

# 学习进阶视角下高中数学课程学历案设计

## ——以“函数的概念与性质”为例

张艳阳

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2024年10月21日; 录用日期: 2025年1月1日; 发布日期: 2025年1月9日

### 摘 要

数学教学在让学生掌握基本的知识技能的同时, 还要促进学生数学核心素养的提升及水平的达成。“学习进阶”和“学历案”为培养数学核心素养提供了设计思路和操作框架。笔者以人教A版高中数学必修一的“函数的概念与性质”为例, 结合将学习进阶融入学历案设计的三个要点, 即要明确阶段性目标、要实现教学评一体化、要创设合适的教学情境, 展示了融合学习进阶理论的完整单元学历案和课时学历案学习过程设计, 分析了学习进阶理论与学历案设计结合的实践意义, 以期为一线教师们提供参考。

### 关键词

学习进阶, 学历案, 数学核心素养, 函数的概念与性质

# Design of High School Mathematics Curriculum Diploma Plan from the Perspective of Learning Progression

## —Taking “Concept and Properties of Functions” as an Example

Yanyang Zhang

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Oct. 21<sup>st</sup>, 2024; accepted: Jan. 1<sup>st</sup>, 2025; published: Jan. 9<sup>th</sup>, 2025

### Abstract

Mathematics instruction aims to not only equip students with basic knowledge and skills, but also promote the development of their mathematical core competencies and the attainment of their proficiency level. “Learning progression” and “Education program” provide design ideas and operational

framework for cultivating mathematics core literacy. Taking “The Concept and Nature of Function” as an example, the author combined the three key points of integrating learning progression into the design of degree plan, that is, to clarify the stage goal, to realize the integration of teaching evaluation, and to create a suitable teaching situation, and demonstrated the design of the learning process of the complete unit degree plan and the class hour degree plan integrating the theory of learning progression. This paper analyzes the practical significance of the combination of learning progression theory and academic record design, in order to provide reference for teachers.

Keywords

Learning Progression, Academic Record, Mathematics Core Literacy, The Concept and Properties of Function

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.  
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).  
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 引言

学习进阶理论是对学生在学习或研究某一主题时，学生的思维方式经历了具有连续性和层级性的发展历程的描述，它强调学生在学习过程中的认知能力水平提升是具有阶段性的。张咏梅[1]将学习进阶的构成要素分解为下锚(即学习起点)、中间水平(即发展阶点)、进阶变量(即学科核心概念或核心素养)和上锚(即学习终点)，如图 1，并参照美国等国家将学习进阶渗透到课程标准的改革，提出学习进阶可以为我国的课程标准的开发以及教学设计的实施提供理论基础。《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》(以下简称“课标”)将每个数学核心素养根据学习数学的需求和难易程度划分为了三个由浅入深的水平，并指出学生在完成学习任务后，要达到核心素养的相应水平。课标中对于核心素养的要求与学习进阶理论中的阶段性发展目标相吻合，将学习进阶理论融入高中数学实际教学，不仅可以帮助制定明确详细的核心素养培养框架，也能较好反映学生的认知状态和过程。

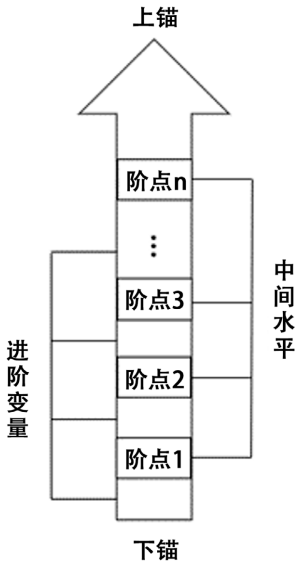


Figure 1. Elements of learning progression  
图 1. 学习进阶的构成要素

关于学习进阶教学实践方面,孙立坤[2]结合义务教育阶段的数学核心素养目标,设计并实施了质量概念的学习进阶路径和学习活动框架,发现在培养学生量感、应用意识和创新意识方面取得了良好的教学效果。张明硕[3]就“月球为何没有飞向太阳”这一物理问题,结合学习进阶理论搭建了在中学中引入大学物理知识的学习支架,打破了物理“难教难学”的刻板印象。吴颖康[4]借鉴了澳大利亚 RMFII 项目的思路和方法,基于我国义务教育课程标准中对统计与概率内容的要求,提出了可以评估学生数据观念的学习进阶模型。在学习进阶应用于学科教学的理论研究方面,王全[5]、谷同耀[6]和刘一萌[7]分别整理了化学、地理和生物学科关于学习进阶的文献,在回顾中展望了未来学习进阶发展的方向是与各个学科的核心素养进行融合。

学历案最早由华东师范大学的崔允漷教授为真正实现“以学生为主体”的教学要求而提出。相比于传统的教案和导学案,学历案更加关注学生“何以学会”的过程。学历案采用逆向设计法,先确定学习目标,再制定评价任务,进而设计学习过程,这种方法可以确保学生的学习内容与学习经历相匹配[8]。学历案的设计始终围绕学生“如何学会”展开,这与课标中提到的“高中数学教学以发展学生数学学科核心素养为导向,创设合适的教学情境,启发学生思考,引导学生把握数学内容的本质”的理念相契合。数学核心素养强调学生的自主学习、探究学习和合作学习,而学历案正是通过设计一系列活动,引导学生主动构建数学知识,从而培养学生的核心素养[9]。

通过对学习进阶理论和学历案的研究发现[10]-[13],两者在目标上都致力于促进学生的持续学习和思维发展。学习进阶理论侧重于描述学生思考的连续性和发展性来指导教学,学历案设计则重视记录学生的学习过程和变化来优化教学,如图2。因此,将二者有机结合,在学习进阶的视角下,设计并实施更加符合学生的认知规律和学习实际特点的学历案,可以为学生提供更加全面、系统和有效的学习支持,发展学生的数学核心素养。

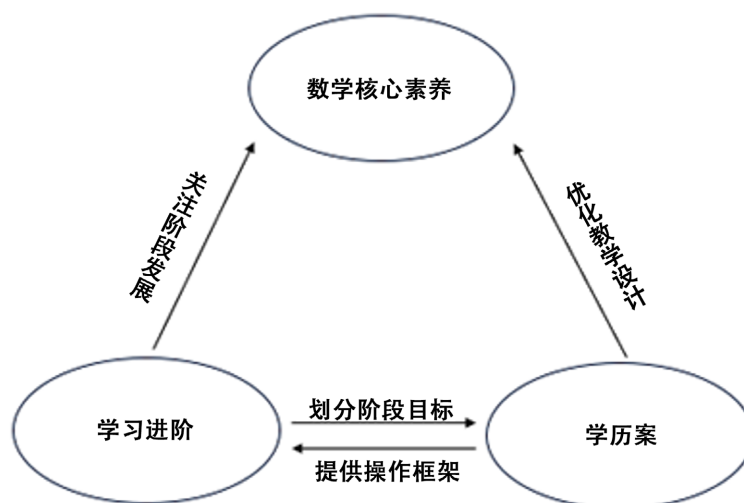


Figure 2. The relationship between learning progression and academic record  
图2. 学习进阶与学历案之间的关系

## 2. 案例展示

函数是高中数学课程四条主线之一,贯穿整个高中数学学习过程。从基础的函数定义、性质到复杂的函数应用,如方程、不等式、数列、导数等,都建立在函数概念与性质之上。因此,理解和掌握函数的相关知识是学好高中数学的关键。函数是培养学生逻辑思维、抽象思维以及问题解决能力的重要载体,但因其抽象性程度较高,成为了众多学生学习数学的难点。笔者将以人教A版高中数学必修一的“函数

的概念与性质”为例，将学习进阶理论融入该章的单元学历案设计，再结合本章的最后一节“函数的应用”，展示此课时具体的学历案学习过程设计。以期利用详细的案例帮助教师厘清要教什么、怎么教，告诉学生要学什么、如何学。

2.1. “函数的概念与性质”单元学历案设计

大单元教学是我国新课程改革推行的重点，一经提出，便成为一线教育工作者研究的热点。大单元教学强调知识的整体性和系统性，以学科核心素养为导向，通过创设真实或模拟的情境，让学生在应用知识的过程中发现知识点之间的联系，从而促进学生构建知识体系，培养综合能力。将学历案与大单元教学结合，可以将二者的优势进行互补，这样既能让学生在整体上把握知识框架，又能在具体问题上深入思考和分析。卢明和崔允漷[14]将高中大单元学历案设计的要素确定为单元名称与课时、学习目标、评价任务、学习过程、作业与检测和学后反思六个部分，并制定了单元学历案教学模式的流程。笔者以“函数的概念与性质”为例，结合表格的形式，呈现融入学习进阶的单元学历案。

2.1.1. 单元名称与课时

根据课标对函数的学业要求和课时分配建议，结合教材具体内容进行分析，确定课时安排和指向的数学核心素养如表 1 所示。

Table 1. Unit names and lesson allocation  
表 1. 单元名称与课时分配

| 单元名称：函数的概念与性质 |                          |      |
|---------------|--------------------------|------|
| 课时名称          | 指向的数学核心素养                | 课时分配 |
| 函数的概念         | 数学抽象                     | 1    |
| 函数的表示法        | 数学抽象                     | 2    |
| 单调性与最大(小)值    | 逻辑推理、数学运算                | 2    |
| 奇偶性           | 逻辑推理、直观想象、数学运算           | 2    |
| 幂函数           | 数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算、数学建模 | 2    |
| 函数的应用         | 逻辑推理、直观想象、数学运算、数学建模      | 2    |

2.1.2. 学习目标

依照课标中“课程内容”对函数知识的划分以及知识发展的层级关系，制定了本章的发展阶点和对应的学习目标，如表 2 所示。

Table 2. Unit learning development goals  
表 2. 单元学习发展目标

| 发展阶点             | 学习目标                                                                   |
|------------------|------------------------------------------------------------------------|
| 阶点 1：理解函数的概念     | 目标 1：能够理解高中对于函数概念的“集合 - 变量说”；掌握函数定义三要素，能根据问题求出所给函数的定义域或值域；了解函数常见的表示方法。 |
| 阶点 2：掌握函数的性质     | 目标 2：能够理解函数的单调性和最大(小)值，能够证明函数的奇偶性。                                     |
| 阶点 3：探究幂函数的概念和性质 | 目标 3：通过实例，了解幂函数的变化规律，理解幂函数的概念，掌握幂函数的概念。                                |
| 阶点 4：应用函数解决实际问题  | 目标 4：通过实例感受一次函数、二次函数以及幂函数在生活中的广泛应用；体会利用函数建模解决实际问题的过程与方法。               |

2.1.3. 评价任务

“评价任务”的设计原则是检测学生“何以学会”，即通过学生的表现来反馈对知识的掌握情况，判断学习目标是否达成。结合本章的学习内容和“作业与检测”环节中的习题，确定了单元评价任务和对应的检测目标如表 3 所示。

Table 3. Unit evaluation tasks  
表 3. 单元评价任务

| 评价任务                                                                                                             | 检测目标 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 通过“作业与检测”中阶点 1 对应的习题，检测是否理解函数的概念相关知识                                                                             | 目标 1 |
| 通过“作业与检测”中阶点 2 对应的习题，检测对函数的性质掌握情况                                                                                | 目标 2 |
| 通过求幂函数 $y = x, y = x^2, y = x^3, y = x^{\frac{1}{2}}, y = x^{-1}$ 的定义域、值域、单调性和奇偶性以及“作业与检测”中阶点 3 对应的习题，检测对幂函数掌握程度 | 目标 3 |
| 通过“作业与检测”中阶点 4 对应的习题，检测对利用函数解决问题的熟练程度                                                                            | 目标 4 |

2.1.4. 学习过程

“学习过程”是学历案设计的核心环节，是实现“真学习”的关键，它包括学习资源与建议与学习过程设计两个部分。“学习资源与建议”是在学习前，教师引导学生了解具体的学习内容，熟悉教学安排，为学生提供的高效学习策略，如表 4 所示。对“学习过程”的设计，要按照学生的发展阶点，整合具体的知识点，做好学习规划，如表 5 所示。

2.1.5. 作业与检测

教材中的复习参考题针对性强、层次分明、综合性高，可以帮助学生巩固新知、查漏补缺。本着立足教材，充分开发教材资源的原则，将教材中的“复习参考题 3”(P100)的考察知识进行标注，如表 6，检测学生达到的水平阶点。

Table 4. Unit learning resources and recommendations  
表 4. 单元学习资源与建议

|      | 学习资源与建议                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 学习资源 | 函数作为描述客观世界中变量关系和规律的基本数学工具的重要性。明确学习函数不仅是为了应对考试，更是为了掌握一种解决现实问题的有效方法。学习函数时，要充分利用教材上的习题资源，结合网络教学视频和教辅资料，开拓眼界，扩充知识范围。                                                                                                                                                                                                              |
| 学习建议 | 首先，对于学习函数的概念学习，理解“集合 - 对应”的本质，重点掌握函数的三个构成要素，了解函数符号 $f(x)$ 和几种主要的表示方式，为理解和抽象出幂函数的概念做好准备。<br>其次，对于函数的性质学习，我们要掌握函数的最值、单调性和奇偶性。一般我们从观察函数的图象入手，运用自然语言描述函数图象特征，最后再用抽象的数学语言对其进行整合。<br>最后，对于函数的应用学习，我们重点关注的是建立分段函数解决实际问题。首先需要根据题意确定分段区间，确定函数解析式，再由自变量所在的区间选择相应的函数表达式进行计算。<br>必要时，我们要画出分段函数的图象来帮助分析问题。<br>总的来说，学习函数需要做到注重基础，循序渐进，拾阶而上。 |
| 学习流程 | 概念阶段 - 性质阶段 - 探究阶段 - 应用阶段                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 学习重点 | 函数的概念与性质；幂函数的概念与性质                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 学习难点 | 函数概念的应用；求函数的最值、函数单调性及奇偶性的应用和证明；建立分段函数模型解决实际问题                                                                                                                                                                                                                                                                                 |

**Table 5.** Learning progression process  
**表 5.** 学习进阶过程

| 发展阶次              | 学习内容及规划                                                                                                                                                                   | 学习进阶过程设计                                                                                                                                                                                                             |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 阶次 1: 理解函数的概念     | <p><b>知识点:</b> 函数的概念, 函数构成的三个要素, 用图象法、列表法、解析法表示函数, 了解分段函数。</p> <p><b>学习规划:</b> 通过观察多个函数解析式的共同特征, 概括函数的概念, 发展数学抽象能力; 能根据需求在不同情景中选择恰当的方法表示函数; 了解分段函数, 体会函数是解决实际问题的有效工具。</p> | <p><b>情景 1:</b> 在初中对函数概念的“变量说”的基础上, 利用集合语言和对对应关系刻画函数, 建立完整的函数概念。</p> <p><b>解决问题:</b> 1) 函数的概念? 2) 函数的构成要素? 3) 如何判断两个函数是同一函数?</p> <p><b>情景 2:</b> 根据实际需求用不同的方法表示函数。</p> <p><b>解决问题:</b> 1) 表示函数常用的方法? 2) 分段函数的形式?</p> |
| 阶次 2: 掌握函数的性质     | <p><b>知识点:</b> 辨别函数的单调性, 最大值与最小值; 判断函数的奇偶性。</p> <p><b>学习规划:</b> 结合函数图像, 观察函数的单调性, 探究函数的奇偶性, 体会数形结合的思想, 发展直观想象能力; 通过求函数特定区间的最值, 提升数学运算能力。</p>                              | <p><b>情景:</b> 展示不同函数的图象, 观察并分析它们在区域中的变化特征、最值情况, 以及图象整体的对称性。</p> <p><b>解决问题:</b> 1) 如何用集合语言描述函数的单调性, 最大值、最小值? 2) 如何判断函数的单调性, 求函数的最值? 3) 如何描述函数的奇偶性? 4) 如何证明函数的奇偶性?</p>                                                |
| 阶次 3: 探究幂函数的概念和性质 | <p><b>知识点:</b> 幂函数的概念和一般形式, 常见的幂函数的性质。</p> <p><b>学习规划:</b> 通过观察函数解析式, 得出幂函数的一般形式, 培养数学抽象能力; 探究常见幂函数的性质, 提升逻辑思维和推理能力。</p>                                                  | <p><b>情景:</b> 并研究幂函数</p> <p><math>y = x, y = x^2, y = x^3, y = x^{\frac{1}{2}}, y = x^{-1}</math> 的图象与性质。</p> <p><b>解决问题:</b> 1) 幂函数的概念? 2) 函数图象都经过哪一定点? 3) 以上函数各有什么性质?</p>                                          |
| 阶次 4: 应用函数解决实际问题  | <p><b>知识点:</b> 一次函数、二次函数和幂函数的实际应用。</p> <p><b>学习规划:</b> 能选用合适的函数刻画并解决现实问题, 提升数学建模素养。</p>                                                                                   | <p><b>情景:</b> 分析实际问题, 提取信息, 建立分段函数模型求解。</p> <p><b>解决问题:</b> 1) 教材例题及课堂练习题; 2) 建立分段函数解决实际问题的一般步骤?</p>                                                                                                                 |

**Table 6.** Unit work and test learning level table  
**表 6.** 单元作业与检测学习水平表

| 达成阶次              | 题号                | 考察知识                       |
|-------------------|-------------------|----------------------------|
| 阶次 1: 理解函数的概念     | 1, 2, 3           | 函数的概念及构成要素                 |
|                   | 7                 | 分段函数                       |
|                   | 4                 | 函数的单调性                     |
| 阶次 2: 掌握函数的性质     | 8                 | 函数的概念、函数的单调性证明             |
|                   | 9                 | 函数的奇偶性、单调性                 |
|                   | 12                | 函数的构成要素、分段函数的图像、函数的奇偶性和单调性 |
| 阶次 3: 探究幂函数的概念和性质 | 5                 | 幂函数的一般形式、幂函数的性质            |
| 阶次 4: 应用函数解决实际问题  | 6, 10, 11, 13, 14 | 建立函数模型解决问题                 |

**2.1.6. 单元学后反思**

学后反思的目的不仅在于提醒学生对重点知识的回顾, 更是为学生审视自身学习行为, 诊断学习问题指引方向。要让学生有效地进行反思, 可以从指向知识梳理、问题诊断、策略总结和知识创新四个方面来设计反思支架, 如表 7。

Table 7. Unit learning reflection table  
表 7. 单元学后反思表

| 指导语                                                       | 指向方面 |
|-----------------------------------------------------------|------|
| 本单元我们学习了那些知识？你可以用知识图谱将它们之间的关系呈现出来吗？                       | 知识梳理 |
| 你能熟练利用函数相关知识解决数学问题吗？你对函数的学习还存在什么困惑？                       | 问题诊断 |
| 遇到一个新的函数，我们通常会从哪些方面展开研究呢？可以通过回顾我们是如何研究幂函数进行尝试。            | 策略总结 |
| 学习了本章后，你对函数有新的认识吗？函数是非常有用的数学工具，在你的生活中有利用函数相关知识帮你解决问题的例子吗？ | 知识创新 |

2.2. “函数的应用” 课时学历案学习过程设计

单元学历案设计是从整体上对“函数的概念与性质”的知识点进行整合和梳理，让学生能直观地了解该单元的学习规划，做好学习准备。课时是落实单元学习过程的基本单位，课时学习过程设计要在单元对应的学习目标的指引下，厘清各个知识点之间的逻辑关系，分析课时学习进阶路径，规划具体的学习内容，落实学习过程。下面以“函数的应用”为例，进行课时学历案的学习过程进阶分析及设计。

2.2.1. 学习过程进阶分析

在进入“函数的应用”学习前，学生已经了解了函数的概念及性质，掌握了幂函数的一般形式及常见的幂函数性质，对函数有一定程度的认识和理解，能建立简单实际问题的分段函数的解析式，具备一定的分析与解决问题的能力。

本课时的主要内容是利用分段函数解决生活问题，如纳税、行程、利润等，能让学生对数学的实际应用产生深刻的认识。从本课时的学习规划和学习目标来看，学生需要先掌握一次函数、二次函数和幂函数的概念及性质，然后引入实例，利用相关的函数知识求解，最后回顾过程，总结建立函数模型解决问题的一般步骤。因此，本课时将采用复习回顾、实例探究、方法总结的进阶安排，如表 8，按照由浅入深，由简到繁的顺序展开学习，为接下来利用对数函数和指数函数解决实际问题打下方法基础。

Table 8. Learning progression arrangement of “Function application” class  
表 8. “函数的应用” 课时学习进阶安排

| 发展阶点                        | 学习内容                           | 达成表现                                  |
|-----------------------------|--------------------------------|---------------------------------------|
| 阶点 1：掌握一次函数、二次函数、幂函数的概念及性质。 | 复习一次函数、二次函数、幂函数的概念及性质。         | 能准确说出一次函数、二次函数、幂函数的一般形式，能描述对应函数图象的特征。 |
| 阶点 2：能正确分析问题，建立分段函数模型解决问题。  | 分析教材例题题意，逐步解决问题，经历分段函数的实际应用过程。 | 能独立准确地解决教师给出的课堂例题。                    |
| 阶点 3：总结利用函数模型解决问题的步骤。       | 回顾反思本节课经历的解决问题过程，提炼并总结出一般步骤。   | 能按照总结步骤完成课堂练习。                        |

2.2.2. 学习进阶过程设计

阶点 1：掌握一次函数、二次函数、幂函数的概念及性质。

【复习回顾】

任务 1：根据表 9 中的提示，描述函数性质，梳理旧知。

**Table 9.** Review of relevant function knowledge  
**表 9.** 相关函数知识回顾

| 函数   | 一次函数                                 | 二次函数                           | 幂函数                                                             |
|------|--------------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| 一般形式 | $y = kx + b (k \neq 0)$              | $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ | $y = x^n$                                                       |
| 性质   | 单调性 (根据 $k$ 值判断)<br>奇偶性 (根据 $b$ 值判断) | 开口方向<br>顶点<br>对称轴<br>判别式       | 图象 (由 $n$ 值而定)<br>定点<br>单调性 (根据 $n$ 值正负, 描述第一象限内函数图象增减性)<br>奇偶性 |

【师生互动】教师展示表格内容, 并适当提示, 学生思考并完成表格。

【进阶分析】每种函数都有自己独特的数学性质, 采用填表格的形式, 学生能快速整理描述函数图象特征的思路, 为本节课的学习奠定知识基础。

阶点 2: 能正确分析问题, 建立分段函数模型解决问题。

【实例探究】

任务 2: 探究教材 P93、P94 的例 1 和例 2, 体验建立分段函数模型解决实际问题。

例 1 设小王的专项扣除比例、专项附加扣除金额、依法确定的其他扣除金额与 3.1.2 例 8 相同, 全年综合所得收入额为  $x$  (单位: 元), 应缴纳综合所得税税额为  $y$  (单位: 元)。

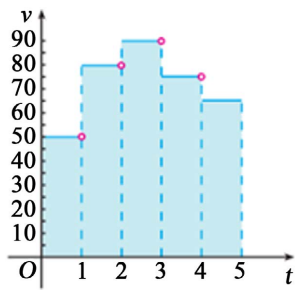
- 1) 求  $y$  关于  $x$  的函数解析式;
- 2) 如果小王全年的综合所得由 117,600 元增加到 153,600 元, 那么他全年应缴纳多少综合所得税?

【师生互动】对于 1), 教师引导学生阅读教材 3.1.2 例 8(P70), 先求出应纳税所得额  $t$  关于综合所得收入额  $x$  的解析式, 再根据例 8 中的解析式③, 找出综合所得税税额  $y$  关于  $t$  的解析式, 最后将  $t$  等量代换成  $x$  即可; 对于 2), 找到  $x = 153,600$  所在区间, 再根据对应的解析式求出  $y$  值。分析完成后, 学生独立书写解答步骤, 教师将两名同学的过程进行展示, 逐一纠正不标准的叙述, 最后再展示完整规范的答案。

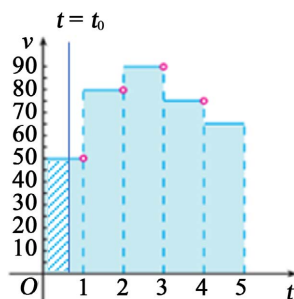
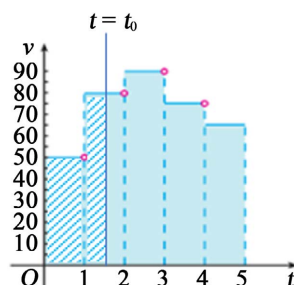
【进阶分析】在建立函数模型的过程中, 需要通过  $t$  来建立  $x$  与  $y$  之间的关系, 也要注意结合题意和自变量的现实意义来规定其范围, 如(1)中要保证  $t \geq 0$ 。解决问题过程中, 不仅培养了学生缜密的思考习惯, 也提升了逻辑推理和数学运算素养。

例 2 一辆汽车在某段路程中行驶的平均速率  $v$  (单位: km/h) 与时间  $t$  (单位: h) 的关系如图 3 所示,

- 1) 求图 3 中阴影部分的面积, 并说明所求面积的实际含义;
- 2) 假设这辆汽车的里程表在汽车行驶这段路程前的读数为 2004 km, 试建立行驶这段路程时汽车里程表读数  $s$  (单位: km) 与时间  $t$  的函数解析式, 并画出相应的图象。



**Figure 3.** Relationship between average speed and time  
**图 3.** 平均速率与时间的关系

Figure 4. When  $0 < t_0 < 1$ 图 4. 当  $0 < t_0 < 1$  时Figure 5. When  $1 \leq t_0 \leq 2$ 图 5. 当  $1 \leq t_0 \leq 2$  时

【师生互动】对于(1)，教师引导学生可以将阴影部分的面积转化为5个长方形面积的和，并向学生提问长方形的长是什么，为多少，宽是什么，是多少？长方形的长代表了汽车行驶的速度，宽代表了行驶的时间，因此每一个小长方形的面积的实际含义是汽车在每一个小时内行驶的距离。对于(2)，教师引导学生观察图中直线  $t = t_0$  左侧的阴影部分的面积。当  $0 < t_0 < 1$  时，如图4，直线  $t = t_0$  左侧的阴影部分的面积是一个长为  $50$ ，宽为  $t_0$  的矩形。当  $1 \leq t_0 \leq 2$  时，如图5，左侧的阴影部分的面积是由一个长为  $50$ ，宽为  $1$  的矩形面积和一个长为  $80$ ，宽为  $(t_0 - 1)$  的矩形面积相加而成……按照这样的思路继续推导，便可以得出  $s$  与  $t$  的分段函数解析式。

【进阶分析】解题信息除了题目的文字表述外，图表中也含有丰富的线索。教师先将图象中含有的元素拆解出来，再通过提问的方式引导学生理解每个小长方形的实际意义，这样有助于培养学生全面审题的意识，提升学生的读图能力和获取信息的能力。在建立函数解析式时，通过动态观察获得数学表示，并进一步转化为直观图象，通过这一过程感受数学化，提升学生的直观想象和数学建模素养。

任务3：学生独立完成教师给出的课堂练习题，反馈学习情况。

#### 【课堂检测】

练习1 若用模型  $y = ax^2$  描述汽车紧急刹车后滑行的距离  $y$  (单位：m)与刹车时的速率  $x$  (单位：km/h)的关系，而某种型号的汽车在速率为  $60$  km/h 时，紧急刹车后滑行的距离为  $20$  m。在限速为  $100$  km/h 的高速公路上，一辆这种型号的车紧急刹车后滑行的距离为  $50$  m，那么这辆车是否超速行驶？

练习2 某广告公司要为客户设计一幅周长为  $1$  (单位：m)的矩形广告牌，如何设计这个广告牌可以使广告牌的面积最大？

练习3 某公司生产某种产品的固定成本为  $150$  万元，而每件产品的可变成本为  $2500$  元，每件产品的售价为  $3500$  元。若该公司所生产的产品全部销售出去，则

1) 设总成本为  $y_1$  (单位：万元)，单位成本为  $y_2$  (单位：万元)，销售总收入为  $y_3$  (单位：万元)，总

利润为  $y$  (单位: 万元), 分别求出它们关于总产量  $x$  (单位: 件) 的函数解析式;

2) 根据所求函数的图象, 对这个公司的经济效益做出简单分析。

【师生互动】教师规定时间让学生独立解题, 再邀请三位同学分享自己思考过程, 教师聆听并及时评价补充, 待学生发言完毕后, 展示具体的解答过程。

【进阶分析】利用课堂练习, 巩固知识, 培养学生分析问题, 解决问题的能力, 进一步提升学生逻辑推理、数学建模和数学运算等核心素养, 也让学生在解决问题的过程中感悟“数学源于生活, 寓于生活, 用于生活”, 体会数学的应用价值。

阶段点 3: 总结利用函数模型解决问题的一般步骤。

【方法总结】

任务 4: 尝试提炼建立分段函数模型解决实际问题的一般步骤。

【师生互动】学生回顾课堂例题和练习题的分析和解答过程, 教师引导学生总结提炼方法:

第一步, 明确问题背景与需求, 确定变量之间的关系;

第二步, 分析并识别分段情况, 将定义域划分为若干个区间;

第三步, 确定每个区间内函数解析式, 整合为完整的分段函数;

第四步, 应用分段函数解决原问题, 根据题意给出合理的解释或预测。

【进阶分析】在提炼方法的过程中, 学生需要清晰地梳理问题的各个部分, 明确它们之间的逻辑关系, 并据此构建出解决问题的步骤和策略, 这种训练可以使学生的思维逻辑更加严密, 同时也可以提升学生的数学抽象素养。当学生掌握了分析问题的步骤和方法后, 可以尝试独立解决其它问题, 提高学习效率。

### 3. 学习进阶理论与学历案设计结合要点

将学习进阶理论与学历案设计相结合, 旨在构建一个更加系统、连贯且深入的学习路径, 以促进学生的数学素养和能力的全面发展。在学历案的设计中融入学习进阶理论, 应注意以下要点。

#### 3.1. 要明确阶段性目标

学习目标是学习过程的指引。确定学生发展的阶段性目标可以帮助学生沿着既定的学习路径前进, 引导学生逐步深入理解掌握数学知识, 促进他们向更高层次的水平进阶<sup>[15]</sup>。阶段性目标应该具有连续性和递进性, 教师应分析不同学习阶段的目标之间存在的内在联系和逻辑顺序, 明确前一个阶段的学习成果应该为后一个阶段的学习提供基础和支撑。如在案例的单元学历案设计中, 将“函数的概念与性质”的单元目标分为了四个层次, 函数的概念是研究函数性质的知识基础, 学习幂函数需要学生掌握函数的概念与探索函数性质的方法, 应用函数解决现实问题也要求学生具备灵活运用多种函数模型的能力。由此分析可见, 随着学习阶段的不断提升, 目标的难度和深度也要逐渐增加, 以促进学生的数学素养的全面提升。

#### 3.2. 要实现教 - 学 - 评一体化

课标中指出, 教学评价是数学教学的重要组成部分。评价不仅可以考查学生的学习成效, 也可以反馈出教学互动的优势与不足, 进而有针对性地改进学生的学习行为和教师的教学过程。在学历案设计中, 要始终以学生数学核心素养的达成为学习过程的制定理念, 关注学生要“学什么”, 更要重视学生“如何学会”, 检测学生“学会了吗”。如在案例的单元学历案设计中, 将“函数的概念与性质”整体目标合理分配到日常教学的各个阶段, 并在每课时的学习中, 立足学生的每一个发展阶点, 坚持以学定教, 以

评促教，循序渐进地推动学习进程，不断强化反馈与调整机制，提升教学质量和效果。

### 3.3. 要创设合适的教学情景

数学教学离不开对数学问题的探究，而提出好的数学问题离不开创设合适的教学情境。课程标准中指出，数学核心素养可以在学生与情景和问题的有效互动中得到提升。教学情境形式多样，可以分为现实情景，数学情景和科学情景。在教学中，要结合具体的学习内容和知识点中蕴含的数学核心素养来创设合适的教学情境，从而引导学生在分析问题，提出问题，解决问题的过程中，发展学生的数学眼光，锻炼学生的数学语言表达能力，实现数学思维和数学核心素养水平的进阶。如在学习“函数的概念”时，可以引入现实情境，通过列出实际问题的函数解析式，抽离出函数的概念，发展学生的数学抽象素养。在探索“函数的性质”时，将观察和分析函数图象特征的数学情景融入整个课时学习，提升学生直观想象和逻辑推理的数学素养。

## 4. 学习进阶理论与学历案设计结合的实践意义

### 4.1. 促进教学内容的系统性与连贯性

数学学习中的知识点往往不是孤立的，它们之间存在着紧密的联系。学习进阶理论能够揭示这些知识点之间的内在联系和发展脉络，帮助教师更好地串联和整合教学内容。在学历案设计中，教师可以根据学习进阶理论，将相关的知识点按照一定的逻辑顺序组织起来，形成知识网络，学生在学习过程中不仅能够掌握单个知识点，还能够理解它们之间的关系，形成更加全面、系统的认知结构，建立连贯的知识体系。

### 4.2. 提升学生的学习效果与兴趣

明确学习路径，增强学习方向是提升学习效果的有效方法之一。学习进阶理论与学历案设计的结合，能够帮助学生了解自己在数学学习过程中需要经历哪些阶段，以及每个阶段应达到的学习目标。这种清晰的学习路径能够帮助学生更好地规划自己的学习，减少学习的盲目性和随意性。同时，在学习过程中，学生根据评价任务的完成度也能意识到自己的学习进展和成就，从而保持积极的学习态度和动力。且学习进阶理论的融入，可以使教学活动更加贴近学生循序渐进的认知规律，帮助学生逐步克服学习中的困难和挑战，提高学习的自信心和成就感。

### 4.3. 发展学生解决实际问题的能力

学习进阶理论注重对学生思维的训练，特别是在逻辑思维和问题解决能力方面。在学历案设计中，教师可以通过设置具有挑战性的问题、引导学生进行探究式学习等方式，激发学生的思维活力。同时，教师还可以引导学生运用数学思维方法，如分析、归纳、演绎等，鼓励学生将所学知识应用到实际情境中，让学生看到数学在现实生活中的应用价值，从而强化学生主动运用数学工具的意识，丰富学生的知识迁移策略，锻炼问题解决能力。

## 5. 结语

“学习进阶”为发展数学核心素养明确了阶段目标和设计思路，“学历案”为优化教学活动和目标实现提供具体的可操作性框架。在学习进阶的视角下设计学历案，要坚持以学生为中心，结合具体的课程内容，参考课程标准要求，明确阶段性目标，重视教学评一体化的体现，创设合适的教学情境，有效实现学生的深度学习，促进学生数学核心素养更高水平的达成。

## 基金项目

本文为 2024 年黄冈师范学院校级课题“学习进阶视角下高中数学课程学历案的设计与研究”(课题编号: 5032024028)成果。

## 参考文献

- [1] 张咏梅, 田一, 李美娟. 学习进阶研究的国际进展及本土启示[J]. 教育科学研究, 2024(7): 68-76.
- [2] 孙立坤, 黄兴丰, 王坚. 国际视野下数学主题式学习活动的本土实践: 质量概念的学习进阶[J]. 比较教育学报, 2024(6): 135-146.
- [3] 张明硕, 黄致新, 熊维敏, 等. 月球为何没有飞向太阳?——基于学习进阶及教育支架理念的探讨[J]. 物理与工程, 2023, 33(3): 120-124.
- [4] 吴颖康, 鲍建生. 学习进阶视角下数据观念的内涵和落实——基于澳大利亚 RMFII 研究项目的经验和反思[J]. 比较教育学报, 2024(4): 165-176.
- [5] 王全, 邹紫微, 王磊. 我国化学学习进阶研究的回顾与展望——基于化学认识方式及学科能力理论视角[J]. 全球教育展望, 2024, 53(10): 44-63.
- [6] 谷同耀, 王民. 我国地理学习进阶研究的回顾与展望[J]. 全球教育展望, 2024, 53(10): 78-91.
- [7] 刘一萌, 林杉, 王毓萱, 等. 立足核心概念, 迈向整合发展——我国生物学学习进阶研究述评[J]. 全球教育展望, 2024, 53(10): 64-77.
- [8] 卢明, 崔允漭. 教案的革命: 基于课程标准的学历案[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2016.
- [9] 尤小平. 学历案与深度学习[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2017.
- [10] 吴颖康, 邓少博, 杨洁. 数学教育中学习进阶的研究进展及启示[J]. 数学教育学报, 2017, 26(6): 40-46.
- [11] 皇甫倩, 常珊珊, 王后雄. 美国学习进阶的研究进展及启示[J]. 外国中小学教育, 2015(8): 53-59.
- [12] 崔允漭. 指向深度学习的学历案[J]. 人民教育, 2017(20): 43-48.
- [13] 雷道金. 单元学历案: 促进高中数学学科核心素养落地的有效路径[J]. 数学之友, 2023, 37(17): 22-24.
- [14] 卢明, 崔允漭. 教案的革命 2.0: 普通高中大单元学历案设计[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2022.
- [15] 何国亮. 指向深度学习的学历案学习过程进阶设计——以“抛体运动”为例[J]. 中学物理教学参考, 2024, 53(7): 10-14.