Creative Education Studies 创新教育研究, 2025, 13(1), 314-323
Published Online January 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2025.131042

Hans汉斯

向量组的线性相关性的教学方法探讨

王　恒，方晓峰，郭志文

火箭军工程大学基础部，陕西　西安

收稿日期：2024年12月2日；录用日期：2025年1月9日；发布日期：2025年1月17日

摘　要

向量组的线性相关性是线性代数课程最重要的内容之一，概念较为抽象和复杂，是线性代数教学中的重点和难点。本文从线性相关性的概念引入、判定方法以及思政元素三个方面，探讨了线性相关性的教学方法。通过融入矩阵思维和化归思想的方式，结合几何图形和思维导图等直观工具，启发并帮助学生更好地理解和掌握向量组线性相关性的概念，体会代数思想。

关键词

线性代数，线性相关性，化归思想，矩阵思维，思维导图

Discussion on the Teaching Method of Linear Dependence of Vector Group

Heng Wang, Xiaofeng Fang, Zhiwen Guo

Basic Department of Rocket Force University of Engineering, Xi'an Shaanxi

Received: Dec. 2nd, 2024; accepted: Jan. 9th, 2025; published: Jan. 17th, 2025

Abstract

The linear dependence of vector group is one of the most important contents of linear algebra course. The concept is abstract and complex, which is the key and difficult point in the teaching of linear algebra. This paper discusses the teaching methods of linear dependence from three aspects: the introduction of the concept of linear dependence, the determination method and the ideological politic elements. Combined with intuitive tools such as geometric figures and mind maps, it integrates the idea of reduction and matrix thinking to help students better understand and master the concept of linear dependence of vector groups and experience algebraic ideas.

Keywords

Linear Algebra, Linear Dependence, Transformation Thought, Matrix Thinking, Mind Maps

文章引用：王恒，方晓峰，郭志文．向量组的线性相关性的教学方法探讨[J]．创新教育研究, 2025, 13(1): 314-323.
DOI: 10.12677/ces.2025.131042

1. 引言

线性代数课程是高等院校理工科和经管类专业本科的一门必修数学基础课，课程以行列式、矩阵为基本工具，介绍线性方程组求解，向量组及其线性相关性，二次型化标准形，以及线性空间与线性变换等内容[1]。线性代数在数学、物理学、工程技术、信息技术、计算机科学、经济与管理学等领域有着广泛的应用[2]。向量组及其线性相关性是线性代数最重要的内容之一[3]，其概念抽象，结论较多，同时又涉及到矩阵、初等变换、线性方程组求解等内容，概念复杂交错，是学生学习线性代数的难点之一，也是线性代数教学中的难点之一。以往的教学研究对这部分内容从教学模式到课堂教学设计提出了一些具体的改进措施，比如对线性相关性的判别方法的分类总结归纳[4] [5]，以案例为牵引的线性相关性课堂教学设计[6]，以数学史为背景的向量组线性相关性概念的微课设计[7]，以主线法和类比法相结合的方式，揭示线性相关性与齐次线性方程组的关系[8]，或以思维导图的方式呈现三维线性无关向量组与线性代数各章节之间知识点的关系[9]。然而这些研究要么单纯强调化解概念的抽象性，要么过于强调严密的逻辑推导，虽然对学生学习起到一定的启发作用，但是从根本上缺少线性代数思想的渗透，也就是矩阵思维的灌输和引导。因为学生在学习线性相关性的概念时通常遇到的问题不仅仅是对概念本身的不理解，对知识体系比较模糊，更重要的是不会运用矩阵这一重要工具思考和解决线性代数问题，没有养成“矩阵思维”。著名教育学家布鲁姆认为[10]，学生具备必要的认知结构和思维是掌握学习的前提，对于线性代数而言，就是具备线性代数思维，具体来说就是“矩阵思维”。因此，针对学生学习线性相关性所存在的实际问题，本文通过“独立方程”个数这一问题情境引入线性相关性的概念，通过 GeoGebra 绘制二维向量，对线性相关性概念进行形象化解释。对于重难点内容，即线性相关性的判断问题，启发学生运用化归思想和矩阵思维，运用矩阵这一工具将向量组转化为矩阵，进而探究线性相关性和线性方程组的关系，得出线性相关性的判断方法。最后引导学生建立思维导图，从整体上把握线性相关性在线性代数知识体系中的地位，达到融会贯通的作用。

2. 线性相关性概念的引入

2.1. 问题情境

思考：下面这个线性方程组中的独立方程有几个？

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=3 \\ x_1-2x_2+4x_3=-5 \\ 3x_1+8x_2-2x_3=11 \\ 4x_1-x_2+9x_3=-7 \end{cases}$$

所谓独立方程就是这个方程无法用其余方程消掉。学生通过观察发现第三个方程等于第一个方程的 2 倍减去第二个方程，而第四个方程等于第一个方程加上第二个方程的 2 倍，由于第一个和第二个方程之间无法互相消掉，所以这个线性方程组有两个独立方程，即第一个和第二个方程。接着，引导学生思考：如何判断一个一般的线性方程组中的独立方程的个数？

2.2. 概念提炼

对于上面提出的问题，提示学生用向量作为工具来分析。引导学生将线性方程组中每一个方程的未

知量的系数和常数项提取出来构造出四个向量

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\\-5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}3\\8\\-2\\11\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}4\\-1\\9\\-7\end{pmatrix}。$$

上述分析过程就可以用这四个向量来表示，即第三个方程等于第一个方程的 2 倍减去第二个方程可用 $\boldsymbol{a}_3=2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$ 表示，第四个方程等于第一个方程加上第二个方程的 2 倍可用 $\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2$ 表示。接着提出问题：这个线性方程组中每一个方程的未知量的系数和常数项构成的向量之间满足什么样的关系？显然，学生可以将上述两个等式相加得到 $\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4=3\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$，经过移项得到 $3\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_4=0$。此时，可以告诉学生，向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 满足的这一关系，称为向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性相关。这样使得学生在直观上形成了对向量组线性相关的“概念印象”[3]，接着再引出线性相关的严格的数学定义[11]。

定义 1：给定向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 若存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，

使 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=0$，则称向量组 A 是线性相关的，否则称它线性无关。

引导学生思考：线性相关或线性无关的定义还有没有其他表述方式？

回到线性方程组的独立方程个数的问题，根据关系 $\boldsymbol{a}_3=2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2$。可以启发学生构造出向量组的另外两组关系：$\boldsymbol{a}_3=2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+0\boldsymbol{a}_4$ 和 $\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+0\boldsymbol{a}_3$，由学生总结得出线性相关性的另一种定义。

定义 1’：向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 中若存在某一向量能够由其余 $m-1$ 个向量线性表示，则称向量组 A 是线性相关的，否则称它线性无关。

学生对向量组线性相关的概念已经建立起了直观印象，但是抽象的数学定义理解起来仍然存在一定的困难，可以从以下几个方面的对线性相关的概念进行进一步的探讨。

2.3. 概念解释

由线性相关的定义可以得出线性无关的定义，也就是对于向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$，如果当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时，才有 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=0$，就称向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性无关。

接下来，对包含一个向量的向量组和包含两个向量构成的向量组的线性相关性问题，组织学员思考讨论。

2.3.1. 只包含一个向量的向量组的线性相关性

对于这个问题，学生很容易进入误区，仅凭直觉会认为一个向量当然线性相关，因为一个向量只和它自己有关系，这是因为学生对线性相关的定义本身还比较陌生。提醒学生由线性相关的定义去考虑。让学生知道如果有向量组 $A:\boldsymbol{a}$，也就是 A 中只有一个向量 $\boldsymbol{a}$，那么需要分情况讨论。如果 $\boldsymbol{a}$ 是零向量，那么对任意一个不为零的常数 k，都有 $k\boldsymbol{a}=0$，满足线性相关的定义，向量组 A 是线性相关的。反之，如果 $\boldsymbol{a}$ 不是零向量，那只有 $0\boldsymbol{a}=0$ 一种情况，向量组 A 是线性无关的。

由以上分析，引导学生得出结论：包含零向量的向量组一定线性相关。

2.3.2. 包含两个向量的向量组的线性相关性

由上述分析，学生已经知道，如果这两个向量有一个是零向量，那必然是线性相关的。因此只需要讨论两个向量都不为零向量的情况。

假设两个向量分别为 $\boldsymbol{a}_1\neq 0$，$\boldsymbol{a}_2\neq 0$。让学生从定义分析，如果 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性相关，那么就有不全为零的数 k_1,k_2，使得

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2=0$$

假设 $k_1 \neq 0$，就可以得到 $\boldsymbol{a}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{a}_2$，学生可以总结出结论：如果两个向量组成的向量组线性相关，那么它们之间成倍数关系。进一步启发学生思考：线性相关的两个二维向量在平面直角坐标系中的图形有什么特点？

取 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，使用数学作图软件 GeoGebra 绘制出向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 在二维平面直角坐标系中的图像，如图 1 所示。

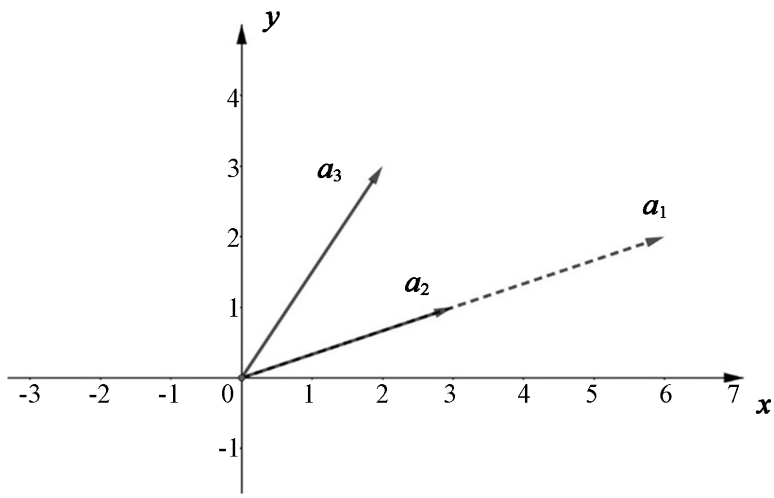

Figure 1. Vector $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$
图 1. 向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$

通过直观的图形展示，引导学生总结得出：两个向量线性相关，它们就是共线的，否则不共线。数学家笛卡尔说过，没有任何东西比几何图形更容易让人印象深刻[12]，直观的几何图形一方面可以帮助学生将线性相关性这一抽象概念具体化，让学生“看到”线性相关和线性无关的样子。另一方面，可以启发学生探究线性相关性的判断方法，即由于两个共线的向量之间可以互相线性表示，启发学生思考：如果一个向量组线性相关，则向量组中至少存在一个向量可由其余向量线性表示。

3. 线性相关性的判定

对于包含两个以上向量的向量组，引导学生思考该如何判断向量组的线性相关性。

3.1. 化归思想和矩阵思维的运用

判断向量组的线性相关性的难点在于学生对定义 1 中的关系式 $k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m = 0$ 感到无从下手，学生往往不知道该如何确定这里的系数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，而问题的根源在于学生没有养成用“矩阵思维”解决线性代数问题，也就是不会用矩阵分析问题，然而矩阵作为线性代数的重要工具，是学生必须要掌握的。因此这里首先要明确的几个要点分别是：

3.1.1. 向量组和矩阵的关系

简而言之，矩阵思维就是要将所研究的问题用矩阵来描述和表示。通过知识回顾，一个向量组可以构成一个矩阵，一个矩阵的行向量或者列向量也可以构成对应的矩阵的行向量组和列向量组。向量组 $A: \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 中包含 m 个列向量，所以可以将向量组写成矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$。接着，提出问题：如何将关系式 $k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m = 0$ 用矩阵表示？

3.1.2. 线性方程组和矩阵的关系

回顾线性方程组的表示方法，启发学生思考 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=0$ 的矩阵表示方法。通过分块矩阵乘法的运算规则，学生可较为容易地写出

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=0$$

接着引导学生思考这一表达形式的含义，进而使学生想到齐次线性方程组的几种表示方式，即 $\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=0$，$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 是方程组的系数矩阵，这样就建立起了线性相关性和齐次线性方程组之间的联系。

3.1.3. 问题转化

通过上述矩阵思维的启发，学生已经可以将线性相关性的定义用齐次线性方程组表示出来。接着，提出问题：如何确定系数 $k_1,k_2,\cdots k_m$？此时，引导学生将线性相关性的判断问题转化为齐次线性方程组的求解问题。也就是说，如果齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则表示存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots k_m$ 满足 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=0$，进而说明向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关。从线性相关性的判定到齐次线性方程组的求解，实现这一转化过程的关键就是化归思想的运用，而前提条件就是学生具备“矩阵思维”能力，养成运用矩阵这一重要的数学工具解决线性代数问题的思维习惯，也就是布鲁姆所强调的认知结构的养成。学生在将线性相关性的判断转化为齐次线性方程组的解的判断问题的同时，也能够体会到线性代数知识点之间的内在联系和紧密的逻辑关系。

3.2. 线性相关性的判定方法

由于已经将线性相关性判断问题转化为了齐次线性方程组求解问题，因此，进一步启发学生通过齐次线性方程组解的判定条件判断向量组的线性相关性。以下是线性相关性判定的一些重要结论[11]。

定理 1： 向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关的充分必要条件是它构成的矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})<m$；向量组 A 线性无关的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=m$。

这里要重点强调齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=0$ 的系数矩阵是由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 构成的，以及齐次线性方程组有非零解和只有零解的充分必要条件。若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则系数矩阵的秩满足 $R(\boldsymbol{A})<m$，向量组线性相关；若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，则系数矩阵的秩满足 $R(\boldsymbol{A})=m$，向量组线性无关。

启发学生思考：对于向量组维数和向量组个数相同的向量组，如何判断向量组的线性相关性？引导学生通过方阵的行列式的值判断向量组的线性相关性，即 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$R(\boldsymbol{A})<m$，向量组线性相关；$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$R(\boldsymbol{A})=m$，向量组线性无关。

定理 2： 若向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关，则向量组 $B:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_{m+1}$ 也线性相关。反之，若向量组 $B:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_{m+1}$ 线性无关，则向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 也线性无关。

对于前半部分结论，可以引导学生通过线性相关的定义解释，即 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关，则必然存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots k_m$ 满足 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=0$，对于向量组 $B:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_{m+1}$，必然有 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m+0\boldsymbol{a}_{m+1}=0$，所以向量组 B 线性相关。后半部分结论可以让学生用反证法结合前半部分结论来独立完成证明。

定理 3：若向量组中向量的维数小于向量组中向量的个数，该向量组线性相关。特别地，$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关。

这个定理主要需要给学生强调由 n 维向量组成的向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n+1}$ 构成的矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n+1}\right)$ 的秩不会超过矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数和列数，所以就有 $R\left(\boldsymbol{A}\right)\le n<n+1$，因此，根据定理 1，向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n+1}$ 线性相关。

定理 4：向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性无关，而向量组 $B:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_{m+1}$ 线性相关，则向量 $\boldsymbol{a}_{m+1}$ 必可由向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示，且表示式是唯一的。

这里首先要让学生回顾线性表示的概念和判定条件，清楚知道线性表示的问题是非齐次线性方程组的解的判定问题。通过关系

$$m=R\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\right)\le R\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_{m+1}\right)<m+1$$

得出 $R\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\right)=R\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_{m+1}\right)=m$ 的结论。这里的矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\right)$ 可以看做是非齐次线性方程组的系数矩阵，$\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{a}_{m+1}\right)=\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_{m+1}\right)$ 看做是非齐次线性方程组的增广矩阵。此时，根据 $R\left(\boldsymbol{A}\right)=R\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{a}_{m+1}\right)=m$，根据非齐次线性方程组解得存在性判定定理，可知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{a}_{m+1}$ 有唯一解，即 $\boldsymbol{a}_{m+1}$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示，且表达式是唯一的。

3.3. 应用与总结

可以通过具体矩阵和抽象矩阵组成的向量组的线性相关性判断问题分析，让学生掌握线性相关性判断的具体方法和步骤，在训练巩固的同时，进一步体会和运用矩阵思维。

例 1：已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$，判断 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关？

解：矩阵思维的核心是引导学生将向量组转化为矩阵，再通过矩阵运算完成对向量组线性相关性的判定。根据定理 1，计算向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 构成的矩阵的秩，即 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&-1&-3\\1&-5&-4\end{pmatrix}$ 的秩，对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换 $\begin{pmatrix}1&4&1\\2&-1&-3\\1&-5&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&4&1\\0&-9&-5\\0&-9&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&4&1\\0&-9&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$，可知 $R\left(\boldsymbol{A}\right)=2<3$，因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关。

通过例题 1，让学生熟练掌握利用初等变换求矩阵的秩来判断向量组线性相关性的方法。进一步启发学生，观察矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特点，发现 $\boldsymbol{A}$ 是一个三阶方阵，再利用矩阵的行列式是否为零判断矩阵的秩的大小，进而得出向量组线性相关的结论。

除了通过初等行变换计算矩阵的秩以外，如果矩阵是方阵，还可以通过矩阵的行列式是否为零判断矩阵是否满秩，如果是满秩矩阵，则表示向量组线性无关，如果是降秩矩阵，则表示向量组线性相关。

因为矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&-1&-3\\1&-5&-4\end{pmatrix}$ 的行列式 $\left|\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}1&4&1\\2&-1&-3\\1&-5&-4\end{vmatrix}=0$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个降秩矩阵，即 $R\left(\boldsymbol{A}\right)<3$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关。

最后，通过数学作图软件 GeoGebra 绘制向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 在三维平面直角坐标系中的图像，如图 2 所示，以直观的几何图像让学生理解如果向量组中包含三个或以上的三维向量，如果向量共面，表示向量

组线性相关，如果向量不共面则表示向量组线性无关，根据平行四边形法则，向量共面又代表着其中任意一个向量可以由其余向量线性表示，这和线性相关的等价定义是相吻合的。

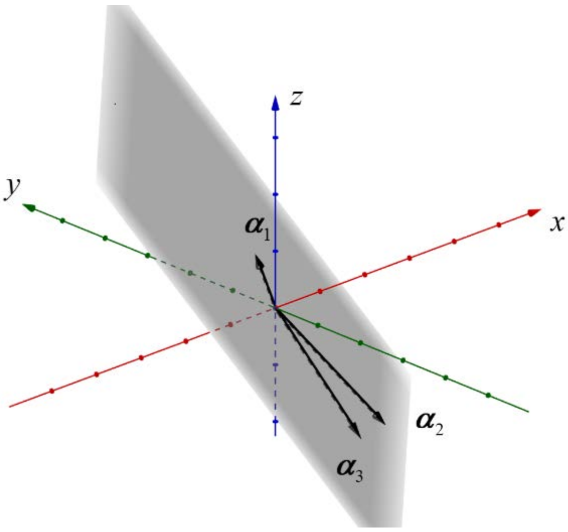

Figure 2. Vector $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$

图 2. 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$

例 2：设 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_r$，且向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关，证明向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 线性无关。

对于这类抽象的向量组的线性相关性判断问题，可以引导学生通过多种方法求解，主要有以下几种解法。

解：方法 1 (通过定义判断)令 $k_1\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{b}_r=0$，代入关系 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_r$ 可得以下关系 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\left(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2\right)+\cdots+k_r\left(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_r\right)=0$，整理得 $\left(k_1+k_2+\cdots+k_r\right)\boldsymbol{a}_1+\cdots+\left(k_{r-1}+k_r\right)\boldsymbol{a}_{r-1}+k_r\boldsymbol{a}_r=0$，由于向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关，所以系数均为零，即 $\begin{cases} k_1+k_2+\cdots+k_r=0 \\ \quad\vdots \\ k_{r-1}+k_r=0 \\ k_r=0 \end{cases}$，易求得，$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，因此，向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 线性无关。

定义法是判断抽象类向量组线性相关性问题的一种基本方法，也是学生最容易想到的方法。这里主要让学生熟悉线性相关性的定义，并掌握用定义判断线性相关性的方法和步骤。

方法 2 (通过矩阵的秩判断)将 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_r$ 用矩阵表示，有

$$\left(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r\right)=\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r\right)$，$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r\right)$，则有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}$。

因为向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$线性无关，所以$R(\boldsymbol{A})=r$，因为$|\boldsymbol{K}|=1\neq 0$，所以矩阵$\boldsymbol{K}$可逆，根据矩阵的秩的性质，则有$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})=r$，所以，向量组$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$线性无关。

用矩阵的秩的大小判断向量组线性相关性是矩阵思维的重要运用，学生必须非常熟悉这种方法，同时也可以让学生更进一步理解矩阵秩的性质。

方法 3 (通过向量组等价判断)由方法 2，因为$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK}$，且矩阵$\boldsymbol{K}$可逆，则有$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BK}^{-1}$，说明向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$可由向量组$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$线性表示，又因为向量组$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$可由向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$线性表示，由此可知向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$和向量组$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$可以互相线性表示，所以向量组等价。进而$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})=r$，向量组$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$线性无关。

抽象类的向量组的线性相关性判断问题是学生学习中最难掌握的内容之一，也是教学上的难点，通过用不同方法对问题进行分析，可以使学生理解向量组线性相关的问题本质。

3.4. 建立思维导图

20 世纪 70 年代，思维导图作为一种有效的思维发散的工具被英国学者所提出[9]。在线性相关性教学中为了让学生进一步理解和掌握线性相关性的概念，从线性代数知识体系上把握线性相关性的内容和知识点之间的内在联系，引导学生建立线性相关性、矩阵、线性方程组等概念构成的思维导图，如图 3 所示。思维导图主要针对重要知识点，对学生起到思维导引的作用，主要体现知识点之间的内在联系。通过图 3，学生可以清楚地看到与线性相关性定义相联系的四个要素：向量组、线性表示、线性组合、线性相关性的判断。接下来，围绕线性相关性的判断这一重难点问题，可以采用几何直观判断或者借助齐次线性方程组求解判断两种思路，后者则是重点强调的矩阵思维的运用，通过向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$构成的矩阵$\boldsymbol{A}$的秩的大小判断向量组的线性相关性。通过思维导图的展示，学生可以清楚的看到线性相关性和线性方程组、矩阵、行列式等知识之间的内在联系，进而深入理解判断线性相关性的思想和方法。

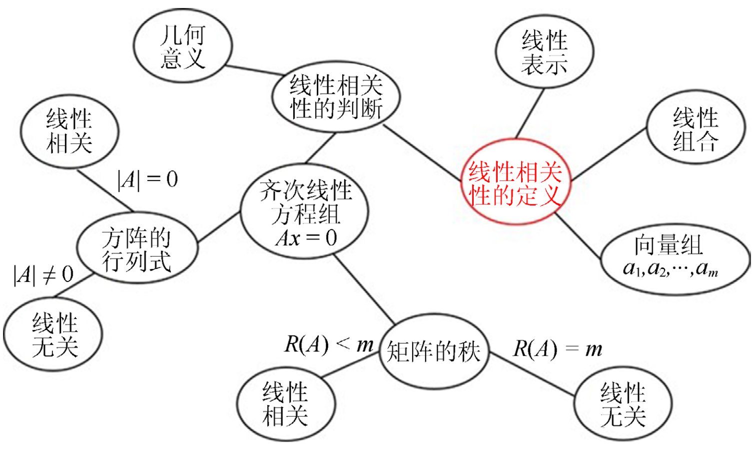

Figure 3. Mind map of linear correlation concept
图 3. 线性相关性概念思维导图

4. 思政元素

4.1. 实践到认识再到实践的唯物辩证观

一切知识来源于实践，并且服务于实践，数学知识也不例外。对于向量组的线性相关性的学习，通过线性方程组的独立方程个数问题的探讨，让学生在解决实际问题的同时发现向量组的线性相关性的概念，并引导学生将概念印象抽象为数学定义。再通过对线性相关性的数学定义的分析探究，得出线性相

关性判断的几个重要定理。最后运用这些重要结论和定理解决具体的线性相关性的判定问题。这一过程中使学生体会从解决实际问题的实践过程到探究问题的认识过程再到运用知识解决问题的实践过程的唯物辩证法的基本原理，进而更好地指导将来的学习和生活。

4.2. 化归转化思想

向量组线性相关性的概念以及判断问题不仅仅是向量组中的问题，同时也和矩阵、线性方程组、行列式有着密不可分的关系。要判断向量组的线性相关性，必须把问题转化为线性方程组求解的问题。这其中最重要的就是化归转化思想和矩阵思维的运用，本质上是因为线性代数知识之间存在着密切的内在联系。在这一过程培养学生矩阵思维这一重要的代数思维，同时认识到事物之间的普遍的内在联系。

5. 教学反馈与总结

为了达到有效教学的目的，及时掌握学生对课堂教学的反馈，课后对大二年级某专业的 142 名学生进行了问卷调查(发放 142 份，收回 142 份)，采用描述性统计分析的方法对问卷结果进行分析，问卷调查内容与结果见表 1。

Table 1. Teaching feedback questionnaire
表 1. 教学反馈调查问卷

问题	选项	人数	百分比
您是否掌握了向量组线性相关性的基本概念和判断方法	没有掌握	17	12%
	基本掌握	50	35%
	完全掌握	75	53%
本次课采用的哪种教学方式对您帮助较大(多选)	情景式概念引入	57	40%
	几何直观呈现概念	78	55%
	融入化归思想和矩阵思维	88	62%
融入矩阵思维是否提升了您学习线性代数的兴趣	没有明显提升	43	30%
	有一定的提升	66	46%
	提升明显	33	24%

通过调查问卷结果可以看出：在学习效果方面，88%的学生掌握了线性相关性的基本概念和判断方法。在教学方式的接受度方面，40%的学生认为情景式引入概念对学习有帮助，55%的学生认为几何直观可以帮助他们理解线性相关性的概念，68%的学生认为融入矩阵思维和化归思想对于学习线性代数帮助较大。在情感态度方面，70%的学生学习线性代数的兴趣得到了一定的提升。当然，线性代数作为一门抽象性和逻辑性很强的课程，应该在教学过程中融入更丰富的教学手段，比如人工智能技术辅助教学、多学科交叉案例设计等，进一步提升线性代数课堂的知识性和趣味性，以更好地达到线性代数课程的教学目标。

致　谢

感谢审稿专家为本文提出的宝贵意见。

参考文献

[1] 孟小燕，朱铁锋. 线性代数课程内容的关联性研究与实践[J]. 大学教育, 2019(7): 118-120.

[2] 郭金勇, 李春红. 数学归纳法在线性代数中的应用[J]. 广西科技师范学院学报, 2019, 34(6): 117-122.
[3] 周建华, 吴霞, 卢伟. 概念印象与线性代数教学[J]. 大学数学, 2021, 37(4): 84-89.
[4] 尹修伟, 宋贤梅. 一类向量组线性相关性的判定方法探究[J]. 黑龙江科学, 2022, 13(3): 96-97.
[5] 朱凤娟. 一道向量组线性相关性试题的多种解法及其思政元素[J]. 宁夏师范学院学报, 2022, 43(4): 96-101.
[6] 刘建丰, 李秀展. 线性代数教学案例设计——向量组线性相关性[J]. 黑龙江科学, 2022, 13(13): 129-131.
[7] 孟凡云, 陈伟. 向量组线性相关性概念的微课设计[J]. 高等数学研究, 2024, 27(3): 90-93.
[8] 徐龙玉, 胡葵, 王丽. "线性代数"教学中的主线法与类比法的综合运用[J]. 绵阳师范学院学报, 2018, 37(2): 27-32.
[9] 杨威. 基于思维导图的"线性代数"形象化教学探究[J]. 教育教学论坛, 2021(1): 17-20.
[10] 刘洪彬, 全晨. 基于布鲁姆教学目标分类法的财务会计类课程教学改革实践[J]. 高教学刊, 2023, 9(33): 141-144.
[11] 同济大学数学科学学院. 工程数学线性代数[M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2023: 87-90.
[12] 邵丽丽. 新工科背景下计算机类专业线性代数课程教学研究[J]. 科学咨询(科技·管理), 2021(9): 285-286.