**Creative Education Studies** 创新教育研究, 2025, 13(2), 121-126
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2025.132093

# 波利亚解题理论在初中几何当中的应用

石　壮，邓　薇

黄冈师范学院数学与统计学院，湖北　黄冈

收稿日期：2024年11月4日；录用日期：2025年2月6日；发布日期：2025年2月17日

## 摘　要

文章探讨了波利亚解题理论在初中几何教学中的应用。波利亚解题理论包括弄清问题、拟定计划、执行计划、回顾反思四个步骤，为初中几何教学提供了系统方法和思路。在理论层面，该理论源于波利亚对数学教育的深入研究，在全球范围内广泛传播并产生深远影响。在实践应用方面，其在初中几何证明题发挥重要作用。如在证明题中利用等腰三角形简化问题、应用定义进行转化；在教学效果上，显著提升了学生的思维能力，培养了逻辑推理能力和创新思维，同时提高了教学质量，增强了学生学习兴趣。波利亚解题理论在初中几何教学中具有重要应用价值，为提高学生几何解题能力和培养数学素养提供有力支持。

## 关键词

波利亚解题理论，初中几何，教学应用

# The Application of Polya's Problem-Solving Theory in Junior High School Geometry

**Zhuang Shi, Wei Deng**

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Nov. 4th, 2024; accepted: Feb. 6th, 2025; published: Feb. 17th, 2025

## Abstract

**This paper discusses the application of Polya's problem-solving theory in junior high school geometry teaching. Polya's problem-solving theory includes four steps: clarifying the problem, formulating the plan, implementing the plan, and reviewing and reflecting, which provides a systematic method and ideas for junior high school geometry teaching. At the theoretical level, the theory stems from Polya's in-depth research on mathematics education, which has been widely disseminated and has had a profound impact on the world. In terms of practical application, it plays an important role in**

文章引用: 石壮, 邓薇. 波利亚解题理论在初中几何当中的应用[J]. 创新教育研究, 2025, 13(2): 121-126.
DOI: 10.12677/ces.2025.132093

junior high school geometry proof problems. For example, in the proof question, the isosceles triangle is used to simplify the problem and apply the definition for transformation; in terms of teaching effect, it has significantly improved students' thinking ability, cultivated logical reasoning ability and innovative thinking, improved teaching quality, and enhanced students' interest in learning. Polya's problem-solving theory has important application value in junior high school geometry teaching, which provides strong support for improving students' geometric problem-solving ability and cultivating mathematical literacy.

## Keywords

**Polya's Problem-Solving Theory, Junior High School Geometry, Teaching Application**



## 1. 引言

初中几何作为数学教育的重要组成部分，对于培养学生的逻辑思维、空间想象能力以及解决问题的能力起着至关重要的作用。几何学是研究世界物体形状、位置关系及大小的数学学科，通过帮助初中学生掌握几何概念和定理，让学生从世界客观实物中抽象出几何图形，并建立点、线、面的概念，有效提高学生的空间想象能力和创新思维，并提高学生解决几何问题的能力[1]。几何作为数学学科的重要分支，在初中数学教学中占据着举足轻重的地位。它不仅能够培养学生的逻辑思维能力、空间想象能力和推理能力，还为学生后续学习更高层次的数学知识以及其他相关学科奠定了坚实的基础。初中几何涉及众多图形的性质、定理和证明，对于学生而言，既是挑战，也是提升数学素养的关键契机。

波利亚解题理论在初中几何教学中具有极高的应用价值。波利亚的解题思想的精髓就是“怎样解题表”，解题有四个步骤：弄清问题、拟定计划、执行计划、回顾反思。这为初中几何教学提供了一整套程序化的解题教学系统和一个启发式的解题过程分析方法，有助于学生在解决几何问题的过程中，逐步形成系统的思维模式，提高解题能力。因此，研究波利亚解题理论在初中几何中的应用具有重要的理论和实践意义。

## 2. 波利亚解题理论概述

波利亚解题理论是由美籍匈牙利数学家、数学教育家波利亚提出的，他的核心内容通过“怎样解题表”呈现出来，其理论基本观点：强调思维的重要性，认为解题不仅仅是找到问题的答案，更是一个培养思维的过程，学生通过解题有目的地进行思考，才能真正地学到知识；波利亚重视非智力品质的重要性，他认为在数学教育中，除了知识的传授，培养学生的兴趣、好奇心、毅力等等非智力品质也非常重要。波利亚将数学的解题过程分为弄清问题、拟定计划、实现计划、回顾四个步骤。1) 弄清问题：这是解题的第一步，在此过程当中需要明确问题的未知量、已知量等条件，理解问题的本质。2) 拟定计划：关键是要找出已知和未知之间的联系，如果找不到联系就要考虑辅助问题，通常可以采用回忆以前见过的类似问题、相关定理和方法，进行一般化或特殊化处理，制定一个求解的计划。3) 实现计划：按照拟定的计划进行实施，进行信息资源的逻辑配置。在这一过程当中要注意检验每一步骤的正确性，确保解题过程的准确性。4) 回顾：回顾反思已经得到的答案，对所得到的解进行验算，检查论证是否正确，同时通过回顾，总结解题的方法和技巧，以便在今后的解题中能够更好地应用[2]。

## 3. 培养初中生几何解题能力的教学策略

1) 培养学生读题习惯和阅读能力

这一过程是解决一道数学题目的前提条件，必须要先读懂题目，才能为后续找到切入点进行铺垫。在这一教学过程当中，教师可以引导学生去读题，让学生说出题目中有哪些条件，尤其是一些隐含的条件，让学生养成良好的读题习惯，才能寻找合适的解题方法。

2) 引导学生提取重点信息

在平常考试以及作业的练习当中，常常会出现一道几何题目条件特别冗长复杂，设问很多，有时候可能一道题目加上图像甚至占据了半面试卷，这就不免让很多同学产生了畏难心理，看到这样的题目心里就发怵。这时候教师作为学生学习的监督者，就可以给学生一定的心理暗示，让学生在读题期间可以拿一根铅笔圈出做题所需要的关键信息，从而提示做题，以便能够更加方便地处理已知条件和已知量之间的关系，方便做出拟定计划的策略。如图 1，在 $\Delta ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，AD 平分$\angle BAC$，$DE \perp AB$ 于 E，求证：直线 AD 是 CE 的垂直平分线。

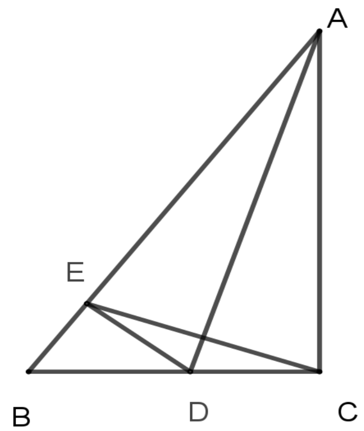


**Figure 1.** Dividing lines within triangles
**图 1.** 三角形内的分割线

学生们比较容易发现 DC、DE 的长是到$\angle BAC$ 两边的距离，且由 AD 平分$\angle BAC$ 可推出 DE = DC，同时要注意$\angle ADE = \angle ADC$，那么 AD 也是$\angle EDC$ 的垂直平分线，AE、AC 的长是到$\angle EDC$ 两边的距离，且 AE = AC。只要得出了这一个隐含条件，就能够发现更简捷的解法。

3) 培养数学思维，加强思维训练，注重双向思维能力

在平常数学教学当中，教师可以经常引导学生进行双向思维练习。在教学过程中，注重引导学生分析几何问题的条件和结论之间的逻辑关系。教师可以通过示范解题过程，详细讲解每一步的推理依据，让学生逐步学会如何进行逻辑推理。鼓励学生自己进行推理和证明，从简单的问题开始，逐渐增加难度。可以组织小组讨论，让学生在交流中互相学习和启发，提高逻辑思维能力。同时注重学生创新思维激发，鼓励学生在解决几何问题时尝试不同的方法和思路。教师可以提出一些开放性的问题，引导学生从多个角度思考解决方案。介绍一些数学史上的几何发现和创新案例，激发学生的创新意识和探索精神。比如，讲述古希腊数学家证明勾股定理的不同方法，让学生感受到数学的魅力和创新的价值。同时，鼓励学生自己提出问题和猜想，并尝试进行验证和探究。

4) 培养学生对图形性质的基本掌握

引导学生对常见几何图形(如三角形、四边形、圆等)的性质进行系统梳理和总结。可以制作图表或思

维导图，将图形的边、角、对角线等方面的性质清晰地呈现出来，便于学生记忆和对比。通过大量的基本图形，让学生独立思考，合作交流来解决问题，在基本问题当中思考，形成思想和方法的迁徙，进而把获得的知识和方法应用到解决新的问题当中去。

5) 重视学生书写解答过程的规范表达

在数学几何解题过程当中，有很多同学有着清晰的解题思路，但是在答题过程当中，总是会出现漏写重要步骤，导致一道题目下来总是会出现这扣一分，那扣一分的情况，这些扣分加起来也是一笔不容小觑的分数。这就要求教师在教学过程当中，注重对学生几何解答的规范要求，加强练习，不断总结，从平时的作业练习当中培养学生良好的书写表达能力，真正做到少扣分甚至不扣分。

6) 逐步培养学生养成良好的回顾反思习惯

在初中数学几何学习当中，会有很多题目需要作辅助线，每道题目的辅助线做法层出不穷，眼花缭乱，这就会导致学生在听完老师讲解完某个题目之后，感觉自己听懂了，但是下次遇到同样需要作辅助线的题目，照样无从下手。这就要求教师在教学过程当中，强调整理错题，回顾题目的重要性。教师可以带领学生准备一个错题本，教会学生如何使用错题本，如何做一个错题本，学生如果能养成对错题、方法进行总结归类，重新巩固和加强知识，并且能够举一反三，对以后的解题会有很大的帮助。回顾反思可以让学生更好地理解和消化知识，并在脑海中形成自己的知识体系[3]。

## 4. 波利亚解题理论在几何习题当中的应用实践

如图 2，$\Delta ADE$ 由 $\Delta ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转 $90^\circ$得到，且点 B 的对应点 D 恰好落在 BC 的延长线上，与 AD 相交于点 P。

1) 求$\angle BDE$ 的度数；

2) F 是 EC 延长线上的点，且$\angle CDF = \angle DAC$。

① 判断 DF 和 PF 的数量关系，并证明；

② 求证：$\frac{EP}{PF} = \frac{PC}{CF}$。

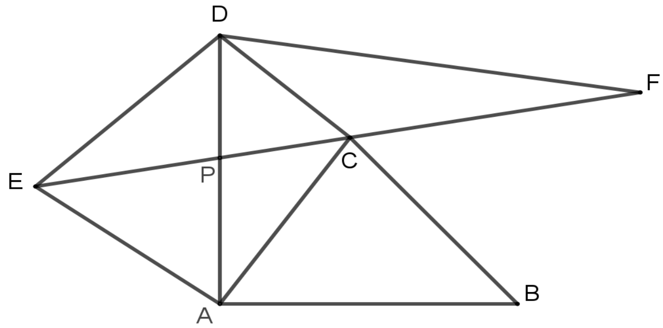


**Figure 2.** Geometric intersections within a polygon
**图 2.** 多边形内的几何交点

第一，弄清问题。

师：同学们仔细阅读一下，这道题有哪些条件。

生：$\Delta ADE$ 由 $\Delta ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转 $90^\circ$得到的。

师：那我们可以得到什么信息呢?

生：$\Delta ADE$ 和 $\Delta ABC$ 全等。

师：那第一问的角度是不是在做一个转换就可以解出题目了，那大家接下来重点放在第二问第一小问上。$\angle CDF = \angle DAC$ 这个条件如何应用呢?

生：可以先由旋转的性质得到 $AC = AE$，$\angle CAE = 90^\circ$。

师：那我们就可以得到什么?

生：可以得到 Rt$\Delta ACE$ 中，$\angle ACE = \angle AEC = 45^\circ$。

师：那$\angle CDF = \angle DAC$ 这个条件如何处理?

生：$\angle CDF = \angle CAD$，$\angle ACE = \angle ADB = 45^\circ$，那么$\angle ADB + \angle CDF = \angle ACE + \angle CAD$，这样就可以利用等角对等边将 DF 和 PF 数量关系求出来了。

师：非常好，同学们已经可以处理好图形旋转的性质以及等量代换的熟悉应用了，大家接下来思考最后一道压轴问题。相信大家第一时间拿到这道题目感觉很模糊，不知道从何下手，各位同学思考一下，我们要想证明一个等式成立，肯定是要进行一个转换，那我们不妨从 $\frac{EP}{PF}$ 入手，它可以转换成其他什么比值呢?

第二，拟定计划。

生：老师，我认为可以把他当中位线入手，做一个 PH//ED 交 DF 于点 H。

师：非常好，这样我们就可以把 $\frac{EP}{PF}$ 转化为 $\frac{DH}{HF}$ 那请大家在思考一下图中有哪对三角形全等呢?

生：$\Delta HPF$ 和 $\Delta CDF$ 全等。

第三，执行计划。

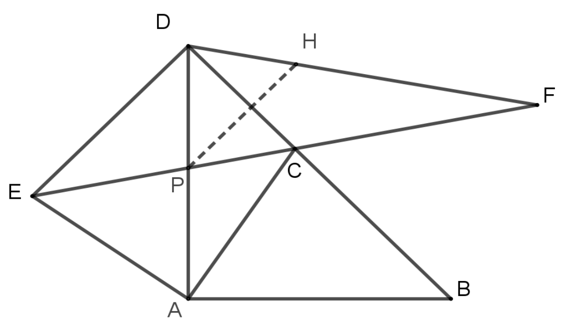


**Figure 3.** Complex geometry
**图 3.** 复杂几何图形

师：接下来请各位同学们按照上述解题思路自行解答一下问题，我请三位同学上黑板分别来进行第一问以及第二问的第一小问和第二小问的解答。

生 1：由旋转的性质可知，$\therefore AB = AD$，$\angle BAD = 90^\circ$，$\Delta ABC \cong \Delta ADE$，

$\therefore \angle B = \angle ADE$，在 Rt$\Delta ABD$ 中，$\angle B = \angle ADB = 45^\circ$，

$\therefore \angle ADE = \angle B = 45^\circ$，$\therefore \angle BDE = \angle ADB + \angle ADE = 90^\circ$。

生 2：证明：$DF = PF$。由旋转的性质可知，$AC = AE$，$\angle CAE = 90^\circ$。

在 Rt$\Delta ACE$ 中，$\angle ACE = \angle AEC = 45^\circ$。

$\because \angle CDF = \angle CAD$，$\angle ACE = \angle ADB = 45^\circ$ $\therefore \angle ADB + \angle CDF = \angle ACE + \angle CAD$，即$\angle FPD = \angle FDP$，$\therefore DF = PF$。

生 3：如图 3，过点 P 作 PH//ED 交 DF 于点 H，$\therefore \angle HPF = \angle DEP$，$\frac{EP}{PF} = \frac{DH}{HF}$。

$\because \angle DPF = \angle ADE + \angle DEP = 45^\circ + \angle DEP$，$\angle DPF = \angle ACE + \angle DAC = 45^\circ + \angle DAC$，

$\therefore \angle DEP = \angle DAC$，又$\because \angle CDF = \angle DAC$，$\therefore \angle DEP = \angle CDF$，

$\therefore \angle HPF = \angle CDF$。又$\because FD = FP$，$\angle F = \angle F$ $\therefore \Delta HPF \cong \Delta CDF$，

$\therefore HF = CF$，$\therefore DH = PC$，又$\because \frac{EP}{PF} = \frac{DH}{HF}$，$\therefore \frac{EP}{PF} = \frac{PC}{CF}$。

第四，回顾反思。

师：同学们经过本堂课的学习大家有没有发现，拟定计划这一步起到了十分关键的作用，它可以说是后续进行计划的核心，为后面执行计划做了铺垫，所以这一过程当中要严格仔细，对拟定的计划一定要有充分的认识。这就要求同学们在思考整道题目的时候要找到已知量和未知量之间的关系，根据对已经给出的条件进行尽可能的转化与拓展，找到求解的题目和给出条件之间的关系，必要的时候想出符合题目的辅助线，才能帮助大家解决题目[4]。

另外，回顾反思是波利亚解题理论中最容易被忽视但又非常重要的一个阶段。过去在解题后，往往只是简单地看一下答案是否正确，对于解题过程中的经验和教训没有进行深入的总结和反思。这使得在遇到类似问题时，仍然可能会犯同样的错误，或者无法快速地找到解决问题的方法。通过对波利亚解题理论的学习和实践，认识到回顾反思应该包括以下几个方面：首先，要检查解题过程是否正确，答案是否合理。如果答案不正确，要找出错误的原因，并进行纠正。其次，要总结解题过程中用到的方法和技巧，思考这些方法和技巧的适用范围和局限性，以便在今后遇到类似问题时能够灵活运用。还要分析解题过程中的思维过程，看自己是如何从已知条件出发，逐步推导出结论的，从中发现自己思维的优点和不足之处，加以改进。此外，还可以尝试对问题进行拓展和延伸，思考如果改变问题的条件或结论，会对解题方法产生怎样的影响，从而进一步加深对问题的理解和对数学知识的掌握[5]。

## 5. 总结与思考

波利亚解题理论不仅在数学学习中具有重要的指导意义，在日常生活中也同样有着广泛的应用。在解决生活中的实际问题时，我们也可以借鉴波利亚解题理论的思想和方法。首先，要明确问题的目标和现状，就像在数学解题中理解问题的已知条件和未知条件一样。然后，制定解决问题的计划，考虑各种可能的方案和途径，并选择最合适的方法进行实施。在实施过程中，要保持冷静和耐心，认真执行每一个步骤。最后，对解决问题的过程进行回顾反思，总结经验教训，以便在今后遇到类似问题时能够更好地应对。

波利亚解题理论给我们的启示是，解决问题不仅仅是为了得到一个结果，更重要的是通过解决问题的过程来提升自己的思维能力和综合素质。无论是在学习还是生活中，我们都应该注重培养自己的问题解决能力，学会运用科学的方法和策略去面对各种挑战。同时，要认识到错误和失败是学习的机会，通过对错误的反思和总结，我们才能够不断进步，变得更加优秀[6]。

## 参考文献


[1] 沈玲玲. 波利亚解题理论在初中几何教学中的应用研究[D]: [硕士学位论文]. 合肥: 合肥师范学院, 2023.

[2] 金文君. 波利亚解题理论在初中几何证明题中的应用[D]: [硕士学位论文]. 福州: 福建师范大学, 2021.

[3] 陈静. 波利亚解题思想在初中几何命题教学中的实践研究——以“三角形的内角和定理”为例[J]. 数学教学研究, 2022, 41(6): 37-41.

[4] 吴欣桐. “数学核心素养”视角下的解题教学——从波利亚解题理论看初中平面几何[D]: [硕士学位论文]. 上海: 上海师范大学, 2023.

[5] 黄飞飞. 基于波利亚解题理论的初中平面几何解题策略研究[D]: [硕士学位论文]. 南昌: 江西师范大学, 2022.

[6] 陈麒先, 谢海燕. 波利亚解题思想在初中平面几何教学中的应用研究——以“平行四边形的判定”为例[J]. 数学之友, 2024, 38(11): 37-39.