

基于APOS理论的数学概念教学设计

——以“指数函数的概念”为例

范雪, 任全玉

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2024年3月18日; 录用日期: 2024年8月19日; 发布日期: 2024年8月28日

摘要

概念学习是数学学习的出发点, APOS理论是一种基于建构主义的学习理论, 是很好的概念学习的理论模型。文章采用文献研究法和文本分析法, 以APOS理论为基础, 进行指数函数概念的教学设计, 旨在帮助学生经历“活动、过程、对象、图式”四个阶段, 深度理解知识和主动建构知识。最后提出了在概念教学中教师应注重概念引入生活性、学生学习主体性和知识体系建构性的教学建议。

关键词

APOS理论, 数学概念, 指数函数, 教学设计

Teaching Design of Mathematical Concepts Based on APOS Theory

—Taking “The Concept of Exponential Function” as an Example

Xue Fan, Quanyu Ren

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Mar. 18th, 2024; accepted: Aug. 19th, 2024; published: Aug. 28th, 2024

Abstract

Concept learning is the starting point of mathematics, and APOS theory is a learning theory based on constructivism, which is a good theoretical model of concept learning. The article adopts the literature research method and text analysis method, based on the APOS theory, to carry out the teaching design of the exponential function concept, aiming at helping students to go through the

four phases of “activity, process, object, schema” to deeply understand the knowledge and actively construct the knowledge. Finally, it is proposed that in conceptual teaching, teachers should focus on introducing concepts into life, emphasizing students’ subjectivity in learning and the constructiveness of the knowledge system.

Keywords

APOS Theory, Mathematical Concepts, Exponential Function, Teaching Design

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数学概念是数学学习的基础,是数学思维的基本形式,数学思维的培养以数学概念的学习为依托。指数函数是高中阶段学习的基本初等函数之一,其重要性不言而喻,且是后面学习对数函数、数列等内容的重要基础,因此对于指数函数概念的学习需要深刻理解和掌握。《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》指出:“高中数学学习评价关注学生知识技能的掌握,更关注数学学科核心素养的形成和发展,制定科学合理的学业质量要求,促进学生在不同学习阶段数学学科核心素养水平的达成。评价既要关注学生学习的结果,更要重视学生学习的过程”[1]。在传统的指数概念教学中,教师往往将教学重点放在概念的应用上,而忽视了学生对于概念本质的理解和概念的生成过程,这是违背新课程标准的要求的。由于数学概念的高度抽象性和学生已有的认知基础,学生在学习指数函数的概念一课时感到比较困难[2],基于 APOS 理论对指数函数的概念进行教学设计可以有效提高学生学习兴趣,引导学生体验数学概念的生成过程,深刻理解并掌握数学概念的本质。

众多研究表明 APOS 理论是学习数学概念的一个很好的模型,程华深入分析了 APOS 理论的内涵,认为基于 APOS 理论实施中学数学概念教学,有利于学生完整经历数学概念的形成过程[3]。曾玉祥指出将 APOS 理论应用于数学概念的探究式教学中具有一定的理论意义和实践价值,能有效促进学生建立学习数学概念的综合心理图式[4]。姜绍蕊同样用 APOS 理论研究指数函数的教学,基于 APOS 理论将学生对概念的理解水平进行划分,针对各个阶段的难点进行教学[5]。宋洁静以 APOS 理论为指导进行高中数学概念课的教学设计,并通过实验研究法,发现将 APOS 理论用于数学概念的教学,可以在一定程度上促进学生对数学概念的深度学习[6]。文章在查阅大量相关文献和深入分析指数函数概念的深层含义的基础上,采用文献研究法和文本分析法,探究 APOS 理论在数学概念教学中的应用。

2. APOS 理论概述

APOS 是由四个英文单词的首字母所组合而成的缩写,即 action (活动)、process (过程)、object (对象)、schema (图式) [7]。APOS 理论是由美国数学家埃德·杜宾斯基(Ed Dubinsky)在皮亚杰的反射抽象概念基础上提出的一个数学概念学习的理论模型,如图 1 所示,该理论认为学习者不能直接学到数学概念,而是通过心智结构使所学的概念产生意义,教学的目的是帮助学习者建立适当的心智结构。

总体而言, APOS 理论是一种建构主义的数学学习理论[8],学生通过活动、过程、对象和图式四个环节,经历概念的发生发展过程,最终形成一个完整的知识体系。由图 1 可知,这四个阶段并非孤立的,而是密切联系的一个有机整体。第一阶段,活动阶段。学生对于概念的学习建立在对一些具体例子的活

动体验之上, 该阶段概念表征为具体的实例。第二阶段, 过程阶段。学生在对具体实例活动体验的基础上进行内化, 从而抽象出数学概念, 该阶段概念表征为抽象的过程, 如学生看到函数, 心里出现的是“对于给定一个 x , 有唯一的 y 与之对应”这样一句话。第三阶段, 对象阶段。学生对概念的理解能脱离第一步的活动以及第二步的抽象过程, 概念表征为抽象的符号, 学生可以把概念构造为一个对象单独研究, 而不需要借助前两步的活动和抽象过程。第四阶段, 图式阶段。学生对前三个过程归纳总结的基础上进行整合形成对概念更为深刻的认识, 概念表征为综合的心理图示[9]。

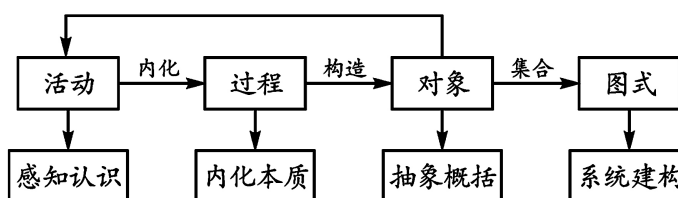


Figure 1. Theoretical model of APOS
图 1. APOS 理论模型

3. 基于 APOS 理论的指数函数概念教学设计

3.1. 课标要求

《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》在指数函数的教学提示中指出:“通过认识有理数指数幂、实数指数幂的含义, 了解指数幂的拓展过程, 掌握指数幂的运算性, 引导学生通过具体实例了解指数函数的实际意义, 理解指数函数的概念。”

3.2. 教材分析

《指数函数》选自高中人教 A 版(2019)必修第一册第四章的第二节, 指数函数是高中函数内容的重要组成部分, 是对前面学习的幂函数的概念和性质的延续, 也为后面学习对数函数、等比数列、导数等内容做好了铺垫, 在整体教学中起着承上启下的作用。

3.3. 学情分析

学生前面通过对幂函数和指数的学习, 已具备一定的知识基础来学习本节课的指数函数。但高一年级学生的数学知识系统不够丰富, 在构建出数学模型以及从实际问题中抽象出指数函数有较大的难度。

3.4. 教学目标

- 1) 通过生活中的实例抽象出指数函数, 了解指数函数的实际意义, 深刻理解和掌握指数函数的概念;
- 2) 通过自主探究的过程, 提升数学抽象素养和解决问题的能力;
- 3) 感受数学与生活密切相关, 激发求知欲, 培养良好的数学思维习惯。

3.5. 教学重难点

重点: 理解指数函数的概念并能简单应用;
难点: 指数函数概念的抽象过程。

3.6. 教学过程设计

3.6.1. 环节一: 活动阶段(Action)——创设情境, 启发思考

活动 1: 学生动手操作折纸活动, 把一张 1 mm 厚的纸对折 1 次, 可以得到纸张的厚度为 2 mm, 对

折 2 次得到纸张的厚度为 4 mm, 对折 3 次得到纸张的厚度为 8 mm, 如此下去, 设第 x 次对折得到的纸张的厚度为 y mm。

问题 1: 纸张厚度 y 与对折次数 x 的关系式是什么? 如何描述这两个变量之间的关系?

预设: $y = 2^x$ 。

活动 2: 有一张面积为 1 的圆形大饼, 小明第一天吃一半, 第二天吃剩下半个饼的一半, 第三天又吃剩下的一半的一半, 依此规律, 第 x 天吃的面积为 y 。

问题 2: 则 y 与 x 的关系式又是什么样的呢?

预设: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 。

【设计意图】利用两个与生活密切相关的活动和情境进行导入, 激发学生求知欲和好奇心, 调动学生积极性, 亲自动手操作折纸活动, 体会指数增长现象, 真真切切地感受指数函数在现实生活中的真实存在性, 启发学生思考, 获得对指数函数的感性认识, 认识到指数函数的现实意义, 初步建立对指数函数的概念的理解。

3.6.2. 环节二: 过程阶段(Process)——总结归纳, 抽象概念

问题 3: 采用列表法对以上情境问题进行整理得到下表 1、表 2, 那么 $y = 2^x$ 、 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是函数吗?

Table 1. Relationship between the number of folds x and paper thickness y

表 1. 折叠次数 x 与纸张厚度 y 之间的关系

折叠次数 x	1	2	3		x
纸张厚度 y	2^1	2^2	2^3		2^x

Table 2. Relationship between the number of days of cake eating x and the area of cake eating y

表 2. 吃饼天数 x 与吃饼面积 y 之间的关系

吃饼天数 x	1	2	3		x
吃饼面积 y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$		$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

预设: 通过仔细地观察, 发现对于每一个自变量 x 的值都有唯一确定的值与之对应, 因此上述两个式子都是函数。

问题四: 这两个函数表达式有什么共同特征?

预设: 这两个函数表达式的自变量 x 都在指数的位置上, 且都是指数幂的形式。

问题五: 我们通常把未知数出现在指数位置的函数表达式称为指数函数, 那么如何用一般形式来表示指数函数呢?

预设: $y = a^x$ 。

【设计意图】设置一系列由浅入深、由易到难的问题, 符合学生的心理发展规律循序渐进地进行, 通过层层提问, 启发学生思考, 以教师为主导, 以学生为主体, 充分调动学生主动性, 将第一阶段的活动逐步内化。这里选择了两个不同的指数函数的模型, 学生进行归纳和概括其共同特征, 经历从特殊到一般、从简单到复杂的过程, 引导学生积极主动地探究, 从而抽象出指数函数的概念。

3.6.3. 环节三: 对象阶段(Object)——辨析特征, 深化概念

问题六: 指数函数 $y = a^x$ 中的底数 a 取任何数都可以吗? 它的取值应该符合哪些条件呢?

预设：学生分三种情况去讨论 a 的取值：

若 $a < 0$ ，当 $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$ 时， a^x 无意义；

若 $a = 0$ ，当 $x > 0$ 时， $a^x = 0$ ；当 $x \leq 0$ 时， a^x 无意义；

若 $a = 1$ ， $a^x = 1^x = 1$ 是常量，没有研究的价值；

因此，这里 a 的取值为 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 。

问题七：指数函数 $y = a^x$ 中，定义域是否在实数范围内都有意义呢？

预设：学生观察思考发现这里的自变量可以取任意实数。

师生共同总结、归纳、概括出指数函数的概念：一般地，函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 叫做指数函数，其中 x 是自变量，函数的定义域是 R ，即 $x \in R$ 。

【设计意图】在学生初步感知指数函数的基础上，引导学生独立思考和自主探究其中底数 a 的取值范围和自变量的取值范围，从而获得更为准确的指数函数的概念，在此过程中也充分发挥学生主体性，更多的是让学生自主学习、合作学习、探究学习。在探究底数 a 的取值范围时，分为三种情况去探讨，渗透了数学中重要的分类讨论的思想方法。最后，教师采用讲授法，引导学生共同总结出确切的指数函数的概念。对于高度抽象的概念性知识采用讲授法的形式更能让学生对概念的把握更加明确和清晰。

3.6.4. 环节四：图式阶段(Schema)——巩固练习，形成图式

问题八：判断下列函数是否是指数函数？

$$\begin{array}{ll} y = 2 \times 3^x & y = (-4)^x \\ y = 3^{x-1} & y = \pi^x \end{array}$$

问题九：已知函数 $f(x)$ 是指数函数， $f(3) = 27$ 试求出 $f(0)$ ， $f(5)$ 的值

问题十：现有一张厚度为 0.3 mm 的纸，将其对折 4 次后高度变为多少？若对折 8 次呢？对折 50 次呢？若想要折纸的高度为地球到月球的距离(地球到月球的距离约为 3.84×10^5 km)，那么需要将纸对折多少次？

【设计意图】设置三道由简单到复杂的练习题，学生自主练习，在练习的过程中加深对概念的理解和认识，建构知识体系，完善指数函数的图式。第一道题目选择四个非常典型的函数解释式让学生进行辨析是否是指数函数，使学生更深层次地掌握指数函数，第二道题是用待定系数法解指数函数，第三道是用指数函数解决实际问题，学生只掌握指数函数概念是不行的，也要注重学生将指数函数运用到数学问题和实际问题中去，让学生感到数学与实际生活的密切联系，发展数学应用能力和创新能力，提升数学核心素养。

4. 启发与思考

概念的学习过程，是一个量变到质变的过程，在此过程中，学生能自主构建知识框架，就好比建造房子，基础稳固了，数学思维也能得到很好的拓展[10]。APOS 理论就提供了一个非常好的帮助学生深入学习、建构概念的模型，符合数学教学中由特殊实例得到结论一般性的过程。在概念学习中，APOS 理论将概念的学习分为“活动、过程、对象和图式”四个阶段。在每个阶段中，都有一个学习任务，且需要完成一个具体的学习目标，这是一个彼此联系、循序渐进的过程。在每一个阶段，对概念的学习不仅仅是关注结果，更是注重学生参与课堂探索知识的过程。让学生在思考、对比、归纳和总结中获得数学概念，这正是新课改提倡和要求的[11]。因此，在教学实践中，我们要善于将 APOS 理论用于数学概念的教学中，帮助学生深入理解概念的本质，建构概念的图式，让学生达到深入理解并广泛应用的效果，同时应注意以下几点。

4.1. 引入问题生活性

数学知识与我们的生活密切相关, 数学既来源于生活, 又应用于生活。传统的概念教学大多是简单讲一下概念本身, 着重突出知识的应用, 学生其实并没有真正的理解概念本身。而我们利用 APOS 理论进行概念教学则要侧重于概念本身的学习, 注重从贴近学生生活实际的具体实例进行引入[12], 强调知识产生的背景和发生发展的过程, 将过程性与生活性相结合, 激发学生的求知欲和好奇心, 遵循学生的认知发展规律, 注重学生已有的知识经验和生活经验, 新知识、新概念的获得是从学生已有经验中生长出来的, 让学生经历与生活密切相关的“活动”阶段, 经历概念的形成过程, 获得对数学知识的感性认识, 充分体现数学的生活性。

4.2. 学生学习主体性

有效的教学活动是教师教与学生学的统一, 在课堂教学中, 教师应扮演好“组织者”、“引导者”和“合作者”的角色, 让学生真正成为学习的主体、课堂的主角。基于 APOS 理论的数学概念教学要求, 教师在概念的引入时, 更加注重学生自己通过不断反思、对比、归纳, 自主建构知识体系。在“过程”阶段, 教师应充分调动学生参与学习、参与讨论交流的积极性, 强调学生主动地参与教学过程, 逐步引导学生形成概念, 教师只是学生发现概念的“促进者”, 学生对于概念的学习更多地还是由学生经历整个过程, 感知、理解、归纳、概括而自主建构得到的[13]。

4.3. 知识体系建构性

APOS 理论实质上是一种建构主义的学习理论, 它将数学知识体系看作是一个不断自我构建的过程, 与传统的概念教学相比较, APOS 理论更注重知识间的关联与整合。在 APOS 理论下, 知识不是老师硬塞给学生的, 而是学生经历一系列的过程建构的。因此, 教师在教学中要注重学生的心理发展水平, 联系学生已有的知识, 设计适当的教学过程, 引导学生在过程中把握概念的本质, 并将其同化到已有的知识结构中, 从而主动建构数学知识体系, 以达到深层次理解知识、灵活应用知识的程度。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部, 义务教育数学课程标准(2022 年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [2] 于沛琳, 陈建强. 基于 APOS 理论的概念教学设计探究——以“指数函数的概念”为例[J]. 中学数学, 2023(19): 5-6, 19.
- [3] 程华. APOS 理论的内涵及其对中学数学概念教学的启示[J]. 教学与管理, 2010(8): 65-66.
- [4] 曾玉祥. APOS 理论在高等数学概念探究式教学中的应用[J]. 教育探索, 2013(5): 42-43.
- [5] 姜绍蕊. 基于 APOS 理论的指数函数概念教学研究[D]: [硕士学位论文]. 天津: 天津师范大学, 2021.
- [6] 宋洁静. 基于 APOS 理论的高中数学概念深度学习教学设计研究[D]: [硕士学位论文]. 开封: 河南大学, 2023.
- [7] 吴华, 周鸣. GeoGebra 环境下基于 APOS 理论的数学概念教学研究——以导数概念为例[J]. 数学教育学报, 2013, 22(2): 87-90.
- [8] 乔连全. APOS: 一种建构主义的数学学习理论[J]. 全球教育展望, 2001, 30(3): 16-18.
- [9] 林菊芳. 基于 APOS 理论的初中数学概念课教学设计——以“函数概念”为例[J]. 中学数学, 2022(8): 8-10.
- [10] 章建跃. 研究三角形的数学思维方式[J]. 数学通报, 2019, 58(4): 1-10.
- [11] 潘小琴, 冯长焕. 基于 APOS 理论的初中数学概念教学设计——以“二次函数的概念”教学为例[J]. 大学, 2021(S2): 34-36.
- [12] 张文瑜. APOS 理论下的指数函数概念教学设计与实践[D]: [硕士学位论文]. 青岛: 青岛大学, 2022.
- [13] 陈丽. 基于 APOS 理论的指数函数概念教学设计[J]. 数学学习与研究, 2020(10): 16-17.