

高中数学学习中常见的循环论证问题、价值审视及启示

索雨欣, 尹 杰, 何春玲

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2024年8月7日; 录用日期: 2025年1月1日; 发布日期: 2025年1月9日

摘 要

逻辑推理是六大核心素养之一, 数学证明过程中所涉及的循环论证与学生的逻辑推理等核心素养有着很强的相关性。在实际教学中, 循环论证并不少见。研究结合人教版普通教科书2019版(以下简称人教版)及各类练习题, 按照知识点归纳高中数学学习中常见的循环论证问题, 分为函数单调性、勾股定理、三角函数和立体几何四部分, 为教材改革和教师教学提供新的方向。

关键词

循环论证, 教材体系, 教师专业成长

Common Circular Demonstration Problems, Value Review and Enlightenment in High School Mathematics Learning

Yuxin Suo, Jie Yin, Chunling He

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Aug. 7th, 2024; accepted: Jan. 1st, 2025; published: Jan. 9th, 2025

Abstract

Logical reasoning is one of the six core literacy, and the circular argument involved in the mathematical proof process has a strong correlation with the core literacy of students' logical reasoning. In actual teaching, circular argumentation is not uncommon. The research combines the 2019 edition of the ordinary textbook of the People's Education Edition (hereinafter referred to as the People's Education Edition) and various exercises to summarise the common circular argumentation

problems in high school mathematics learning according to the knowledge points, which are divided into four parts: function monotony, Pythagorean theorem, trigonometric function and three-dimensional geometry, providing a new direction for textbook reform and teacher teaching.

Keywords

Circular Demonstration, Textbook System, Professional Growth of Teachers

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

“循环论证”一词最早出现于哲学中，是指用来证明论题的论据的真实性，在数学证明中要依靠建构主义的数学教育观论题来证明的逻辑错误。其逻辑结构可以归纳为两类：一类是对于命题 p ， p 蕴含 p ，假设 p 成立，所以 p 成立；另一类是对于命题 p 、 q 、 r ， p 蕴含 q ， q 蕴含 r ， r 蕴含 q ，假设 p 成立，所以 r 成立，所以 q 成立，所以 p 成立。哲学中的循环论证是一种逻辑错误，数学证明过程中的循环论证却并非如此，张景中院士关于此曾有过精辟的描述：“孤立地看一个命题的证法，是很难肯定它是否犯了‘循环论证’的错误的。因为证明中还没有出现循环。循环是怎样产生的呢？往往是在寻根问底的追问下出现的[1]。”通过总结循环论证的根源可以将其归纳为四种体系：1) 在同一教材下，有多种途径推导结论，在统一命题的证明中，途径 a 是循环论证而途径 b 不是；2) 不同的教材下，知识点出现的顺序的先后导致同一个证明在其中一个知识体系下是循环论证，而在另一个知识体系下不是；3) 同一学科体系下，需要用到后面学习的知识去证明先前的结论，但是现阶段的学生认知水平不够导致无法学习后面的知识引起的循环论证；4) 不同学科体系之间，用其他学科的定理来证明数学定理导致的循环论证。在数学教材中，循环论证的实例并不少见，因此本研究结合人教 A 版教科书以及地方教材，探讨其存在的循环论证问题，为教材以及教师教学提供方向。

在《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》中，逻辑推理被列为六大核心素养中的第二个核心素养[2]。史宁中教授提出，高中阶段的数学学科核心素养中最为重要的就是“抽象、推理和模型[3]”。可见逻辑推理是中学生必备的关键能力之一，有助于中学生数学核心素养落地生根。数学证明中的循环论证与学生的逻辑推理等核心素养紧密相关，循环论证会影响学生的逻辑推理能力，提高学生逻辑推理能力有助于避免循环论证错误，这体现了其在学科教育中的重要价值。

目前关于循环论证的研究较少，郝高峰等在教和学习过程中，总结概括了小学数学学习中常见的循环论证问题，提出教师要保持清醒的头脑和敏锐的眼光，完善逻辑结构，重塑逻辑体系，积极寻求应对之策[4]；毕文婷借助实例分析了数学分析中循环论证的错误，以提高对数学分析的学习和逻辑思维能力[5]；杜青年等归纳分析了大学生在证明高等数学相关的结论时经常发生的循环论证问题[6]；李峰雷等以学科体系、教材体系为标准，得到四种体系下的循环论证：同一教材体系、不同教材体系、同一学科体系、不同学科体系，站在新的视角探讨了循环论证的价值同时提出了对未来教材改革的启示[7]。可见，有关数学循环论证，研究较少且都集中在大学数学，对中小学特别是中学的研究较少，且对循环论证的研究也提出了新角度。同时“循环论证”各类型产生的根源与教材的知识体系以及学生的认知相关，因此研究结合人教版普通教科书 2019 版(以下简称人教版)及各类练习题，按照知识点归纳高中数学学习中

常见的循环论证问题，为教材改革和教师教学提供新的方向。

2. 高中数学学习中常见的几种循环论证问题

“循环论证”是指在论证过程中，用来支撑论题的论据真实性要依靠论题本身来证明的逻辑错误。循环论证的问题在高中数学学习的过程中常见于函数单调性、勾股定理、三角函数、立体几何等证明中，并且以教材以及学科为标准，可以将其划分为四大类，同一教材中的同一命题的证明，途径 a 是循环论证，途径 b 不是；不同教材体系下，同一证明在 A 知识体系下是循环论证，而在 B 中不是；同一学科体系需要借助以后的知识来证明现阶段的理论导致的循环论证；不同学科体系下，数学定理的证明不能以其他学科的规律作为条件。

2.1. 函数单调性

函数的单调性证明书本上的证明便是犯了第一类循环论证的错误。

例 1 经典的教科书循环论证，如图 1 所示，在人教版(2004 年版)的必修一教科书中的一道原题：证明幂函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数。原题中给出的证明方法是作差法，但在旁边的小提示中提到作了商法，通过证明 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} < 1$ ，也可以证明函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数。

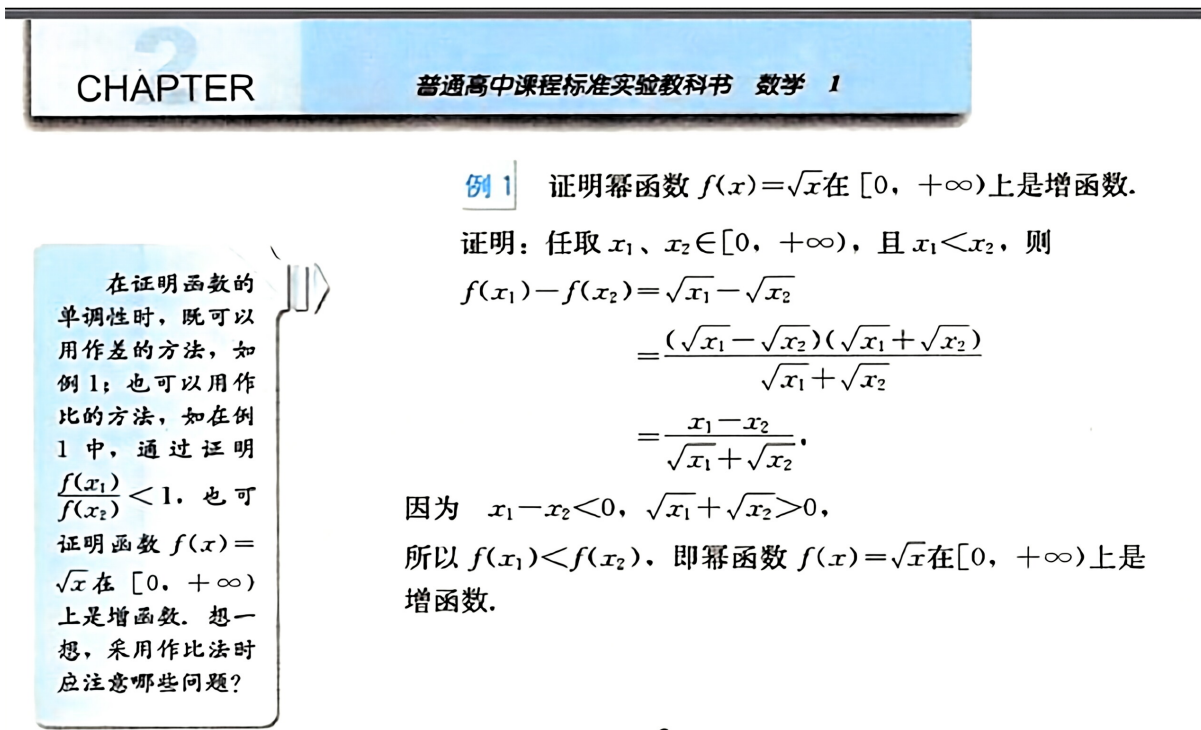


Figure 1. Renjiao A edition (2004 Edition) mathematics compulsory 1 textbook 92 pages

图 1. 人教 A 版(2004 年版)数学必修 1 教材 92 页

但如果用作商法证明，步骤如下方所示

证明：设 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, $x_1 < x_2$

$$\therefore \frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$$

$$\begin{aligned}
&\because x_1 < x_2 \\
&\therefore \frac{x_1}{x_2} < 1 \\
&\therefore \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} < 1, \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2),
\end{aligned}$$

故函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数。

上述证明方法虽然看似正确, 但犯了循环论证的错误, 在利用 $\frac{x_1}{x_2} < 1$ 证明 $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} < 1$ 的过程中其实用到了函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 的单调性, 正是因为函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 才能得出这个结论。

但随着教材的更新, 到了人教 A 版(2007 年版)的数学教材中这个旁注被删掉了, 改成了下方如图 2 所示, 教师用书也没有解释为什么删掉, 或许是因为教材的编者发现容易犯循环论证的错误。但李雷锋等研究中提到如果不用这一个步骤, 仍用作商法, 换一个途径, 也能得到正解(若下所示) [7]。

例 1 证明幂函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数。

证明: 任取 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$\begin{aligned}
f(x_1) - f(x_2) &= \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \\
&= \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \\
&= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}},
\end{aligned}$$

因为 $x_1 - x_2 < 0$, $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$,

所以 $f(x_1) < f(x_2)$, 即幂函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数。

Figure 2. Renjiao A edition (2007 Edition) mathematics compulsory 1 textbook 98 pages

图 2. 人教 A 版(2007 年版)数学必修 1 教材 98 页

正解: $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, $x_1 < x_2$, 则 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}$, 假设 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} \geq 1$, 则有

$$\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} \cdot \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} = \left(\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} \right)^2 = \frac{x_1}{x_2} \geq 1$$

则 $x_1 \geq x_2$, 与已知矛盾, 故假设不成立, 有原命题成立:

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} < 1$$

即 $f(x_1) < f(x_2)$,

故函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数。

正解中是利用反证法结合不等式的性质得到的, 而这一性质($a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$)在这个内容之前已经学习, 避免了循环论证的错误。

例 2 函数 $f(x) = 2^x$ 单调性的证明

虽然只是一个简单地一次函数,但高中阶段函数单调性的证明不能仅仅依靠观察图像的升降来判断,这种办法在逻辑上存在不严谨之处,在教学中,可以通过作商法对这一证明过程进行补充,证明步骤如下:

证明: $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 x_2$, 记 $c = x_1 - x_2 > 0$, 则 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = 2^{x_1 - x_2} = 2^c$

又 $\because c > 0$, $\therefore 2^c > 2^0 = 1$, 得到 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} > 1$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, 故结论得证。

在上述证明过程中,如果将 $2^c > 2^0 = 1$ 当成指数函数看,指数函数在幂函数之后学到,则犯了循环论证的问题,但如果用幂函数 $g(x) = x^c (c > 0)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性来证明,按照教科书的顺序来说,就避免了循环论证。

根据上述例子,我们也可以发现同样是这个命题和结论,根据两种不同的方法,一种是循环论证,另一种又不是;而对于同一种方法证明,基于教科书的顺序以及不同的理解是不是循环论证也是不同的。这就提示教师,在教学的过程中,既要注重逻辑的严谨,不被逻辑绕到,同时也要关注学生的认知,关注学生的思考过程,不能仅仅看他呈现出的结论,看他的推理各个步骤的正确性,也要弄清楚他每个步骤的动机,从而整体性看待问题。

2.2. 三角恒等式证明勾股定理

三角恒等式证明勾股定理的方式犯了第二类循环论证错误,即不同教材体系下,同一证明在 A 知识体系下是循环论证,而在 B 中不是。

例 3 已知在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C$ 为直角, c 为斜边, a 、 b 为直角边,求证 $a^2 + b^2 = c^2$

有些考生用三角恒等式来证明勾股定理,证明过程如下:

由 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 可得 $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ 即 $a^2 + b^2 = c^2$

一些老师认为这样犯了循环论证的错误,因为按照教材中的体系,应该是先有个勾股定理,才有的三角恒等式,勾股定理是初中学习的内容,而三角恒等式是在高中学习的,且三角恒等式的证明中也用到了勾股定理。

但数学思维并不应该被禁锢,张景中院士曾提到,传统的课程,三角函数是作为直角三角形的两边的比值而引进的,但三角函数的定义,也并非只有这一种方法,也可以给三角函数提供一个几何模型[8]。他提出类比矩形面积公式,把平行四边形分成若干个边长为 1 的菱形来计算其面积,如图 3。

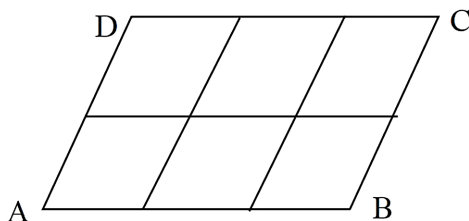


Figure 3. The diamond shape after the bisection
图 3. 平分后的菱形

定义: 把边长为 1, 有一个角为 A 的菱形的面积记作 $\sin A$ 。

在这种“新中学三角体系”中,是三角恒等式在前,勾股定理在后。该体系的建立就是先用面积法定义正弦,推出正弦定理,接着用三角形相似、全等推出正弦和角公式 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin(90^\circ - \beta)$

$+\sin \beta \sin (90^{\circ}-\alpha)$, 在正弦和角公式中, 取 $\alpha=A, \beta=B$, 得到 $\sin 90^{\circ}=\sin A \sin (90^{\circ}-B)+\sin B \sin (90^{\circ}-A)$, 可推出 $\sin ^2 A+\cos ^2 A=1$, 即可得出 $\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$ 即 $a^2+b^2=c^2$ 。在这种新定义中, 并没有出现循环论证的问题。

建构主义的数学教育理论认为, 数学知识并非绝对真理, 是人们对客观世界的一种解释、假设或假说, 会随着人们认识程度的深入而不断变化。著名数学家张奠宙教授对于这个设想也给予了高度评价, 认为其是“博采众长之后, 中国人自己的一个创造”。对于上述证明, 从不同的角度来看, 同样的证明方法, 一个是循环论证, 另一个不是, 这就需要教师在遇到这样类似的情况时, 不要将思维局限在教科书之内, 给予学生错误的评价, 从而抹杀学生的创造性思维。

2.3. 三角函数不等式

这块知识的证明犯了第三类循环论证的错误, 即同一学科体系需要借助以后的知识来证明现阶段理论导致的循环论证, 教材的证明用到了大学高等数学的内容, 导致循环论证。

马锦赫曾讨论过关于三角函数的导数是否是循环论证的问题[9], 其中讨论了一道自主招生的题目, 一个经典的证明题。

例 4 已知 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 求证 $\sin x < x < \tan x$

证明: 设 $f(x)=x-\sin x$, 则 $f(0)=0$, 且当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x)=1-\cos x > 0$

于是 $f(x)$ 在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 上单调递增, 所以, $f(x) > f(0)=0$, 即有 $x > \sin x$

同理可证 $g(x)=\tan x-x > 0$, $g(0)=0$, 且当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1 > 0$, 于是 $f(x)$ 在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 上单调递增, 所以, $g(x) > g(0)=0$, 即有 $x < \tan x$ 。

马锦赫指出该方法犯了循环论证的错误, 因为在微积分中三角函数的导数公式是由重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}=1$ 推导出来的, 而这个推导过程中运用了 $\sin x \leq x \leq \tan x$, 变形为 $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$, 推导出的重要极限, 所以对三角函数求导默认了该不等式。那么, 这个是属于循环论证吗? 新教材中也有类似的问题, 教师用书中也给出了该题的详细答案, 如下面图 4, 并且教材明确给出了基本初等函数的导数公式, 如图 5。

练习

1. 利用函数的单调性, 证明下列不等式, 并通过函数图象直观验证:

$$\sin x < x, x \in (0, \pi).$$

练习 (第 97 页)

1. 设 $f(x)=x-\sin x$, $x \in (-\pi, \pi)$. 因为 $f'(x)=1-\cos x \geq 0$, 当且仅当 $x=0$ 时, $f'(x)=f'(0)=0$. 所以函数 $f(x)=x-\sin x$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内单调递增. 所以, 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $f(x)=x-\sin x > f(0)=0$, 即 $\sin x < x, x \in (0, \pi)$. 图略。

Figure 4. Optional compulsory 2 textbook is 97 pages and the teacher's book is 124 pages

图 4. 选择性必修 2 教材 97 页与教师用书 124 页

前面我们根据导数的定义求出了一些常用函数的导数. 一般地, 有下面的基本初等函数的导数公式表 (表 5.2-1), 这些公式可以直接使用.

表 5.2-1

基本初等函数的导数公式	
1. 若 $f(x)=c$ (c 为常数), 则 $f'(x)=0$;	
2. 若 $f(x)=x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$, 且 $\alpha \neq 0$), 则 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$;	
3. 若 $f(x)=\sin x$, 则 $f'(x)=\cos x$;	
4. 若 $f(x)=\cos x$, 则 $f'(x)=-\sin x$;	
5. 若 $f(x)=a^x$ ($a>0$, 且 $a \neq 1$), 则 $f'(x)=a^x \ln a$;	
特别地, 若 $f(x)=e^x$, 则 $f'(x)=e^x$;	
6. 若 $f(x)=\log_a x$ ($a>0$, 且 $a \neq 1$), 则 $f'(x)=\frac{1}{x \ln a}$;	
特别地, 若 $f(x)=\ln x$, 则 $f'(x)=\frac{1}{x}$.	

Figure 5. Renjiao A edition (2019 Edition) mathematics selective compulsory 2 textbook 74 pages

图 5. 人教 A 版(2019 年版)数学选择性必修 2 教材 74 页

导数作为微积分的重要组成部分, 是现代数学的基本概念, 蕴含着微积分的基本思想[1]。课标中指出对“导数运算”的要求: 1) 能根据导数定义求出函数 $y=c$, $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$ 的导数; 2) 能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则, 求简单函数的导数; 能求出简单的复合函数(限于形如 $f(ax+b)$)的导数。在高中阶段, 学生的认知有限, 给出了几个函数的导数定义, 体现了数学学习的逻辑性和严谨性, 同时要遵从学生的认知规律, 所以没有给出所有初等函数的求导过程, 直接给出了导数公式, 有利于学生自主学习、直观理解。数学教学原则中也提到严谨性与量力性相结合的原则, 数学学习不能够过度形式化, 也要考虑到学生的认知发展规律和心理发展规律, 考虑到学生的经验, 才能将数学知识转化为教育形态。

2.4. 物理的方式证明正弦定理

学科与学科之间的碰撞有助于提升学生的学习兴趣, 然而若是用物理的方式证明正弦定理则是犯了第四类错误, 不同学科体系下, 数学定理的证明不能以其他学科的规律作为条件。

例 5 设三角形 ABC 是边长分别为 a 、 b 、 c 通电电线框, 电流强度为 I , 将其置于磁感应强度为 B 的均匀磁场中, 并且线框平面与磁场方向垂直, 那么受力情况为:

$$\begin{cases} F_a = BIa \\ F_b = BIb \\ F_c = BIc \end{cases}$$

根据三个力是相互平衡的共力点, 对 F_a 、 F_b 、 F_c 正交分解可以得到如下式子

$$\begin{cases} F_b \sin C - F_c \sin B = 0 \\ F_a \cos C + F_c \cos B = F_a \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_a \sin C - F_c \sin A = 0 \\ F_a \cos C + F_c \cos A = F_b \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_a \sin B - F_b \sin A = 0 \\ F_a \cos B + F_b \cos A = F_c \end{cases}$$

联立上述式子便可得到：

$$\begin{cases} BIa \sin B - BIb \sin A = 0 \\ BIb \sin C - BIC \sin B = 0 \\ BIC \sin A - BIa \sin c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} BIb \cos C + BIC \cos B = BIa \\ BIa \cos C + BIC \cos a = BIb \\ BIa \cos B + BIb \cos A = BIC \end{cases}$$

便可得到正余弦定理，上述证明看似没问题，但是确实犯了循环论证的错误，数学中用来说明三角形边角关系的正弦定理的成立与否决定了这三个力是否平衡，若是正弦定理不成立那么三个合力 F_a 、 F_b 、 F_c 便不一定为 0，因此犯了循环论证的错误，这说明在不同的学科体系中，数学的定理不会依赖于某个物理原理或者规律作为条件，若是以其他科目来作为原理证明数学定理便会导致循环论证。

3. 价值审视及启示

3.1. 价值审视

作为一门逻辑科学，数学证明过程是否属于循环论证的判断，会因不同的体系而有所差别。一方面，在一些证明过程中，要防止循环论证的错误，要注重证明过程的逻辑性和严谨性，以及彼此之间的先后关系，防治发生逻辑不清，论证混乱的问题；另一方面在中学学习中，很多定理都是可以相互推导得出的，例如“正弦定理、射影定理和余弦定理”，而且用多种方法相互推导定理也是一件很有意义的事情，有利于拓宽我们的视野，建立知识之间的联系。

3.2. 启示

3.2.1. 强调教材整体性，用较高的观点看数学

数学教材通常是数学课程发展、研究历程以及整个数学教育史中最为可靠和关键的历史见证。习近平指出：“学科体系与教材体系密不可分，学科体系建设上不去，教材体系就上不去；反过来，教材体系上不去，学科体系就没有后劲。”[10][11]可见教材体系的重要性。而看待一个数学证明是否是循环论证，也需要放在整体的观点下来考量，仅仅孤立的判断，也很难肯定它是否犯了“循环论证的错误。”譬如例 2 函数 $f(x) = 2x$ 单调性的证明，仅从教科书的顺序来看，可能用到了未来即将学习的知识证明，该过程与教科书的顺序不符，但放在整体看，如果放在单元或者学期末的试题中出现，多种方法反而有利于开阔视野，形成数学知识的整体图式，最终融为一体，形成系统。

3.2.2. 教师需广泛阅读，深入探讨，拓宽视野，超越教材

新课程改革中提出“用教材教，而不是教教材”。教师的思维也不应该局限在教科书中，还需要大量阅读文献，不断学习，拓宽自己的视野，超越教科书的内容；同时遇到问题要多和老师们探讨，分享彼此的经验、教训，共同成长，从而形成自己独特的教学风格。例如在证明勾股定理的这个例子中，不因学生用三角恒等式证明而批评学生，可以根据学生的认知水平考虑是否可以用这个例子引出“新中学三角体系”，既能介绍一种新的方法，同时数学是一种人类创造或建构的产物，而不是一种客观真理。

3.2.3. 教师当高瞻远瞩，深入浅出解疑惑

当教师在教学的过程中遇到学生提出大学数学相关的问题，教师该如何深入浅出的解答呢？这就需要教师的知识储备足够丰富，教科书作为一个面向学生的文本材料，其中并不是每个定理公式都给出了严谨细致的推理证明，教师要做的，就是站在学习者原有知识经验的基础上，帮助学生生长出新的知识

经验,根据学生的建构能力,因材施教。譬如教师遇到上述以及熟知大学数学中三角函数导数推导的学生,教师就可以课下和该生探讨这些问题,同时也可以向他解释教科书设计的合理性,鼓励学生追求真理,探索数学世界的奥秘。

3.2.4. 教师应深思慎论,梳理逻辑,避免“循环论证”的错误

尽管循环论证所带来的价值有着一定的应用前景,但教学过程中,仍需梳理逻辑,避免“循环论证”的错误。例如,要防止学生做证明题时用结论证明结论,看似是一个循环,但是在“套答案”,这就要求教师要做到逻辑清晰,同时也要注意提升自身数学知识素养。学生发展核心素养已经成为当下我国教育改革的焦点,与此同时,我们也应注重教师的数学知识素养。在教学过程中可以通过开展逻辑方面的专题教学,挑选出适合不同年龄阶段的循环论证错题讲解;要把握本质,关注知识的来龙去脉,提高对知识之间逻辑关系的领悟;教师应终身学习,提高数学知识素养,随着时代的进步做到自我突破。

4. 结语

亚里士多德曾说过:吾爱吾师,吾更爱真理。一个数学证明过程是否是循环论证,判定结果依据不同的解释会有不同的结果,不能一概而论。在教学的过程中,教师应根据实际情况选择合适的方式去解决学生关于循环论证的疑问,同时也应不断学习,提升自己的数学知识素养。显然,这都是亟需研究和解决的问题,关于循环论证的研究价值也有待更多学者去挖掘。

基金项目

黄冈市教育科学规划 2023 年度重点课题“培养计算思维能力的高中数学项目式学习的教学设计与实施研究”(2023JA05)成果。

参考文献

- [1] 彭翥成. 也谈“循环论证”[J]. 数学教学, 2008(2): 27-28.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 修订)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 4.
- [3] 史宁中, 林玉慈, 陶剑, 等. 关于高中数学教育中的数学核心素养——史宁中教授访谈之七[J]. 课程·教材·教法, 2017, 37(4): 8-14.
- [4] 陈晓燕. 小学数学教学中“循环论证”逻辑错误案例及分析[J]. 中小学数学(小学版), 2014(7): 74-75.
- [5] 毕文玲. 谨防数学分析中循环论证的错误[J]. 南阳师范学院学报, 2012, 11(12): 85-87.
- [6] 杜青年, 胡江安. 高等数学学习中的几类常见逻辑错误[J]. 高等数学研究, 2012, 15(4): 112-114.
- [7] 李锋雷, 孔德宏. 数学循环论证的思考及其价值展望[J]. 数学教育学报, 2022, 31(4): 74-79.
- [8] 张景中. 重建三角, 全局皆活——初中数学课程结构性改革的一个建议[J]. 数学教学, 2006(10): 1-4+20.
- [9] 马锦赫, 秦庆尧. 例说数学推理要防止发生逻辑循环的错误[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2018(1): 19.
- [10] 张昆. 高校文科专业教材建设的辩证思考[J]. 高等教育研究, 2020, 41(11): 73-80.
- [11] 朱雁, 倪明, 孔令志, 等. 数字时代中的数学教材研究与开发及使用——第三届国际数学教材研究和发展会议综述[J]. 数学教育学报, 2020, 29(2): 94-99.