为 t。而此时就将问题转化成了三角形的两边之和大于第三边。可以得出

$$t=|BB'|<|BO|+|OB'|=2y+2z+2x+2z=2x+2y+4z\text{，}$$

即 $L > t$ 。因此，图 1 采用的花式捆扎方式更加节省彩绳的材料。

2.2. 知识拓展，加深理解

情境二：小李去礼品店给外地小王挑选礼物，并将礼物以邮寄的方式寄给小王。为了怕礼物损坏，要对礼品盒的包装纸进行防潮处理，现用一种具有防潮功能的矩形包装纸进行包装，要求礼品盒的表面被包装纸全覆盖，且礼品店共有两种包装方式，第一种是长方体底面的边与矩形薄膜的边平行或垂直，沿着面积最大的长方体的面为基础展开，第二种是沿着面积最大的长方体的面的对角线展开。

【提出问题】哪种包装能使所用的矩形包装纸面积最小？

【分析】问题虽是生活中的真实情境，但问题的条件、目标指向和解决问题的方法都是不确定的，因此问题的解决具有开放性和创新性，需要学生自己理解与把握，具有学生的数学建模能力的培养具有

一定的考验。从数学角度看，“怎样包装能使所用的矩形包装纸面积最小”的核心是矩形覆盖长方体表面展开图面积最小问题，而如何选择合适的矩形是解决问题的重点和难点。

【建立模型】将上述问题抽象成以下数学模型，礼品盒——长方体；包装纸——长方体的表面展开图；如何节省包装纸的材料——矩形覆盖长方体表面展开图面积最小；给出你的理由——给出数学证明。因而给出如下数学问题。

把实际问题转化为数学问题：设一个长方体的长、宽、高分别为 a、b、c 且 $a \ge b \ge c$，若一个矩形能覆盖这个长方体的表面展开图，则这个矩形的最小面积为多少?

【设计说明】数学建模最重要的部分是建立合理的数学模型，而如何通过建立合理的数学模型解决实际问题是解决问题的难点。为了使矩形的面积取最小值，即包装纸的重叠和浪费部分最小，因而采用降维和转化的思想，将空间问题转移到平面问题，由三维的长方体表面积问题转化到二维的长方体表面展开图，进而通过比较不同的展开方式和覆盖方式，求出矩形面积的最小值。

【解决问题】见图 5，此时长方体底面的边与矩形薄膜的边平行或垂直，沿着面积最大的长方体的面为基础展开，可以想象矩形覆盖在长方体的表面展开图上，记此时的面积为 S_1，则

$$S_1 = (a+c+c)\times\left(\frac{b}{2}+c+b+c+\frac{b}{2}\right) = 2a(b+c)+4c(b+c)。$$

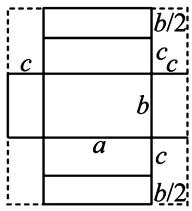

Figure 5. Expansion mode 1
图 5. 展开方式 1

见图 6，第二种裁剪方式沿着面积最大的长方体的面的对角线展开，记面积为 S_2。线段 AB 和线段 CE 是矩形的两边，所以线段 AB 与线段 CE 平行；由于内错角相等的性质定理，得到 $\angle ECA = \angle DAB$；外 $CE \perp AE$，$BD \perp AD$，则 $\Delta ABD \sim \Delta CAE$，由三角形相似的性质得 $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|CE|}{|AC|}$；由勾股定理得 $|AB| = \sqrt{a^2+b^2}$，又因 $|AC| = 2(b+c)$、$|AD| = b$，代入可得 $|CE| = \frac{2b(b+c)}{\sqrt{a^2+b^2}}$，同理 $\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|}$，可得 $|AE| = \frac{2a(b+c)}{\sqrt{a^2+b^2}}$；那么

$$S_2 = (|AB|+|BF|)\times|AE| = \left(\sqrt{a^2+b^2}+\frac{2b(b+c)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\times\frac{2a(b+c)}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2a(b+c)+\frac{4ab(b+c)^2}{a^2+b^2}。$$

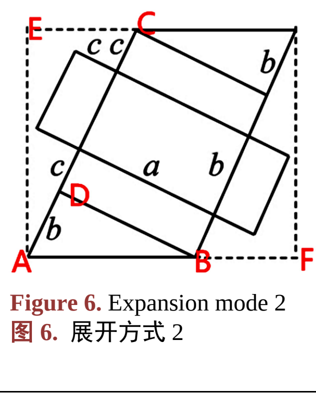

Figure 6. Expansion mode 2
图 6. 展开方式 2

所以要比较 S_1 和 S_2 的大小，只需比较 $c(b+c)$ 与 $\frac{ab(b+c)^2}{a^2+b^2}$ 的大小，只需比较 c 与 $\frac{ab(b+c)}{a^2+b^2}$ 的大小，而 $a^2+b^2 \ge 2ab$，则 $\frac{ab(b+c)}{a^2+b^2} \le \frac{ab(b+c)}{2ab} = \frac{b+c}{2}$，而 $b \ge c$，那么 $\frac{b+c}{2} \ge c$，则 S_1 的面积最小，那么第一种包装方式能使所用的矩形包装纸面积最小。

2.3. 知识迁移

情境三：小李去礼品店给小王挑选礼物，但礼物店的包装纸只剩下最后一张。

【提出问题】怎么包装能装更多的东西呢？你认为该如何设计？

【分析】解决此问题要求学生能够用数学的眼光看待此问题，通过对其抽象化和符号化的处理，从中抽象出数学问题，建构解决问题的模型是重要的部分。从数学角度看，“怎样包装能装更多的东西”的核心是长方体体积最大问题，而如何选择合适的长方体是解决问题的重点和难点。

【建立模型】将上述问题抽象成以下数学模型，礼品盒——长方体；包装纸——长方体的表面展开图；怎样包装能装更多的东西——长方体体积最大；你认为该如何设计——给出数学证明。因而给出如下数学问题。

把实际问题转化为数学问题：见图 7，设一个长方体的长、宽、高分别为 x、y、z 且 $x \ge y \ge z \ge 0$，且这个长方体的表面积为 a，则这个长方体的最大体积为多少?

Figure 7. Gift box
图 7. 礼品盒

【设计说明】数学模型都是具有现实生活背景的，学生对原型的深刻认识有利于数学建模水平的发展。而此问题是学生了解的现实情境，通过引导学生借助模型，带领学生动手实践，寻找解决问题的方法，为了帮助学生有效克服问题难点，教师可向学生提供矩形制片和长方体盒子，供学生动手操作，加深理解。

【解决问题】将长方体的体积记为 V。已知长方体的长、宽、高分别为 x、y、z，且长方体的表面积为 a^2，那么容易得出 $2(xy+yz+xz)=a^2$，则 $xy+yz+xz=\frac{a^2}{2}$，又因为 $x \ge y \ge z \ge 0$，由基本不等式可以得到 $xy+yz+xz \ge 3\sqrt[3]{xy \times yz \times xz} = 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$，所以可以得到 $\frac{a^2}{2} \ge 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$，即 $\frac{a^2}{6} \ge \sqrt[3]{(xyz)^2}$，所以 $xyz \le \frac{a^3}{6\sqrt{6}}$，当且仅当 $xy=yz=xz$ 即 $x=y=z=\frac{a}{\sqrt{6}}$ 时等号成立，而长方体的体积 $V=xyz$，那么当礼品盒被包装成正方体时，正方体的体积最大，则此时能够装最多的东西。

3. 数学建模教学反思

从数学视角看，本文所涉及的三个生活情境问题的实质分别是空间折线线段最短问题、长方体表面展开图面积最小问题和长方体体积最大问题，借由长度、面积和体积循序渐进对学生提出的更高的要求，

解决此问题用到的主要方法即为降维和转化的思想，而如何把现实问题情境抽象成数学问题是本次设计的难点。对该问题情境的解决蕴含着数学建模活动的全过程，因此是学生学习和掌握数学建模的过程与进展、培养学生数学建模核心素养的重要工具。对于情境的解决，借由数学抽象和直观想象把生活情境抽象为数学问题，以探求解决问题的方法，并经推理和运算的过程得到结论，并根据实际情况进行分析和验证，判断数学模型和初步结论是否正确，从而得到问题的答案。而在此活动过程中，提高学生的数学建模素养。

数学情境教学是不断创新与发展的教学，在教学过程中，教师能够从数学情境出发，引导学生经历数学知识和思想方法形成的过程，根据学生的认知规律和性格特征，加强学生数学知识的运用能力和构造学生数学现实为指导思想，鼓励学生自己发现问题，论证问题，并进行归纳整理。使学生体验到数学与现实情境的密切联系，培养和提高了学生的创造性思维。学生在学习的过程中，不仅学习了知识，而且也跟自己的实际生活联系了起来，体会到了数学的实际应用价值。此外，使用现实情境教学，课堂氛围更加活跃，对于一些学困生而言，更加能够获得成就感，激发他们学习数学的兴趣。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[2] 张定强, 张元媛, 王彤. 数学情境教学: 理解现状与增润课堂[J]. 中小学教师培训, 2017(5): 58-61.

[3] 张亚楠, 方均斌, 翟金鑫. 谈数学教学情境设计的四对关系[J]. 数学通报, 2017, 56(4): 8-11.

[4] 常磊, 鲍建生. 情境视角下的数学核心素养[J]. 数学教育学报, 2017, 26(2): 24-28.

[5] 岳倩倩. 基于情境教学的高中生数学核心素养培养研究[D]: [硕士学位论文]. 新乡: 河南师范大学, 2019.