

基于数学核心素养的球缺体积公式探讨

赵艳辉*, 廖春艳, 李娜, 王梦丹

湖南科技学院理学院, 湖南 永州

收稿日期: 2024年3月11日; 录用日期: 2025年1月1日; 发布日期: 2025年1月9日

摘要

数学核心素养是数学教师从事中小学数学教育教学工作的基本素养, 是数学专业师范生成教学能力的前提条件。本文从培育数学专业师范生的核心素养出发探讨怎样求球缺体积公式, 使学生学会利用所学专业知识多角度分析和解决数学问题, 加深对《数学分析》课程中积分学内容的整体理解, 使所学积分学知识形成一个连贯的整体, 提高对积分学内容的认识。进一步培养学生的直观想象、逻辑推理、数学运算等数学核心素养。

关键词

数学核心素养, 定积分, 二重积分, 三重积分, 球缺体积公式

Segment Volume Formula Based on Mathematical Core Literacy

Yanhui Zhao*, Chunyan Liao, Na Li, Mengdan Wang

College of Science, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou Hunan

Received: Mar. 11th, 2024; accepted: Jan. 1st, 2025; published: Jan. 9th, 2025

Abstract

Mathematical core literacy is the basic literacy for mathematics teachers to engage in mathematics education and teaching in primary and secondary schools, and is a prerequisite for normal students majoring in mathematics to form teaching abilities. Segment volume formula is discussed from cultivating the core literacy of normal students majoring in mathematics in the paper, so that students can use their professional knowledge to analyze and solve mathematical problems from multiple perspectives, deepen their overall understanding of the integration content in the course of Mathematical Analysis, form a coherent whole of the integration knowledge learned, and improve their

*通讯作者。

文章引用: 赵艳辉, 廖春艳, 李娜, 王梦丹. 基于数学核心素养的球缺体积公式探讨[J]. 创新教育研究, 2025, 13(1): 18-25. DOI: 10.12677/ces.2025.131004

understanding of the integration content, further cultivate students' mathematical core literacy such as intuitive imagination, logical reasoning, and mathematical operations.

Keywords

Mathematical Core Literacy, Definite Integral, Double Integral, Triple Integral, Segment Volume Formula

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数学核心素养是数学教师从事中小学数学教育教学工作的基本素养，是数学专业师范生形成教学能力的前提条件。师范专业认证指标体系明确指出了学科素养方面的要求：“掌握所教学科的基本知识、基本原理和基本技能，理解学科知识体系基本思想和方法。了解所教学科与其他学科的联系，了解所教学科与社会实践的联系。”数学专业师范生是未来的数学教育工作者，所以培育数学专业师范生的核心素养既是师范专业认证工作的要求，也是落实立德树人根本任务的时代要求。

《数学分析》课程是数学专业师范生非常重要的学科基础课之一，而积分学内容是《数学分析》课程中非常重要的内容之一，主要包含一元函数的定积分和多元函数的重积分、曲线积分和曲面积分。每种积分概念的提出都有其产生的实际背景，在文献[1]中介绍了定积分在几何中的应用可以用来求旋转体的体积；二重积分的产生背景是求曲顶柱体的体积；三重积分的产生背景是求空间物体的质量，而当物体是均匀的，其密度为常数 1 时三重积分在数值上等于该空间物体的体积，所以三重积分也可以求立体的体积。但在不同的积分定义下，其具体积分表达式不一样。文献[2]介绍了祖暅原理的由来并用高等数学知识证明了祖暅原理，文献[3][4]利用祖暅原理求得了球缺的体积公式，文献[5]结合高等数学知识用多种方法求得了球缺的体积公式，但仅仅是从解题的角度出发考虑问题，并没有分析“为什么这样做”。本文从培育数学专业师范生的核心素养出发探讨怎样求球缺体积公式，使学生学会利用所学专业多角度分析和解决数学问题，加深对《数学分析》课程中积分学内容的整体理解，使所学积分学知识形成一个连贯的整体，提高对积分学内容的认识。进一步培养学生的直观想象、逻辑推理和数学运算等数学核心素养。为说明的方便，先介绍以下引理：

引理 1 [1]: 已知曲边梯形 $0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b$ ，则其绕 y 轴旋转一周所得立体的体积为

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

问题 设一球缺高为 h ，球半径为 r ，证明该球缺的体积为 $\frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$ 。

2. 用祖暅原理求球缺的体积公式

祖暅原理 [2]: 幂势即同，积不容异。

即夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面积总相等，那么这两个几何体的体积相等[2]。

思考题 1: 已知半径为 r ，高为 h 的球缺后，怎样作出另一个满足祖暅原理要求的几何体？

先求出半球在任意高度处的截面积,由此面积表达式联想到中学立体几何中其他几何体:圆柱、圆锥、圆台,可得图1,解法如下:

解法1:如图1,设半球半径为 r ,球缺高为 h 。圆柱体的底半径和高均为 r ,在圆柱体内挖出高和底半径均为 r 的圆锥,则在同一高度 $h_1(0 \leq h_1 \leq h)$ 处的截面面积分别为

$$\text{半球的截面积: } S_1 = \pi[r^2 - (r - h_1)^2] = \pi(2rh_1 - h_1^2);$$

$$\text{圆柱挖出圆锥后的截面积: } S_2 = \pi r^2 - \pi(r - h_1)^2 = \pi(2rh_1 - h_1^2);$$

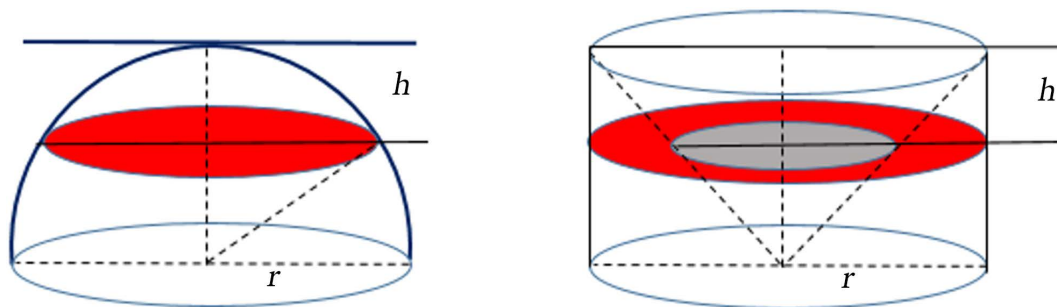


Figure 1. Segment volume formula based on Zuo's principle

图1. 祖暅原理求球缺的体积公式

所以 $S_1 = S_2$,由祖暅原理,高为 h 的球缺的体积应等于底半径和高均为 r 的圆柱体挖出底半径和高均为 r 的圆锥后的立体在距圆锥底面高为 h 时的立体的体积(即底半径为 r 、高为 h 的圆柱体体积减去上底半径为 r 、下底半径为 $r-h$ 、高为 h 的圆台的体积):

$$V = \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi [r^3 - (r-h)^3] = \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi (3r^2 h - 3rh^2 + h^3) = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)。$$

此种方法将中学数学常见的4种几何体有机联系起来,加深对不同几何体体积公式的理解,培养学生直观想象和逻辑推理的核心素养。祖暅原理是我国古代数学最伟大的发现之一,从祖暅原理中不仅学习具体数学知识,而且可以增强“文化自信”和民族自豪感,激励当代大学生要自立自强、敢于创新、勇于担当。

微积分是一个很好的工具,利用积分学知识可以更方便地探讨球缺的体积公式。定积分是整个积分学内容的基础,定积分不仅可以求平面图形的面积,也可以求旋转体的体积,利用定积分思想——微元法,能求上述球缺的体积吗?

3. 用定积分求球缺的体积公式

思考题2:已知平行截面面积可求立体体积,在图2中怎样做平行截面方便求截面面积?

通过观察球缺不难想到:可用与球缺的底面圆平行的平面截球缺,截面圆的面积即为截面面积。

3.1. 已知平行截面面积求球缺的体积公式

解法2:如图2所示建立直角坐标系,半球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2, z \geq 0$,用与 z 轴垂直的平面去截球缺,其截面面积为 $\pi(r^2 - z^2)$, $r-h \leq z \leq r$,由已知平行截面面积求体积公式有

$$V = \int_{r-h}^r \pi(r^2 - z^2) dz = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h)。$$

在文献[1]中由平行截面面积求体积的原理得到了旋转体的体积公式,球面可以由圆周旋转一周而成。

思考题 3: 怎样建立圆的曲线方程? 该曲线绕哪个坐标轴旋转一周?

由于球心在坐标原点的球可以看成由平面上圆心在坐标原点的半圆面绕坐标轴旋转而成, 所以可以考虑写出平面上圆的曲线方程, 利用平面图形绕坐标轴旋转所得旋转体的体积公式求得球缺的体积公式。

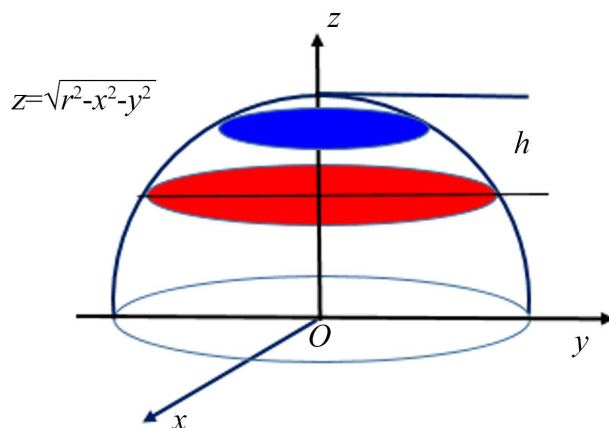


Figure 2. Segment volume formula based on parallel cross-sectional area

图 2. 平行截面面积求球缺的体积公式

3.2. 用旋转体的体积公式求球缺的体积公式

解法 3: 如图 3, 设圆周的曲线方程为 $x^2 + y^2 = r^2$, 球缺的体积可以看成曲线 $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ ($r-h \leq y \leq r$) 绕 y 轴旋转一周所得立体体积。由旋转体体积公式有

$$V = \int_{r-h}^r \pi(r^2 - y^2) dy = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)。$$

此时类似于已知平行截面面积求体积。同解法 2。但其思维方式不同。

思考题 4: 通常情况下平面图形绕哪个坐标轴旋转就对哪个坐标积分, 但由引理 1, 解法 3 中的平面图形绕 y 轴旋转一周也可以选择对 x 积分, 此时曲线方程应该怎样表示?

由定积分表达式知, 对 x 积分应将被积函数表示成以 x 为自变量的函数形式。

解法 4: 如图 3, 将圆的方程改写为曲线 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ($0 \leq x \leq \sqrt{2rh - h^2}$), 对 x 积分, 由引理 1, 球缺的体积可以看成由曲线 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ($0 \leq x \leq \sqrt{2rh - h^2}$) 和 $y = r - h$ ($0 \leq x \leq \sqrt{2rh - h^2}$) 绕 y 轴旋转一周所得立体体积之差:

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{2rh-h^2}} x(\sqrt{r^2 - x^2}) dx - 2\pi \int_0^{\sqrt{2rh-h^2}} x(r-h) dx = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)。$$

思考题 5: 解法 4 中是平面图形绕 y 轴旋转而选择对 x 积分, 球缺能不能由平面曲线绕 x 轴旋转直接对 x 积分?

仔细观察图 3, 球缺可以看成是半球减去一个圆台, 半球的体积易求, 只要求出圆台的体积即可。

解法 5: 曲线 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ($0 \leq x \leq r$) 绕 x 轴旋转一周所得立体(半球)体积减去一个圆台的体积, 圆台的体积由已知平行截面面积 $\pi(r^2 - y^2)$, ($0 \leq y \leq r - h$) 的立体体积公式可得。

$$V = \pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx - \pi \int_0^{r-h} (r^2 - y^2) dy = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)。$$

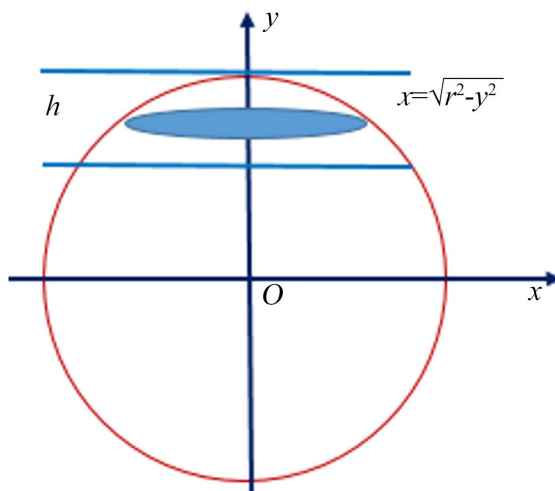


Figure 3. Segment volume formula based on Volume formula for rotating bodies

图 3. 旋转体体积公式求球缺的体积公式

以上 4 种解法从不同的角度利用定积分思想——微元法，求得了球缺的体积公式，可以加深对微元法的理解。同时在微元法的应用中特别是注意微元的选择，通过不同几何体之间的割补，培养学生直观想象、逻辑推理和数学运算的核心素养的同时，培养学生利用新知探索未知的能力，实现新旧知识之间的转化。

球缺本身是个几何体，通过重积分的学习，能不能用重积分解决球缺的体积公式？

思考题 6：用二重积分构造怎样的曲顶柱体？其中被积函数和积分区域分别是什么？

从二重积分的产生背景——求曲顶柱体的体积和二重积分的定义可知，球缺就是曲顶柱体，被积函数是曲顶柱体的上顶曲面方程和下顶面方程之差，此处即球面方程和平面方程 $z = r - h$ ，积分区域是球缺在 xoy 面上的投影区域。如图 4。

4. 用二重积分求球缺的体积公式

解法 6：如图 4，设半球面方程为 $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ ，由题意知球缺的底面圆区域为 $D: x^2 + y^2 \leq 2rh - h^2$ 。由二重积分的几何意义知球缺的体积为体积 $V_0 = \iint_D \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dx dy$ 与高为 $r - h$ 半径为 $\sqrt{2rh - h^2}$ 的圆柱体体积之差。

由极坐标变换 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sqrt{2rh - h^2}$) 得球缺的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left[\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} - (r - h) \right] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2rh - h^2}} \left(\sqrt{r^2 - \rho^2} - (r - h) \right) \rho d\rho \\ &= \frac{\pi h^2}{3} (3r - h) \end{aligned}$$

用二重积分求立体体积关键在于确定积分区域和被积函数。三重积分的产生背景是求几何体的质量，而质量是密度与体积之积，所以当物体的密度为常数 1 时，三重积分值为几何体的体积值。

思考题 7：三重积分求体积时被积函数和积分区域分别是什么？

由三重积分的几何意义和定义知，三重积分求体积时被积函数为常数 1，积分区域即整个立体。由三重积分的计算方法，可得如下不同的解法。

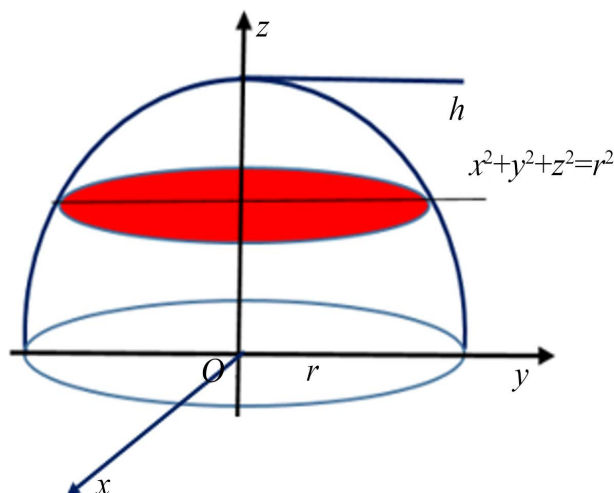


Figure 4. Segment volume formula based on double integral
图 4. 二重积分求球缺的体积公式

5. 用三重积分求球缺的体积公式

解法 7: (截面法) 如图 2, 设半球面方程为 $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, 由三重积分的定义, 积分区域 Ω 为球缺所围成的立体, 用与 z 轴平行的平面去截球缺, 则截面的面积为 $\pi(r^2 - z^2)$, 且 $D: x^2 + y^2 \leq 2rh - h^2$, $r - h \leq z \leq r$, 所以

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_{r-h}^r dz \iint_D dx dy \\ &= \int_{r-h}^r \pi(r^2 - z^2) dz = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h). \end{aligned}$$

此种方法原理同解法 2, 也称先二后一法, 即先对 x 、 y 积分, 最后再对 z 积分。此种方法适用于被积函数为常数或者被积函数只有一个变量的情形。由于上述三重积分的积分区域方程是球面方程, 所以还可以用不同的坐标变换求此三重积分。

解法 8: 用球面坐标变换。如图 5, 设 $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$, $z = \rho \cos \varphi$, 由 $r - h \leq z \leq r$, 则 $\cos \varphi = \frac{r-h}{r}$, 记 $\varphi_0 = \arccos \frac{r-h}{r}$, 则

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi_0} d\varphi \int_{\frac{r-h}{\cos \varphi}}^r \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\varphi_0} \left[r^3 - \left(\frac{r-h}{\cos \varphi} \right)^3 \right] \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[-r^3 \cos \varphi - \frac{(r-h)^3}{2 \cos^2 \varphi} \right] \Big|_0^{\varphi_0} = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h) \end{aligned}$$

柱面坐标变换是极坐标变换在三维空间的推广, 解法 8 中三重积分能用柱面坐标变换吗?

思考题 8: 比较柱面坐标变换和球面坐标变换中变量积分上下限的确定方式有何不同?

在柱面坐标变换中通常会选择先对 z 积分, 然后将几何体投影在 xoy 面上, 由极坐标的方式确定另两变量的积分上下限。

解法 9: 用柱面坐标变换。设 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = z$, 则 $\rho^2 + z^2 = r^2$, 且 $z \geq r - h$, 有

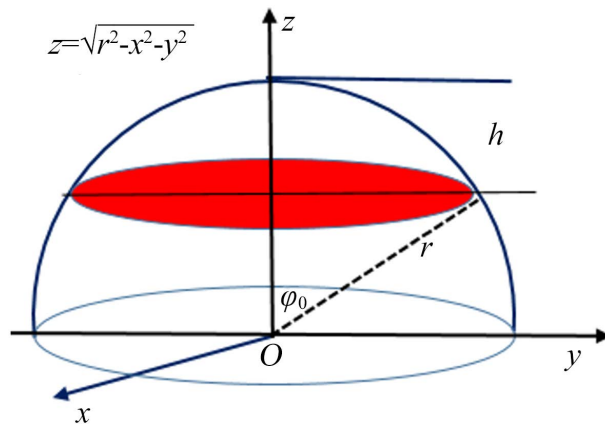


Figure 5. Segment volume formula based on triple integral
图 5. 三重积分求球缺的体积公式

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2rh-h^2}} \rho d\rho \int_{r-h}^{\sqrt{r^2-\rho^2}} dz \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2rh-h^2}} \left(\sqrt{r^2-\rho^2} - r + h \right) \rho d\rho \\
 &= \pi \left[-\frac{2}{3} (r^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2rh-h^2}} - (r-h) \rho^2 \Big|_0^{\sqrt{2rh-h^2}} \right] = \frac{\pi h^2}{3} (3r-h)
 \end{aligned}$$

根据二重积分的几何意义, 解法 6 中球缺的体积表示成了两个立体的体积之差, 那么三重积分中球缺的体积也能表示为两个立体的体积之差吗?

思考题 9: 在空间直角坐标系中球缺的体积可以表示为哪两个立体的体积之差?

由图 5 不难想到, 由 $yo z$ 平面内的直线 $z = \frac{r-h}{\sqrt{2rh-h^2}} y$ 绕 z 轴旋转一周而成得一圆锥面, 所以圆锥面方程为 $z = \frac{r-h}{\sqrt{2rh-h^2}} \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \leq z \leq r-h$ 。从而球缺的体积可以表示为半球面 $z = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$ 和圆锥面 $z = \frac{r-h}{\sqrt{2rh-h^2}} \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \leq z \leq r-h$ 围成的立体(记为 Ω')体积与圆锥体 $z \leq \frac{r-h}{\sqrt{2rh-h^2}} \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \leq z \leq r-h$ 的体积之差。

解法 10: 由球面坐标变换(同解法 8)有

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\Omega'} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\phi_0} d\phi \int_0^r \rho^2 \sin \phi d\rho - \frac{\pi}{3} (2rh-h^2)(r-h) \\
 &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\phi_0} r^3 \sin \phi d\phi - \frac{\pi}{3} (2r^2h-3rh^2+h^3) = \frac{\pi h^2}{3} (3r-h)
 \end{aligned}$$

解法 11: 由柱面坐标变换(同解法 9)有

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\Omega'} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2rh-h^2}} \rho d\rho \int_{\frac{r-h}{\sqrt{2rh-h^2}} \rho}^{\sqrt{r^2-\rho^2}} dz - \frac{\pi}{3} (2rh-h^2)(r-h) \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2rh-h^2}} \left(\sqrt{r^2-\rho^2} - \frac{r-h}{\sqrt{2rh-h^2}} \rho \right) \rho d\rho - \frac{\pi}{3} (2rh-h^2)(r-h) = \frac{\pi h^2}{3} (3r-h)
 \end{aligned}$$

解法 10 和 11 看似将问题复杂化了, 但具体计算时更方便。

6. 结论

数学核心素养的培育需从具体的数学知识出发,通过对具体数学知识的学习、思考,挖掘具体数学知识中的数学思想方法,在此过程中学会用数学知识和数学思维解决数学问题,培养数学研究能力。

6.1. 基于数学核心素养的教学能够引领教师思考课堂教学的有效性

课堂教学离不开具体的知识,本文主要从积分学中的具体知识出发,利用一元函数积分学和多元函数积分学的几何意义对球缺的体积公式进行了探讨,目标明确。从不同积分的产生背景和定义出发培养学生数学抽象核心素养,引导学生学会用数学眼光分析问题和提出问题。从通过对球缺形状的观察从不同的角度思考球缺体积的计算方式,培养学生直观想象、逻辑推理的核心素养,深刻理解各种不同积分之间的联系,养成善于思考、逻辑严谨、有理有据的思维习惯,学会用数学知识和数形结合的思想方法解决问题,培养举一反三的能力。在具体求解过程中培养学生数学运算的核心素养,养成勤于动手、一丝不苟、求真务实的科学精神,学会用数学的方法解决实际问题和其他数学问题。

6.2. 基于数学核心素养的教学能够引发教师重新思考课堂教学的终极目的

教育的根本目的是“立德树人”。基于数学核心素养的教学让教师真正从“立德树人”的角度来深入思考课堂教学,树立“以人为本”的教育理念。本文以球缺的体积公式为载体,通过问题驱动、案例教学和专题研究等方式引导学生在理论知识得到巩固和升华的同时,善于质疑,养成一定的教材研究能力和知识创新能力。从教学内容的选择、教学容量的安排、课堂教学的实施等方面全方位重新组织课堂教学,满足不同层次学生的需要,让不同的学生都能从课堂教学中有所收获。用“问题链”的方式引导学生掌握数学学习的方法,养成终身学习的理念,掌握进一步学习和工作所必需的数学知识、技能、思想和方法,培育数学核心素养。

基金项目

湖南省普通高等学校教学改革研究项目(项目编号:HNJG-20231109),湖南省普通高等学校教学改革研究项目(项目编号:202401001372)。

参考文献

- [1] 华东师范大学数学科学学院, 编. 数学分析[M]. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [2] 张伟. 祖暅原理的由来及证明[J]. 重庆教育学院学报, 2010, 23(3): 113-115.
- [3] 苏涵. 应用祖暅原理推导球缺体积[J]. 中学生数学, 2018(13): 36-37.
- [4] 屈伸. 球缺体积公式的一种推导方法[J]. 中学生数学, 2021(19): 29-30.
- [5] 戴习民, 朱晓临, 张仁琼. 球缺体积公式的多种证明[J]. 大学数学, 2016, 32(2): 100-101.