Creative Education Studies 创新教育研究, 2024, 12(9), 430-436
Published Online September 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2024.129640

Hans汉斯

以“导数的概念”为例，将思政元素融入微积分教学

郑　洁

东华大学数学与统计学院，上海

收稿日期：2024年7月29日；录用日期：2024年9月4日；发布日期：2024年9月12日

摘　要

微积分是大学理工科学生的必修课程，导数是微积分的核心概念之一。微积分中的许多知识点，例如，函数的单调性，曲线的曲率，微分中值定理等，都与导数有密切的关系。文章着重讲解如何引导学生深刻理解导数的概念及本质含义，了解导数在其他学科中的应用。并以此教学单位为例，说明如何将思政元素自然地融入微积分教学。

关键词

自变量的增量，函数的增量，极限，导数，思政元素

Taking the “Concept of Derivatives” as an Example and Integrating Ideological-Political Elements into the Teaching of Calculus

Jie Zheng

School of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai

Received: Jul. 29th, 2024; accepted: Sep. 4th, 2024; published: Sep. 12th, 2024

Abstract

Calculus is a compulsory course for science and engineering students in universities, and derivative (also known as micro-quotient) is one of the most important concepts of calculus. Many concepts and properties in calculus, including the monotonicity of functions, the curvature of curves, the differential median theorem, etc., are all closely related to derivatives. This article focuses on how to understand the concept and practical significance of derivatives. We also illustrate how to integrate ideological-political elements into the teaching of calculus.

文章引用: 郑洁. 以“导数的概念”为例，将思政元素融入微积分教学[J]. 创新教育研究, 2024, 12(9): 430-436.
DOI: 10.12677/ces.2024.129640

Keywords

Increment of Independent Variable, Increment of Function, Limit, Derivative, Ideological-Political Element

1. 引言

导数，也称为微商，是高等数学中重要的基础概念。部分学生在高中阶段，已经学习了导数的一些计算方法，但是对于导数概念的理解仍然不够透彻，对导数在其他学科中的应用也不甚了解。因此，在大学微积分课程中，导数仍然是十分重要的学习内容。教师须精心设计课程，引导学生深刻理解导数的概念，掌握相关的知识，为后续的微分、曲率及函数极值等知识的学习做好铺垫。

导数起源于十七世纪二三十年代。1637 年，法国数学家费马在研究作曲线的切线时，构造了函数差分，其中隐含有导数的概念。1750 年，达朗贝尔在法国科学院出版的《百科全书》中提出了关于导数的一种观点。1823 年，柯西在他的《无穷小分析概论》中定义导数：如果函数 $y=f(x)$ 在变量 x 的两个给定的界限之间保持连续，并且我们为这样的变量指定一个包含在这两个不同界限之间的值，那么会使变量得到一个无穷小增量。19 世纪 60 年代以后，魏尔斯特拉斯创造了 ε-δ 语言，对微积分中出现的各种类型的极限重新表达，导数才获得了今天常见的定义形式。

通过本节课程的学习，我们引导学生深刻理解导数的概念和本质，熟练掌握使用定义计算导数的方法。在各教学环节中培养学生的抽象思维能力，逻辑推理能力，空间想象能力，运算能力以及运用所学知识去分析问题和解决问题的能力，为学生学习相关专业的后继课程奠定必要的数学基础。

通过揭示导数定义中蕴含的量变与质变的关系，增强学生人文素养和辩证思维，培养学生严谨客观的科学态度和勇于探索的科学精神。即使以后学生把具体的数学定义和公式忘掉了，分析解决问题的思想方法和严密的逻辑推理能力也会帮助学生成长和进步。

2. 导数的概念

2.1. 通过案例引入导数定义

我们使用曲线切线的斜率引发案例讨论[1]。如下图 1，点 $M(x_0,y_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上一点，点 $N(x,y)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上另一点，这里 $x=x_0+\Delta x$， $y=f(x_0+\Delta x)$。

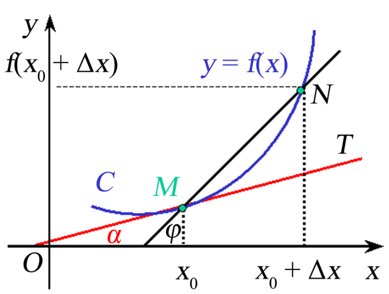

Figure 1. Secant and tangent of the curve
图 1. 曲线的割线与切线

由中学知识可知，割线 MN 的斜率为

$$\tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

当点 N 沿曲线 C 移向点 M，即 $\Delta x \to 0$ 时，割线 MN 的极限位置 MT 为曲线 C 在 M 处的切线，因此切线 MT 的斜率为

$$k = \tan\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

此极限形式具有非常重要的意义，在很多其他的问题中都有应用，因此需要给予关注。

2.2. 导数的定义及计算

设函数 $y=f\left(x\right)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx， $x_0+\Delta x$ 也在该邻域内时，相应地，函数取得增量 $\Delta y = f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$。

当 $\Delta x\to 0$ 时，如果 Δy 与 Δx 之比的极限存在，则称函数 $y=f\left(x\right)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y=f\left(x\right)$ 在点 x_0 处的导数，记作 $f'\left(x_0\right)$ 或者 $y'\big|_{x=x_0}$，即

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

利用定义，可以求常见函数的导数。例如， $f\left(x\right)=\ln x\left(x>0\right)$，则

$$\begin{aligned} f'\left(2\right) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(2+\Delta x\right)-f\left(2\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(2+\Delta x\right)-\ln 2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{2}\right)^{\frac{2}{\Delta x}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

又例如， $g\left(x\right)=a^x\left(a>0,a\neq 1\right)$，则

$$\begin{aligned} g'\left(x\right) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g\left(x+\Delta x\right)-g\left(x\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x} \\ &= a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\ln a}{\Delta x} = a^x\ln a \end{aligned}$$

由定义，可以引导学生思考，在什么情况下，函数在某点处不可导？并用例子对他们的答案给予肯定或者否定。这需要教师在备课过程中有此知识点的积累和准备，这里不再赘述。

2.3. 导数的实质和几何意义和物理意义

导数的定义是大学微积分的核心和基础内容之一，用于解决变化率问题，例如变速直线运动的瞬时速度，线密度问题，曲线的切线问题等。导数的实质是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，即函数的增量与自变量的增量之比的极限，导数反映的是函数在某点的瞬时变化率。

由引入案例可知，导数的几何意义为曲线 $y=f\left(x\right)$ 在某点处切线的斜率。如果函数 $y=f\left(x\right)$ 代表质点在某时刻的位移曲线，则导数的物理意义为该质点在时刻 x 时的瞬时速度[2]。

2.4. 导数与微分的联系

课程中可联系另一个重要概念——微分。导数和微分是微分学的基本概念，微分学是微积分的重要组成部分。通俗地讲，导数 $f'(x)$ 反映了函数值相对于自变量的变化快慢程度，而微分 $\mathrm{d}y$ 则表明当自变量有微小变化时，函数值大体上变化多少，即 $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$。

3. 利用软件理解导数

向学生讲授导数的定义及其他微积分内容时，可以适当使用计算机软件，将传统的数学内容与数值计算软件结合起来，增加数学应用模型的讲授和训练，培养学生的数学建模能力。

比如，在本节中，可以对多项式函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+7$，求其在 $x=-1$ 处的导数，使用计算机软件(比如 Mathematics)编程计算导数值，并绘制图像。

具体程序如下表 1：

Table 1. The program code for finding the derivative of $f(x)=2x^3+3x^2-12x+7$

表 1. 求函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+7$ 的导数的程序代码

```
f[x]=2x^3+3x^2-12x+7;

plotf=Plot[f[x],{x,-4,3},
DisplayFunction->Identity];

plot2=Plot[f'[-1]*(x+1)+f[-1],{x,-4,3},
PlotStyle->GrayLeve1[0.5],
DisplayFunction->Identity];

Show[plotf,plot2,DisplayFunction-
>$DisplayFunction]
```

执行后，软件便在同一个坐标系内作出了函数 $f(x)$ 的图形和它在 $x=-1$ 处的切线，如下图 2。

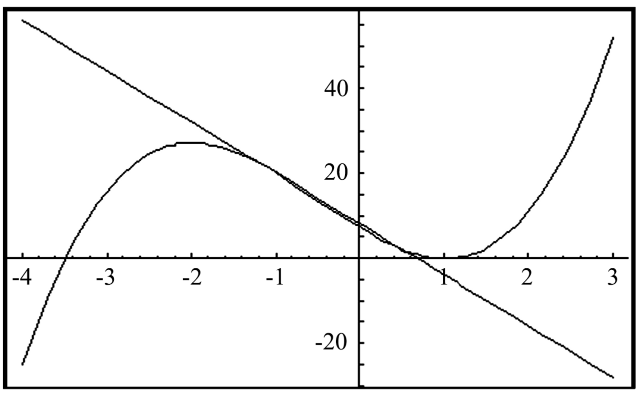

Figure 2. The graph of the function $f(x)$ and its tangent at $x=-1$

图 2. 函数 $f(x)$ 的图形和其在 $x=-1$ 处的切线

这一讲课策略，贯彻了国家积极开展 AI+课程与产教融合课程建设的方针。使用计算机软件 Mathematica，将传统的微积分理论与先进的数值计算软件结合起来，增加数学应用模型的讲授和训练，让学生把数学的思想和方法学以致用。在掌握笔算的同时，提高了学生设计程序使用软件的能力。使学生感觉到利用计算机软件提高计算效率的成就感，为今后的科研和工程项目开展大规模计算打好基础。

4. 导数与其他学科的联系

课程讲授过程中，可以简单介绍导数与其他学科的联系，帮助学生了解到导数的实际应用，认识到导数不是一个孤立的数学名词。

这里列举两个导数在其他学科中的应用，教师可以灵活掌握，选取任意一个向学生进行介绍即可。

4.1. 导数与经济学中的边际收益

边际是经济学中的一个重要概念，指的是经济变量的变化率。利用导数研究经济量的边际变化，称为边际分析。用数学语言解释，边际指的是当 x 在 x_0 附近有微小变化时，y 的瞬时变化，即当 $\Delta x \to 0$ 时，y 有增量 Δy，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 即为边际。

边际成本的数学公式为 $MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q}$，公式中的 MC 代表的是边际成本，ΔTC 是变化的总成本，ΔQ 代表的是变化的总产量。当变化的产量无限趋近于零时，边际成本 MC 的值就是成本函数在 Q 这一点的导数。

经济学中的利润最大化通常用边际利润来表示。边际利润是指，在其他条件不变的情况下，每增加一个单位的商品所带来的经济利润的变化量，即 $MR = \frac{\Delta TR}{\Delta Q}$，其中 MR 代表边际利润，ΔTR 指变化的生产量带来的变化的总利润，ΔQ 指变化的生产量。当变化的产量无限趋于 0 时，边际利润的值就是利润函数在 Q 点的导数。

在经济学中，原则是使企业生产商品的边际成本与边际利润相等，即 $MC = MR$。原因如下：假如企业的边际成本大于边际利润，此时企业每多生产一个单位商品带来的成本大于带来的利润，企业一定不会再多生产；假如企业的边际成本小于边际利润，此时企业每多生产一个单位商品带来的成本小于带来的收益，企业一定会增加商品的生产，直到每多生产一个单位的商品带来的成本与收益相等时，企业才不会调整生产策略。所以企业想要实现利润最大化，其边际成本既不能大于边际利润也不能小于边际利润，而是两者正好相等才能达到最优的效果，即 $MC = MR$ [3]。

4.2. 导数与物理学中的电磁感应势

导数与物理学关系密切。课堂上可以列举一个导数在物理中的应用——电磁感应势。物理学中，磁通量的变化率可以用来描述磁场变化的快慢程度，其数学表达式通常记为 $\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$，其中 Φ 代表磁通量，t 代表时间。当变化时间 Δt 趋于 0 时，极限 $\lim\limits_{\Delta t \to \infty} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ (磁通量对时间的导数)，即为某时刻的电磁感应势，它反映了电磁场中磁通量变化的动态过程[4]。电磁感应势直接关联法拉第电磁感应定律这一物理学中的重要成果。

4.3. 导数与传染病传播模型

本节课还可以向学生介绍传染病传播模型的 SI 模型。设人口总数为常数 N，人群分为易感染者(Susceptible)和易传染者(Infective)两种类型，所占人口比例在时刻 t 分别为 $s(t)$ 和 $i(t)$，显然 $s(t)+i(t)=1$。由以上假设，在时刻 t 的病人总数为 $N \times i(t)$，Δt 时间内会新增 $\lambda \times s(t) \times N \times i(t) \times \Delta t$ 个病人，其中 λ 为某个比例常数。显然，$\frac{N \times i(t+\Delta t) - N \times i(t)}{\Delta t} = \lambda \times s(t) \times N \times i(t)$，对此式两边取 $\Delta t \to 0$，代入 $s(t) = 1 - i(t)$，即 $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda \times (1 - i(t)) \times i(t)$，方程左边即为易传染者函数 $i(t)$ 导数的定义式。这是染病传播 SI 模型中

最核心的一个微分方程，后面的高数学习中将涉及求解该方程。

5. 思政教学具体实施方法

导数这节课以启发式教学展开，鼓励学生积极思考，自主使用软件进行实践操作，结合具体应用案例激发学生探索知识的主观能动性。

与此同时，可以找准合适的切入点，将思政元素融入导数的教学过程，开展课程思政。以本节为例，可以按如下方式实施。

1) 在演示从曲线某点的割线到切线的变化过程中，可引导学生："学习也是一个量变到质变的过程，我们只有注意了平时量的积累，才可能某时实现质的飞跃。""如果每天进步那么一点点，一段时间后，你就会收获颇丰。"

2) 在讲解变速直线运动的瞬时速度是位移函数的导数时，可以引入我国高铁的瞬时速度问题。这样，既可以激起学生的思维火花，又可以顺势引出我国的经济发展现状，增强学生对中国高速发展的认同感，激发学生们的爱国热情及民族自豪感。

3) 引导学生使用软件理解函数导数的意义时，鼓励学生相互讨论，共同设计算法，组成团队创造性地去解决问题。此过程培养和锻炼了学生的协作能力。鼓励学生学以致用，今后用所学知识解决社会生产和实际生活中的问题，为国家的发展尽自己的一份力量。

以上只是抛砖引玉，教师可以结合实际灵活开展课程思政。

6. 学生反馈与小结

6.1. 学生问卷

课程结束后做学生问卷，发放问卷共计 140 份，收回问卷共 140 份。由表 2 数据可知，学生整体反应收获较大，相对于高中学到的关于导数的一些表层知识，如上组织构架的导数课程能让他们对导数理解更加深刻，各方面的认识更加完整。

Table 2. Summary of the student questionnaire on teaching effectiveness
表 2. 教学效果学生问卷情况总结

序号	调查内容	非常满意	满意	尚可	不太满意	合计
1	通过课程，我知道了导数的本质	131	9	0	0	140
2	我能够列举导数在其他学科中的一个应用	138	0	2	0	140
3	我知道如何用软件求曲线在某点的切线	135	2	2	1	140
4	这节课的知识比高中时学的导数的知识更丰富，我对导数的理解更加透彻了	140	0	0	0	140
5	除了数学内容，我还知道了一些其他的人生道理	136	3	1	0	140

6.2. 学生访谈

课程结束随机抽取四名学生做了访谈，内容如下：

问：这节课的导数知识和高中的导数知识有不同吗？

答：(学生 1)很大不同。

(学生 2)这节课内容多多了。

(学生 3)很不一样。

(学生 4)深很多，也丰富很多。

问：通过这节课的学习，你知道了导数与哪些知识有联系？

答：(学生 1)与很多知识都有联系，感觉只要涉及变化率的，都有联系。

(学生 2)印象深刻的是传染病传播模型里有导数的应用。

(学生 3)经济学里很多研究对象和导数有联系。

(学生 4)很多。比如，几何里曲线的斜率。

问：除了高等数学知识，你感觉这节课你还收获到了其他的吗？

答：(学生 1)有，导数的物理应用和速度这一概念相关。了解到了我们国家各方面发展速度都挺了不起的。

(学生 2)我知道了要和别人协作，要学会沟通，做实验里学会的。

(学生 3)嗯，除了课本上的知识，还要善于学习新技能，世界和中国都发展很快。

(学生 4)我了解到我们的祖先很厉害，要向他们学习，善于积累。

访谈结果表明，这节课学生的收获颇丰。不仅仅有课本上理论知识的收获，还有一些人生感悟理解。这也表明一节高等数学课程可以在传授专业知识的同时，融入思政教育。

6.3. 本文小结

本文以导数的概念一节为例，介绍高数课程中，教师如何把所讲内容与其他学科内容相结合，训练学生的实验能力并自然地将思政元素融入教学过程。微积分的课程思政须结合自身的特点，充分发挥数学思想、数学方法、数学精神在育人方面的价值，避免照本宣科与生搬硬套[5]。教师应该意识到，课程思政是一种课程观，是以课程为载体，挖掘课程蕴含的思想政治教育元素。在授课的同时，注重社会主义核心价值观的引导作用，将显性教育与隐形教育相结合，构建积极向上的课程育人体系[6]。

基金项目

本论文由东华大学高等数学示范教研室项目提供资助。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学(上册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014: 132-133.

[2] 哈尔滨工程大学数学学院. 工科数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020: 77-80.

[3] N·格里高利·曼昆. 经济学基础[M]. 北京: 北京大学出版社, 2022.

[4] 陈秉乾, 王稼军. 大学物理通用教材电磁学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2012.

[5] 王莹. 课程思政的价值本源与价值实现[J]. 思想理论教育导刊, 2024(5): 144-150.

[6] 黄婷. “大思政课”视域下大学生科学家精神培育研究[J]. 创新教育研究, 2024, 12(7): 283-288. https://doi.org/10.12677/ces.2024.127462