

延拓式教学在数值并行计算课程中的应用研究

吴念慈

中南民族大学数学与统计学学院, 湖北 武汉

收稿日期: 2024年6月29日; 录用日期: 2024年8月9日; 发布日期: 2024年8月20日

摘要

延拓式教学是一种内容更加灵活多样的教学模式, 对培养学生的实践能力和创新能力具有重要意义。文章将从实施方式、效果评价和影响因素等方面, 以数值并行计算课程中的卡茨马兹方法为例, 对其延拓式教学进行研究, 旨在帮助学生更加深刻地理解卡茨马兹算法及其变种之间的联系, 以便建立牢固的知识框架。

关键词

延拓式教学, 并行计算, 卡茨马兹法

Research on the Application of Extension Teaching in Numerical Parallel Computing Course

Nian-Ci Wu

School of Mathematics and Statistics, South-Central Minzu University, Wuhan Hubei

Received: Jun. 29th, 2024; accepted: Aug. 9th, 2024; published: Aug. 20th, 2024

Abstract

Extension teaching is a more flexible and diverse instructional approach that holds significant importance in cultivating students' practical and innovative capabilities. This paper explores extension teaching in the context of a Numerical Parallel Computing course, using the Kaczmarz method as a case study. It focuses on implementation methods, effectiveness evaluation, and influencing factors. The aim is to deepen students' understanding of the connections between the Kaczmarz algorithm and its variants, thereby establishing a solid knowledge framework.

Keywords

Extension Teaching, Parallel Computing, Kaczmarz Method

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

新工科专业是一种新型的专业模式，其与传统工科专业的最大区别在于专注于学生的实践能力和创新能力的培养。在新工科专业中，学生需要具备跨学科的知识 and 技能，能够独立思考和解决问题，能够在工作中灵活适应多变的环境。此外，新工科专业还强调学生的团队合作能力和创新意识，培养学生具备跨学科协作的能力和创新能力，鼓励学生在实践中不断探索和创新。因此，研究更加灵活多样的新工科专业的教学模式，对注重和培养学生的实践能力和创新能力具有重要意义[1]-[3]。

延拓式教学是一种通过拓展和延伸课程内容和教学方法，促进学生对知识的深入理解和应用的教学模式。延拓式教学强调知识的灵活应用和实践能力的培养，通过项目学习、案例教学、实践课程等方式，让学生在实操中理解和应用知识，主要分为以下几步。

1) 设计项目学习课程：将项目学习融入到新工科专业的课程设计中，让学生在项目中探索和实践，培养学生的实践能力和创新能力；

2) 推行问题导向教学：以问题为导向，让学生在解决问题的过程中理解和应用知识，培养学生的创新精神和团队合作能力；

3) 建立多学科合作机制：让不同专业的学生共同参与项目学习和实践活动，促进跨学科的交流与合作，培养学生的团队合作能力和创新意识。

在教材《数值并行算法与软件》第5.5节中[4]，介绍了经典迭代法的并行计算。给定线性方程组 $Ax = b$ ，其中 $A \in R^{m \times n}$ ， $b \in R^m$ ，雅可比迭代格式为

$$x^{(k+1)} = (I - D^{-1}A)x^{(k)} + D^{-1}b,$$

其主要通信发生在右端第一项的计算过程中，而这对应的是一个矩阵与稠密向量相乘，该矩阵除了对角元都是 0 外，非零元结构与系数矩阵相同，因而可以基于矩阵向量乘的并行算法来设计这里的并行计算过程；对于逐次超松弛 SOR (ω) 迭代，

$$(D - \omega L)x^{(k+1)} = (\omega U + (1 - \omega)D)x^{(k)} + \omega b,$$

当松弛参数 $\omega = 1$ 时，该方法自动退化为经典的高斯 - 赛德尔迭代，可利用多色排序方法和算法的分量形式设计该迭代的并行算法。由代数知识可知，此类迭代过程与卡茨马兹迭代方法[5]求解原问题的法方程等价。为了进一步培养更具有创新能力和实践能力的高素质人才，延拓式教学模式被引入到新工科专业中。本文将从实施方式、效果评价和影响因素等方面，以卡茨马兹为例，对新工科数值并行计算课程的延拓式教学进行研究。

2. 实施方式

2.1. 设计项目学习课程

项目驱动式教学是延拓式教学的主要实施方式之一。通过设计真实的项目任务，让学生在项目中探

索、实践和解决问题，培养学生的实践能力和创新意识。项目驱动式教学需要教师进行详细的项目设计和指导，同时，学生需要在团队合作中共同完成项目任务。

1) 确定主题：选择一个能够引发学生兴趣并与课程目标相关的主题，“SOR (1)的分量形式是什么？”；

2) 制定项目：设计项目任务和目标，确保任务能够激发学生的学习动机；

3) 分组合作：将学生分成小组，鼓励合作、讨论和分享，促进团队合作能力的培养；

4) 指导引导：教师担任指导者的角色，提供必要的支持、指导和反馈，SOR (1)的分量形式为

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i=1,2,\dots,n,$$

其中 a_{ij} 表示 A 的第 (i, j) 个元素；

5) 调整改进：根据评估结果和反馈，调整课程设计和实施方法，不断改进项目学习的质量，“若给出向量 $x^{(k)} = [x_1^{(k+1)} \dots x_{i-1}^{(k+1)} \quad x_i^{(k)} \dots x_n^{(k)}]^T$ ，还可进一步诱导出什么迭代格式？”；

6) 展示成果：鼓励学生展示学生的项目成果，促进自信心和沟通能力的提升。根据上述提示，可得

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{e_i^T (b - Ax^{(k)})}{a_{ii}} e_i \text{ 以及 } x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{b_i - A_{i,:} x^{(k)}}{\|A_{i,:}\|^2} A_{i,:}^T,$$

后者即为卡茨马兹迭代格式[2]；

7) 评估反思：通过评估学生的表现和成果，引导学生反思项目学习的过程和收获，促进深层次的学习，“上述迭代法是否收敛？若收敛，有什么技巧可以进一步提高该迭代法的收敛速度？”。

2.2. 推问题导向教学

问题导向教学通过提出挑战性问题，引发学生的好奇心和求知欲，从而激发学生的学习兴趣和自主学习的动机。学生在解决问题的过程中，需要综合运用多学科知识和技能，其跨学科思维和解决问题的能力也得到了进一步培养。更多地，问题导向教学强调解决实际问题 and 应对未知挑战的能力，使学生的学习更具实用性和适应性。

针对上述问题中，记方程组的解为 x^* ，则 $Ax^* = b$ ，可知卡茨马兹迭代格式的误差递推式为

$$\|x^{(k+1)} - x^*\|^2 = \|x^{(k)} - x^*\|^2 - \frac{|b_i - A_{i,:} x^{(k)}|^2}{\|A_{i,:}\|^2}, \quad i=1,2,\dots,m,$$

上式表明右边第二项越大，误差就会下降越快，这取决于行指标 i 的选取。此时，提出问题“有哪些策略可以有效选取行指标？”。

1) 按照循环顺序选取[5]，即 $i = 1, 2, \dots, m, 1, 2, \dots, m, \dots$ ；

2) 按照随机顺序选取[6]，即 $i = 3, 1, 4, 1, 5, 9, \dots$ ；

3) 按照贪婪策略选取[7]，即 $i \in U_k$ ，其中

$$U_k = \left\{ t \left| \frac{|b_t - A_{t,:} x^{(k)}|^2}{\|A_{t,:}\|^2} \geq \frac{1}{2} \max \left\{ \frac{|b_i - A_{i,:} x^{(k)}|^2}{\|A_{i,:}\|^2} \right\} + \frac{1}{2} \frac{\|b - Ax^{(k)}\|^2}{\|A\|_F^2} \right\} \right\}.$$

问题导向教学不仅注重知识的获取，更重视学生对问题本质的深入理解和思考，从而促进学生的深层次学习。面对开放性问题，学生需要进行批判性思考、分析和创造性解决问题，培养学生的批判性思维 and 创新能力。同时，在以问题为导向的学习环境中，需要自主探索和合作解决问题，培养学生的自主

学习能力和团队合作精神。

2.3. 建立多学科合作机制

在计算机图形学领域，CT 成像利用 X 射线通过物体时的衰减信息，通过不同方向上的多个投影数据来重建物体的内部结构。具体来说，CT 成像涉及到以下几个关键步骤：首先，X 射线从不同角度穿过被成像物体，记录每个角度下 X 射线通过物体时的吸收程度，形成投影数据；然后，将多个角度的投影数据反向投射到物体内部的每个三维像素上；最后，通过对多个角度下的反投影数据进行加权求和，以重建出物体内部的结构信息，如图 1 所示。这些步骤涉及到数学上的 Radon 变换和逆 Radon 变换，是 CT 成像中的核心算法。通过这些数学方法，CT 扫描可以提供高分辨率的三维内部结构图像，用于医学诊断、工业检测等领域。

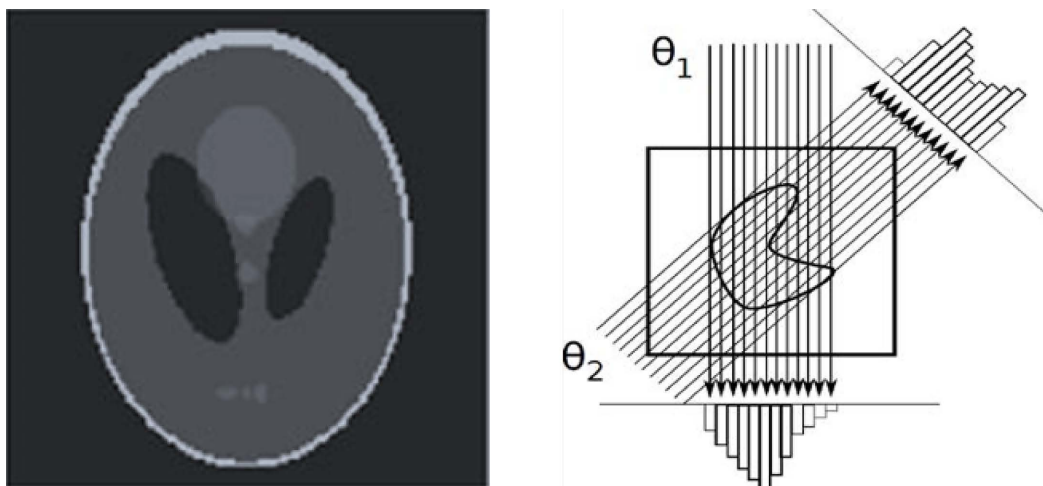


Figure 1. Algebraic principles of CT imaging

图 1. CT 成像的代数原理

卡茨马兹方法在该领域也被称为代数重构技术，该技术是一种迭代方法，特别适用于解决大型和复杂的图像重构问题，在每次迭代过程中，只需要对系数矩阵的某一行做运算，即 X 射线从一个角度穿过被成像物体记录下的数据。该技术可以在保持相对较高精度的情况下，通过逐步改进图像的重建，实现快速收敛。此外，由于采样的数据往往是不规则和不完全的，该技术能够灵活地调整和处理不同类型的数据采样，如不均匀介质成像、多模态数据融合等。为了尽量减少辐射剂量的成像技术，该技术还能够较少的投影数据下实现良好的图像重建质量，这对于保护患者健康至关重要。

多学科合作能够让学生在解决问题或完成项目时，综合运用各学科的知识 and 技能，促进跨学科思维的发展。通过多学科合作，学生能够将学到的理论知识应用到实际问题中，提升解决实际挑战的能力和实用性。同时，学生在跨学科团队中合作，需要协调资源、分工合作，培养有效沟通、团队协作和领导能力。学科合作鼓励学生面对复杂问题时进行创新思维和多角度分析，培养解决问题的能力 and 创造性思维。不同学科的视角和方法，可以让学生深入思考问题的多维度，而且可以加强对知识的广度和深度的理解。

3. 效果评价

3.1. 例题讲解

例题：采用不同指标选取策略，利用卡茨马兹方法求解下列线性方程组

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 14 & 9 & -13 \\ 2 & 10 & 0 & -3 \\ -3 & -4 & -12 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix},$$

给定迭代初始向量 $x^{(0)} = [1 \ 2 \ 3 \ 4]^T$, 已知方程的解为 $x^* = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ 。

1) 按照循环顺序选取($i_0 = 1$),

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \frac{b_1 - A_{1,:}x^{(0)}}{\|A_{1,:}\|^2} A_{1,:}^T = \frac{1}{66} [70 \ 146 \ 207 \ 251]^T,$$

相对误差为 $E_{1,1} = \|x^{(1)} - x^*\| / \|x^{(0)} - x^*\| = 0.6805$;

2) 按照随机顺序选取(如 $i = 3$),

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \frac{b_3 - A_{3,:}x^{(0)}}{\|A_{3,:}\|^2} A_{3,:}^T = \frac{1}{338} [371 \ 720 \ 1146 \ 1209]^T,$$

相对误差为 $E_{2,1} = \|x^{(1)} - x^*\| / \|x^{(0)} - x^*\| = 0.6743$;

3) 按照贪婪策略选取, 首先构造指标集

$$U_0 = \left\{ t \left| \frac{|b_t - A_{t,:}x^{(0)}|^2}{\|A_{t,:}\|^2} \geq \frac{1}{2} \max \left\{ \frac{|b_t - A_{t,:}x^{(0)}|^2}{\|A_{t,:}\|^2} \right\} + \frac{1}{2} \frac{\|b - Ax^{(0)}\|^2}{\|A\|_F^2} \right\} = \{4\},$$

然后计算

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \frac{b_4 - A_{4,:}x^{(0)}}{\|A_{4,:}\|^2} A_{4,:}^T = \frac{1}{15} [17 \ 34 \ 51 \ 52]^T,$$

相对误差为 $E_{3,1} = \|x^{(1)} - x^*\| / \|x^{(0)} - x^*\| = 0.6700$ 。

引导学生发现规律: 由逐次超松弛 SOR (ω) 迭代延伸出的卡茨马兹方法的收敛速度, 与行指标的选取有关。在每一步迭代中, 选取不同的行指标, 可以得到不同的近似解 $x^{(1)}$; 利用贪婪指标选取策略, 得到的卡茨马兹方法的误差最小, 意味着此种卡茨马兹方法的收敛速度将最快。

案例能够将抽象的理论概念具体化为实际生活中的情境和问题, 帮助学生更容易理解和应用卡茨马兹方法的计算过程, 从而增强学生的学习兴趣 and 深度理解能力。此外, 学生在分析和解决案例中的问题过程中, 能够培养批判性思维、创新性思维和解决问题的能力, 这些能力对于延拓式教学的核心目标——培养学生的综合素质和应对复杂情境的能力至关重要。并且, 案例往往能够激发学生的学习兴趣 and 参与度, 因为它们直接关联到学生生活和现实环境中的问题, 学生更容易看到学习的实际意义, 从而更积极地参与到学习过程中来。

3.2. 评价方式

延拓式教学的效果评价应该综合考虑以下几个方面, 以全面地评估学生在学习过程中的表现和成长。

1) 学习成绩和知识掌握: 评估学生在课堂上和案例学习中的学习成绩, 包括考试成绩、作业完成情况等, 这可以反映学生对知识的掌握程度 and 理解深度;

2) 问题解决能力和创新性思维: 考察学生在案例分析过程中的表现, 包括学生提出的解决问题的方法、分析问题的逻辑性、解决方案的创新性等, 这些能力是延拓式教学中重要培养目标;

3) 批判性思维和逻辑推理：通过评估学生在案例分析中的批判性思考能力，包括学生对信息的评估和推理能力，来确定学生是否能够有效地分析和解决复杂问题；

4) 跨学科融合能力：考察学生是否能够有效地应用多学科知识和技能来解决跨学科的问题，案例学习通常涉及多个学科领域，学生能否综合运用各学科的知识进行分析和解决问题是评价的重点之一；

5) 学习动机和参与度：评估学生在案例学习中的学习动机和参与度，包括学生对案例学习的态度、参与讨论的积极性等，学生的学习动机和参与度直接影响学生在案例学习中的表现和学习效果；

6) 实际应用和实践能力：考察学生能否将从案例学习中获得的知识和技能有效地应用到实际生活或工作情境中，以及学生在实际应用中的表现和成效。

4. 影响因素

教师在延拓式教学中扮演着重要的角色，教师需要具有丰富的实践经验和创新意识，能够引导学生进行实践活动，激发学生的学习兴趣和创新精神。教师对课程内容的理解、教学方法的掌握、课堂管理的技巧以及与学生互动的能力都会影响延拓式教学的效果。例如，对于逐次超松弛 SOR (ω) 迭代格式的分量形式还可以延伸出另一种迭代格式，

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{A_{:,j}^T (b - Ax^{(k)})}{\|A_{:,j}\|^2} A_{:,j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

此方法称为坐标下降法，在数值优化、机器学习等领域有着广泛应用。

学生的学习动机和参与度也是影响延拓式教学效果的重要因素。学生需要积极参与到实践活动中去，主动探索和解决问题，发挥自己的创造力和想象力。学生在课堂上的活跃程度、对学习内容的兴趣、参与讨论和活动的积极性等，这些都会影响学习效果。例如，引导学生思考“若在贪婪指标选取中，指标集 $U_k = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ 中的元素有多个，该如何设计并行算法？”，一种自然的想法就是对每个行指标进行一次卡茨马兹迭代，然后取其平均值，即

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{p} \sum_{t \in U_k} \left(x^{(k)} + \frac{b_t - A_{t,:} x^{(k)}}{\|A_{t,:}\|^2} A_{t,:}^T \right),$$

其中 p 为处理器个数，此方法称为平均块卡茨马兹算法[8]。

此外，课堂的物理环境、学习资源、技术设施、文化氛围等课堂环境也会对学生的体验和学习效率产生影响。

5. 小结

延拓式教学模式是一种灵活多样的教学方法，通过引入案例和实际问题，帮助学生将理论知识应用到实际情境中，其主要优势包括提升学生的问题解决能力、促进跨学科融合、增强学习动机和参与度等。本文以教材[4]中逐次超松弛 SOR (ω) 迭代格式的分量形式为出发点，引导学生推导出卡茨马兹方法的迭代格式。通过对行指标的不同选取策略，进一步延伸出卡茨马兹方法的不同变种，并利用具体案例讲解此类方法的计算过程。根据教学效果得出，教师在实施延拓式教学时，需要综合考虑教学设计质量、学生的学习动机、教师的角色与支持以及学校教育环境等多个因素，综合评估和优化这些因素可以有效提升教学效果，促进学生全面发展和深度学习。

基金项目

中南民族大学校级教研项目“《并行计算》课程教学案例库的建设路径与实践”(项目编号：

JYX23017)。

参考文献

- [1] 刘子心, 刘章军, 孙治国. 弹性力学探究式案例教学的设计与实践[J]. 高等建筑教育, 2022, 31(5): 108-117.
- [2] 朱小扣, 朱嘉懿. 例谈不等式解题中的多元性和延拓性[J]. 数理化解题研究, 2017(16): 35-36.
- [3] 杨湘豫. “均值”的延拓式教学设计[J]. 湖南理工学院学报(自然科学版), 2016, 29(1): 79-82.
- [4] 李晓梅, 吴建平. 数值并行算法[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
- [5] Kaczmarz, S. (1937) Angenaherte auflosung von systemen linearer gleichungen. *Bulletin International de l'Academie Polonaise des Sciences A*, **35**, 355-357.
- [6] Strohmer, T. and Vershynin, R. (2008) A Randomized Kaczmarz Algorithm with Exponential Convergence. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **15**, 262-278. <https://doi.org/10.1007/s00041-008-9030-4>
- [7] Bai, Z. and Wu, W. (2018) On Greedy Randomized Kaczmarz Method for Solving Large Sparse Linear Systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **40**, A592-A606. <https://doi.org/10.1137/17m1137747>
- [8] Necoara, I. (2019) Faster Randomized Block Kaczmarz Algorithms. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **40**, 1425-1452. <https://doi.org/10.1137/19m1251643>