

高等代数选讲的教学与研究

——以数域为例

张洁琳, 高玉婷, 陈晓友*

河南工业大学数学与统计学院, 河南 郑州

收稿日期: 2024年11月12日; 录用日期: 2025年1月1日; 发布日期: 2025年1月9日

摘要

《高等代数选讲》这门课程对扩展学生代数学方面的知识是非常有帮助的。因此, 学好这门课程对于学生后续的学业和职业发展是有益的。本文将数域这一节为例来探讨高等代数选讲的教学与研究。

关键词

高等代数, 数学史, 课程, 兴趣

Teaching and Research of Selected Lectures in Advanced Algebra

—Taking the Section Number Fields as an Example

Jielin Zhang, Yuting Gao, Xiaoyou Chen*

School of Mathematics and Statistics, Henan University of Technology, Zhengzhou Henan

Received: Nov. 12th, 2024; accepted: Jan. 1st, 2025; published: Jan. 9th, 2025

Abstract

The course “Selected Lectures in Advanced Algebra” is very helpful in expanding students’ knowledge of algebra. Therefore, learning this course well is beneficial to students’ subsequent academic and career development. This note will talk about teaching and research of “Selected Lectures in Advanced Algebra” by taking the section Number Fields as an example.

Keywords

Advanced Algebra, Mathematical History, Course, Interest

*通讯作者。

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《高等代数选讲》是很多本科院校数学专业基础课程《高等代数》学习之后的一门选修课程，它通常被安排开设在大学四年级上学期，但这门课程在许多师范类高校的数学专业里属于必修课程。这门课程对于计划参加数学专业研究生初试的学生来说是重要的，而且对于选择从事代数学方向研究的学生来说则是必需的。

高等代数选讲的教学目标是通过该课程的学习使学生对高等代数的基础知识、基本概念、重要定理有更深刻的认识和理解，对高等代数中的基本思想方法能够融会贯通，扩大学生的知识面；培养学生在学习过程中善于思考，敢于提出问题和勇于寻找解决问题的方法和创新能力，以提高学生的自身素质，为后续课程的学习和工作做准备；数学专业毕业的很多学生会从事数学教育工作，因此，在此课程中要有引导学生掌握用高等代数的思想、方法、理论与观点指导和分析数学中和现实生活中的相关问题。

郜博等在[1]中提到，综合法、分析法、反证法与数学归纳法在高等代数中有一系列的应用。覃利华等在[2]中阐述了高等代数课程的思政教学设计。杨胜等在[3]中以高等代数中重要的知识点维数公式为例，讨论了高等代数的教学设计与实践。

本文将以数域这一节为例来浅谈高等代数选讲的教学与研究。数域作为北大版《高等代数》[4]教材的第一节，看似平淡无奇，实则内含玄机。可以说，只要数域发生变动，该教材中后续的内容就会发生改变。因此，这一节是非常重要的。

2. 教学

2.1. 教学过程中要多讲例子

高等代数教材中所讲述的代数概念与定理经过数百年来的发展和演变已经取得了近乎完美的形式，受教学大纲的安排和教学课时的限制，不可能完整地描述出相关的历史发展过程。这就使学生感觉所学理论高度抽象和难以理解，在学习过程中难免产生畏难情绪。事实上，教材中有很多理论都是经过几代数学家花费漫长的时间而最后定型的，这期间经历了很多次的尝试。在教学过程中，让学生明白这一切，不仅能提高他们对代数的认识和理解，而且也会增加他们钻研的勇气。因此，教学过程中鼓励学生阅读数学史方面的著作[5]。如[6]中所言，将数学哲学、数学史与数学教育的结合，对于我国数学教育改革来说，有着特别重要的意义。正如靳平教授在[7]中所写，把相关的数学史知识和所讲授的内容有效地结合起来，不仅能活跃课堂气氛，启发学生思维，而且教学效果极佳。

下面我们给出具体的教学案例。

首先，介绍“数”的概念萌发于早期人类对事物的计数；结绳与书契可能是所有早期文明中最主要的计数方法，这就使整数的产生变得比较自然。毕达哥拉斯学派宣称，万物皆可度量，从而有理数得以产生，但有人发现等腰直角三角形直角边为1的时候，它的斜边 $\sqrt{2}$ 无法用有理数度量，这也标志着无理数的产生。该学派为了保守这个秘密，将发现人扔进了大海。越来越多无理数的发现使得人类扩大了数系到实数域。高斯独立地给出了复数的几何表示，他将复数与平面向量一一对应。高斯把尺规作正十七边形的几何难题转化为了复数的计算，这一成功使得高斯选择数学而非语言学作为自己的职业。

其次，提出问题：什么是数域？让学生先观察有理数集合，0，1 属于该集合并且数之间的加、减、

乘、除(除数不为零)运算之后的值仍然在该集合中。稍后,可以让学生讨论一下实数集合。

最后,给出数域的定义。数域在北大版《高等代数》[4]教材中的定义为,包含0,1的复数集合 $\mathbf{P}$ 关于和、差、积、商(除数不为0)封闭。在近世代数中,域的定义则较抽象一些。因此,给出数域定义之后,还要介绍例子来巩固学生对这一概念的理解。

例1 $Q(\sqrt{3}) = \{a+b\sqrt{3} | a, b \in Q\}$, 其中 Q 是有理数域。显然,该集合包含0,1,并且它关于加法、减法、乘法都是封闭的。

设 $a+b\sqrt{3} \neq 0$, 则 $a-b\sqrt{3} \neq 0$, 否则 $\sqrt{3}$ 就是有理数,而通过分母有理化可知

$$\frac{c+d\sqrt{3}}{a+b\sqrt{3}} = \frac{ac-3bd}{a^2-3b^2} + \frac{ad-bc}{a^2-3b^2}\sqrt{3} \in Q(\sqrt{3}).$$

因此,该集合对于除法也是封闭的。从而, $Q(\sqrt{3})$ 是不同于 Q 的数域。

例2 $Q(i) = \{a+bi | a, b \in Q, i^2 = -1\}$ 也是数域。

例3 x^2+1 在有理数域上不可约,在复数域上是可约的。这一例子说明了数域的改变会引起某些性质发生变化。

概念的抽象性是高等代数课程的特点之一。正如刘绍学先生在[8]中讲到的:代数是研究带有一些运算的集合,这是一个概括性强而又很简单的定义;但由于概括性太强,这个定义使人看不到代数的具体面貌以及其真正关心的内容。例如,高等代数中线性空间的概念在学生看来就比较抽象,在教学过程中,就可以多介绍一些线性空间的例子,这对于学生加深理解这个概念就会很有帮助。正如,冯克勤先生在[9]中谈到代数的讲法,关键有两点:一是要让学生心中有足够多的例子;二是要教给学生这门课本质性的东西。

华罗庚先生说过,“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学”。随着信息化、自动化的发展,数域理论的应用越来越广。例如,在计算机科学中,数域的概念被应用于数据域管理,数据域是为了实现数据级别的权限隔离而引入的一种方法,通过设置正确的组织机构和权限,可以实现不同用户对数据的访问控制,确保数据的安全性和隐私性。在密码学中,数域的应用主要体现在有限域的使用上,有限域是一种特殊的数域,其中的元素数量是有限的。有限域被用于设计各种加密算法和协议,在加密算法中,它提高了计算效率和安全性。有限域还广泛应用于数字签名、身份验证等领域,确保了信息的安全传输和完整性验证。这些鲜活的例子不仅能够使学生感受到高等代数理论的巨大价值,而且能极大激发学生的学习兴趣。

2.2. 教学过程要激发学生的学习兴趣

高等代数选讲要在原有高等代数理论知识的基础上,系统深入地介绍对称多项式、线性函数与对偶空间、酉空间、酉变换、多重线性函数等相关内容,这些内容对学生思辨能力的培养具有积极作用。思辨能力即思考辨析能力,所谓思考指的是分析、推理、判断等思维活动,辨析指的是对事物的情况、类别、事理等的辨别分析,在教学过程中,使学生通过这门课程的学习,在分析、推理、判断等各方面获得收益,为学生的后续学习和职业发展奠定基础。

德国的著名教育学家斯普朗格说过:“教育的最终目的不是传授已有的东西,而是要把人的创造力量诱导出来,将生命感、价值感唤醒。”在如今信息化时代,知识已不再是稀缺资源,我们在教学过程中要更加注重思维的培养、能力的培养、兴趣的培养。高等代数选讲的教学过程中更要激发学生的学习兴趣,因为兴趣往往是学习和研究的最好动力与持久创造源,在讲授数域这一节时,通过代数学史上一些激动人心的故事来提高学生了解这门课程魅力与美丽之处。

例如,高斯在小时候,为了获知每年复活节的日期,推导出了复活节日期的计算公式。高斯在晚年

还参与了地理测量工作，他的工作成果对地图的绘制产生了深远影响。有人调侃说：“高斯不仅是数学王子，还是地图界的‘高管’”！高斯的故事告诉我们，数学不仅仅是冷冰冰的数字和公式，它也可以是充满温度和幽默的生活。高斯的名言“数学是科学的女王，而数论是数学的女王”充分体现了他对数学的热爱。高斯的《算术探索》是数论领域的经典之作，在这部著作中，他系统地阐述了数论的基本概念和定理，为后来的数学家研究数域提供了重要理论基础。高斯利用复数知识证明了代数基本定理，解决了数学史上困扰人类很长时间的代数问题。显然，这些成就的取得离不开高斯对代数学的兴趣。

3. 研究

我们要引导学生从不同侧面去刻画和理解同一个数学定理，培养全方位多角度分析研究问题的能力和习惯，这样对问题的理解也必然更加深刻，相关概念之间的联系会变得更加紧密和自然。正如，横看成岭侧成峰，远近高低各不同，不识庐山真面目，只缘身在此山中；进而，体会到一不畏浮云遮望眼，只缘身在最高层。

在数域这节的教学过程中，直接讲述其定义的时候，通过向学生(一个授课班大概 80 人)询问，有 95% 的学生觉得数域这节很平常，但是这节中存在可以延伸的问题供学生研究。例如，这节中所讨论的数域都是无限集合，是否存在有限集合的数域？一位本科生在选修高等代数选讲的过程中注意到了该问题，对它产生了兴趣进行研究，最终完成了一篇论文。在该同学参加研究生复试时，该篇论文为他获得了加分项。

因此，高等代数选讲课程中的内容完全可与科学研究前沿问题以及现实生活中的问题相融合。在研究过程中，要鼓励学生具有批判精神敢于质疑权威，要独立思考，这对于学生的学习进步将有积极作用。

4. 结语

李国重等在[10]中提到，化解高等代数抽象性的方法，可从还原概念提炼过程、类比、对比和概念辨析等出发，这对于提升高等代数课堂教学质量，提高学生抽象思维能力和创新能力都具有积极意义。本文中介绍的“数系发展史”，是从概念的产生出发，结合数学史使得抽象的概念变得有趣且具体。

安润玲[11]采取并实施了启发式、探究式和讨论式的研究性教学方法，提高了高等代数课程的教学质量和教学效果。本文提到在数域的教学过程中，通过采取不同教学模式，激发学生学习与研究兴趣，提升了学生的创新意识，故有一名本科学生发表一篇关于有限域的论文，教学效果明显。

2024 年 11 月，教学过程中作者加入数学史来激发学生学习的兴趣进行了 80 位同学的问卷调查，问卷评价中，学生针对 5 个问题回答。具体结果见下表 1：

Table 1. 80 students' evaluation of teaching effect
表 1. 80 名学生对教学效果的评价

问题	评价
1. 比起直接讲授，这种方式较好	76 人打勾
2. 比起直接讲授，这种方式不好	4 人打勾
3. 数学史的加入有助于知识掌握	71 人打勾
4. 数学史的加入无助于知识掌握	9 人打勾
5. 数学史的加入提升学习的兴趣	80 人打勾

从表中的评价来看，教学过程中加入数学史的介绍对提升学生的学习兴趣和知识的掌握具有良好的作用。事实上，在作者授课过程中，每当介绍起数学史上激动人心的故事时，学生们总是听的认真、津

津有味,并且课堂氛围也变的很活跃。

《高等代数选讲》这门课程具有抽象性,对大学本科生而言学习起来有些困难。虽然笔者结合近些年的教学经验,提出了高等代数选讲课程教学与研究的一些做法与实践,但仍然不够成熟,在实际过程中还会有新的问题出现这需要我们根据实际情况通过一些教学手段和方法的改进来激励、提高学生对该课程的学习和研究兴趣。

基金项目

河南工业大学项目(lxykc202302, lxycxsy202424, 2024PYJH019),河南省教育厅项目(YJS2022JC16, 23A110010),河南省项目(HNGD2024020, 242300421384)以及高校大学数学教学研究与发展中心项目(CMC20240610)资助。

参考文献

- [1] 郜博,谭希丽,孙佩宇. 综合法、分析法、反证法与数学归纳法在高等代数中的应用[J]. 教育进展, 2023, 13(6): 3953-3959.
- [2] 覃利华,黄鸿君. 高等代数课程思政教学设计与实践研究[J]. 教育进展, 2024, 14(1): 664-669.
- [3] 杨胜. 高等代数的教学设计与实践——以维数公式为例[J]. 大学数学, 2024, 40(4): 86-91.
- [4] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数[M]. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [5] 克莱因. 古今数学思想[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1979.
- [6] 徐利治,王前. 数学哲学、数学史与数学教育的结合[J]. 数学教育学报, 1994, 3(1): 3-8.
- [7] 靳平. 在数学教学中讲点儿数学史[J]. 山西财经大学学报(高等教育版), 2002(1): 58-59.
- [8] 刘绍学. 谈谈“近世代数”这门课[J]. 高等数学研究, 2000, 3(3): 8-9.
- [9] 冯克勤. 高校代数课教学的一些做法和看法[J]. 大学数学, 2004, 20(5): 5-7.
- [10] 李国重,马朝忠,韩松辉. 化解高等代数抽象性的教学方法探索[J]. 高等数学研究, 2023, 26(4): 34-37.
- [11] 安润玲. 高等代数课程研究性教学的改革与实践[J]. 高师理科学刊, 2021, 41(6): 75-77.