Creative Education Studies 创新教育研究, 2025, 13(2), 400-409
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2025.132132

Hans汉斯

从问题情境的创设到问题引领的数学教学

——以“圆锥曲线定义应用”专题设计为例

周金格[1]，韩君培[1]，万千明[1]，熊建军[2]，刘俊超[3]

[1]黄冈师范学院数学与统计学院，湖北 黄冈
[2]湖北省鄂州高中，湖北 鄂州
[3]武汉国骅学校，湖北 武汉

收稿日期：2024年11月6日；录用日期：2025年2月18日；发布日期：2025年2月27日

摘 要

以“圆锥曲线定义应用”专题为例，展示了数学教学如何创设问题情境，引领学生展开学习活动，彰显了问题引领数学教学模式的独特性。设置三个数学情境，提出八个数学问题，通过师生互动，营造生动活泼的新型课堂。研究发现，在问题引领教学模式下，教师的引导作用至关重要，学生思维的变化动态可分为四个阶段：初步感知与观察阶段、从动态感知到静态推理阶段、知识迁移与综合应用阶段、实际操作与归纳总结阶段，整体教学实施效果好。研究建议未来应继续深化问题引领教学模式，注重学生的差异性，将其推广到其他数学领域的教学中，并开展实证研究。

关键词

圆锥曲线定义，问题引领教学，问题情境，核心素养

From the Creation of Problem Situations to Problem-Led Mathematics Teaching

—Taking the Design of the Topic “Definition and Application of Conic Sections” as an Example

Jinge Zhou[1], Junpei Han[1], Qianming Wang[1], Jianjun Xiong[2], Junchao Liu[3]

[1]School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei
[2]Hubei Ezhou High School, Ezhou Hubei
[3]Wuhan Guohua School, Wuhan Hubei

Received: Nov. 6th, 2024; accepted: Feb. 18th, 2025; published: Feb. 27th, 2025

文章引用: 周金格, 韩君培, 万千明, 熊建军, 刘俊超. 从问题情境的创设到问题引领的数学教学[J]. 创新教育研究, 2025, 13(2): 400-409. DOI: 10.12677/ces.2025.132132

Abstract

Taking the topic of "Definition and Application of Conic Sections" as an example, it shows how mathematics teaching can create problem situations and lead students to carry out learning activities, highlighting the uniqueness of the problem-led mathematics teaching model. Three mathematical situations were set up, eight mathematical problems were raised, and a lively new classroom was created through teacher-student interaction. The study found that under the problem-led teaching model, the guiding role of teachers is crucial, and the dynamic changes in students' thinking can be divided into four stages: the initial perception and observation stage, the stage from dynamic perception to static reasoning, the stage of knowledge transfer and comprehensive application, and the stage of practical operation and induction and summary. The overall teaching implementation effect is good. The study suggests that the problem-led teaching model should be further deepened in the future, focusing on the differences among students, extending it to the teaching of other mathematical fields, and conducting empirical research.

Keywords

Conic Section Definition, Problem-Oriented Teaching, Problem Situation, Core Literacy

1. 问题提出

普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)的基本理念第三条明确指示要把握数学本质，启发思考，改进教学[1]。详细指出高中数学教学应以发展学生数学学科核心素养为导向，创设合适的问题情境，以数学问题统领整个教学活动。

“问题引领教学模式”是一种创新的教学方法，强调通过提出和引导问题来培养学生独立学习和解决问题的能力。问题引领教学模式以建构主义学习理论和认知心理学为基础，在这个框架下，教师从单纯的“知识传递者”转变为“问题领导者”和“思想催化剂”。问题情境的设计和引导是这一教学模式的支柱。通过设计刺激性的问题情境，教师激发学生的思考和探索，引导他们更深入地理解数学概念，提高他们的逻辑推理和实际应用能力。其核心内涵包括以下几个方面[2]-[4]：以问题为中心，问题是教学活动的核心驱动力。以学生为主体，学生不仅是知识的接受者，更是知识的探究者和创造者。以教师为引导者，教师通过设计问题情境，引导学生逐步完成认知构建，并及时反馈，帮助学生实现深度学习。注重知识迁移与应用，通过真实问题的解决，学生能够将课堂知识迁移到实际情境中，培养综合运用知识的能力。

“问题引领教学模式”可以看成是“基于情境的学习模式”这一教学方法的深入和发展。两者都强调情境的作用，关注知识迁移与应用，以学生为中心。但是，两者问题设计与作用不同，基于情境的学习模式，问题作为托管的一部分，通常隐含于任务中，重点放在任务完成上；问题引领教学模式，问题是教学的核心，设计具有层次性和目标导向性的问题链。两者教师角色也不同，基于情境的学习模式，主要教师负责创意设计和任务支持；问题引领教学模式，教师通过问题设计并引导促进学生的认知发展。学生参与方式也不同，基于情境的学习模式，学生通过设定或任务完成学习目标，强调实践操作；问题引领教学模式，学生通过逐步解决问题链学习知识与提升能力。通过分析可以发现，问题引领教学模式

更加关注系统化和重构的问题链设计，能够有效促进学生当下的知识和思维发展。将这一模式审视到数学教学中，不仅能够提升学生的学习效率和能力迁移水平，还能增强课堂教学的灵活性与适用性。

然而，“问题引领教学模式”在数学教育中的融入虽然正在取得进展，但在开发有效的问题情境和引导学生思考方面仍面临挑战。本研究旨在通过创建问题情境和采用问题主导的教学设计来培养学生的核心素养能力，以提高学生对圆锥曲线概念的理解和应用能力。采用“三个情境、八个问题”框架，设计一系列符合学生认知发展和现实需求的数学情境，旨在引导学生通过情境理解数学概念，并最终将其应用于解决实际问题。

2. 设计思路

主要围绕“问题引领教学模式”展开，重点分析了如何通过创设富有挑战性和层次性的情境，以及设计具体的引导性问题，帮助学生深入理解数学概念，特别是圆锥曲线的定义与应用。

在教学设计的核心部分，论文提出了“三情境，八问题”的教学框架，如图 1 所示。每个情境通过创设具体的数学应用问题，引导学生在不同的认知层次中理解和应用圆锥曲线的知识。每个情境下设计了多个逐步深入的问题，以帮助学生逐步构建数学概念、提升思维能力。

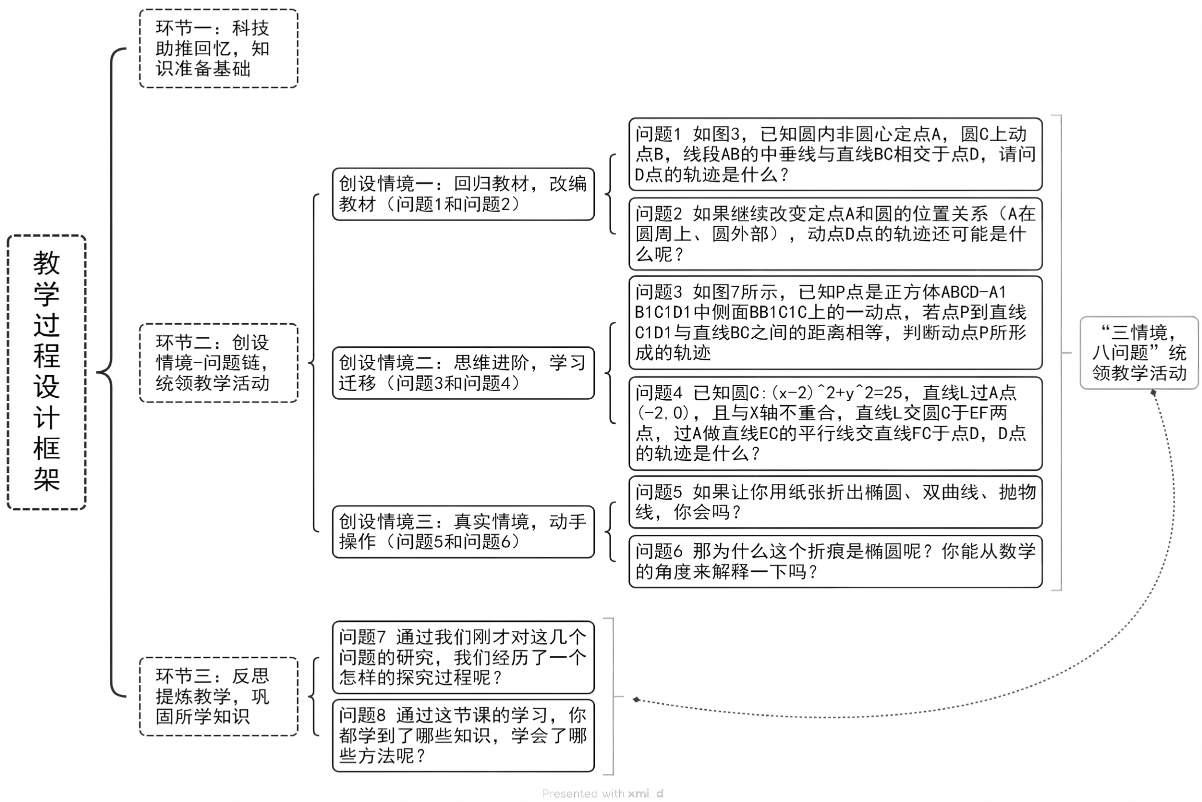

Figure 1. Instructional design framework
图 1. 教学设计框架

三情境设计：情境的设计源自学生的数学教材，以及实际生活，目的在于让学生通过与现实世界相关的具体情境，体会到圆锥曲线知识的实际应用价值，增强学习的动力和兴趣。

情境一：数学学习中的教材情境。

情境二：数学学习中的迁移情境。

情境三：数学生活中的真实情境。

八问题设计：每个情境中提出的问题从基础理解到高阶应用，层层递进，引导学生在问题的探究中深入理解数学概念，并学会将其应用于实际问题的解决中。每个问题不仅注重知识的传授，还要求学生对所学知识进行思维反思和应用。

3. 设计实施

3.1. 教学目标和重难点

目标是通过具体的教学活动，提升学生对圆锥曲线定义的理解，并使其能够将这一数学知识应用于实际问题中。具体目标包括：

① 帮助学生理解圆锥曲线的基本概念与性质。

② 引导学生通过实际问题，应用圆锥曲线的知识进行推理和分析。

③ 培养学生的数学思维能力，尤其是抽象思维、逻辑推理和问题解决能力。

④ 培养学生的核心数学素养，帮助其建立起数学知识与现实世界的联系。

重难点：

① 重点：利用圆锥曲线的定义解决轨迹问题。

② 难点：从实际问题中抽象出圆锥曲线的模型。

3.2. 教学环节

环节一：科技助推回忆，知识准备基础

引问 如图 2 所示，是否能用一个平面去截两个对顶圆锥的组合体，得到我们所学的圆锥曲线呢？圆锥的表面和截面相交的曲线什么时候是椭圆？是双曲线？是抛物线？

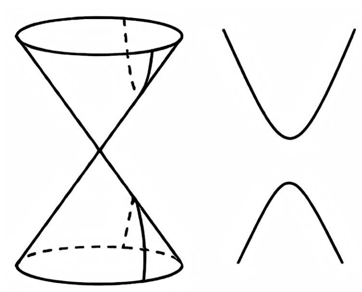

Figure 2. Introductory diagram
图 2. 引问图

师生活动 学生观察抽象几何体，尝试做出回答。教师用 GeoGebra 动态演示平面截对顶圆锥的过程，引导学生总结所截图形的情况和标准方程，并提出核心问题，利用圆锥曲线的定义，在情境－问题链下，去解决几个具体的问题。

设计意图 从直观的立体图形出发，让学生抽象观察几何图形，激发知识回忆，提出本节课研究的核心问题，为后续运用圆锥曲线定义去解决问题打下知识的基础。

环节二：创设情境－问题链，统领教学活动

① 创设情境一：回归教材，改编教材(问题 1 和问题 2)

问题 1 如图 3，已知圆内非圆心定点 A，圆 C 上动点 B，线段 AB 的中垂线与直线 BC 相交于点 D，请问 D 点的轨迹是什么？

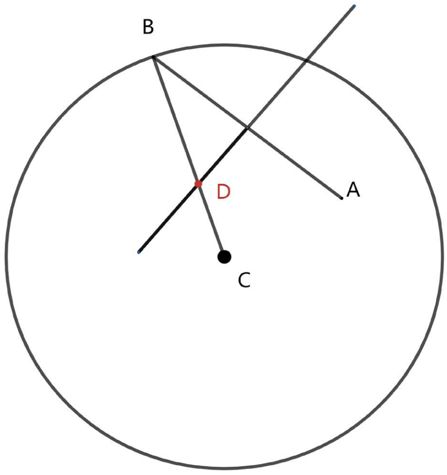

Figure 3. Question 1 diagram
图 3. 问题 1 图

师生活动 学生独立思考，教师总结并追问。

学生：(运用数学动态软件后发现)当 A 是圆内的，不是圆心的定点时，D 点的轨迹是以 AC 为焦点的椭圆。

教师：总结小组的发现过程，并追问：是否可以给出严格的数学证明呢？

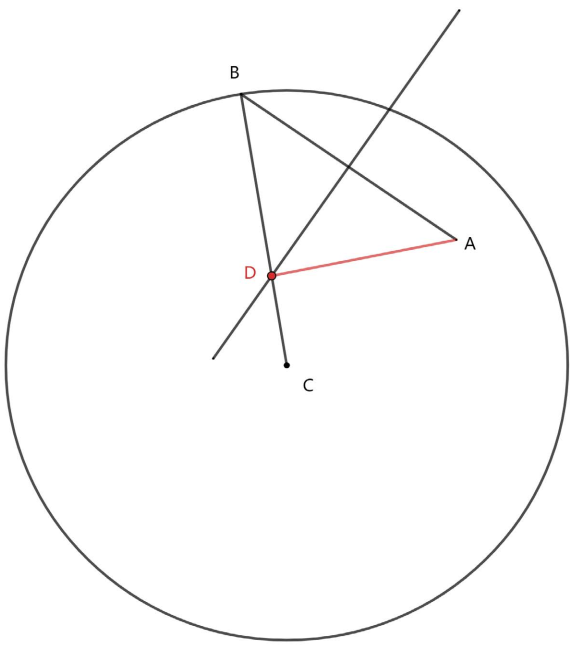

Figure 4. Proof diagram of question 1
图 4. 问题 1 证明图

(如图 4 所示)证明：连结辅助线 AD，根据垂直平分线上的点到 AB 两点距离相等的这一性质，得到了 $CD + BD = BC$，就有 $AD + CD = BC$ (半径)。又因为 AC 的长度是小于 BC 的长度的，所以根据椭圆的定义，D 点的轨迹是以 AC 为焦点的椭圆。

设计意图 从课本上的一道习题出发，回归教材情境，注重基础知识。引导学生从动态的几何直观感

受，到静态的数学严格证明，这两个方面感受并解决椭圆的轨迹问题。

问题 2 如果继续改变定点 A 和圆的位置关系(A 在圆周上、圆外部)，动点 D 点的轨迹还可能是什么呢？

师生活动 学生合作并探讨，教师组织小组汇报，并完善证明过程。

小组 1：我们组把 A 点放到了圆周上，我们发现，当 A 点在圆周上时，那么显然 AB 的垂直平分线是一定过圆心 C 的，这个时候，它和半径的交点就是一个定点。

小组 2：(如图 5 所示)我们总是把 A 点放到了圆外，这时候我们会发现，D 点的轨迹，是以 AC 为焦点的双曲线的两支。

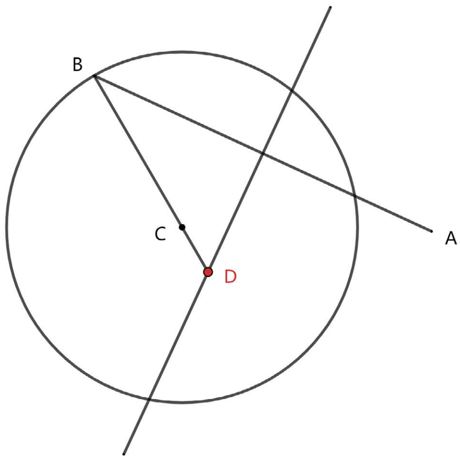

Figure 5. Proof diagram of question 2
图 5. 问题 2 证明图

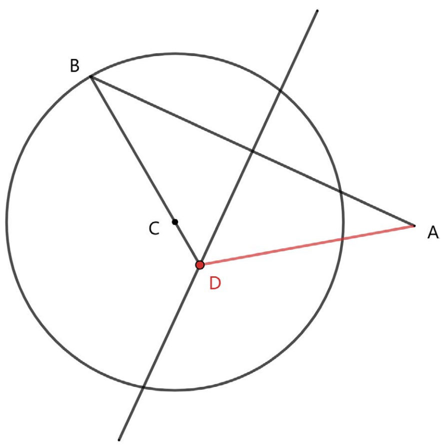

Figure 6. Follow-up proof diagram for question 2
图 6. 问题 2 追问证明图

追问：为什么满足条件的 D 点，一定在以 AC 为焦点的双曲线上吗？

证明：(如图 6 所示)动点 D 到 B 的距离始终等于到 A 的距离，所以 DB 与 DC 的差值始终是圆的半径，所以 DA 与 DC 的差值始终是圆的半径。符合了双曲线的定义，两个定点距离之差的绝对值始终是一个常数。而且因为 A 点在圆外，这个常数一定是大于圆的半径的。所以我们说，这个曲线是满足双曲线的定义，它一定是双曲线的两支。

设计意图 在问题 1 的基础上，问题 2 对教材上的习题进行改编和处理。让学生通过问题 1、2 的对比，了解到定点 A 的位置不同，动点 D 的轨迹也不同。培养学生的分类讨论思想，强化对椭圆、双曲线概念的理解和应用。

② 创设情境二：思维进阶，学习迁移(问题 3 和问题 4)

问题 3 如图 7 所示，已知 P 点是正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中侧面 BB_1C_1C 上的一动点，若点 P 到直线 C_1D_1 与直线 BC 之间的距离相等，判断动点 P 所形成的轨迹

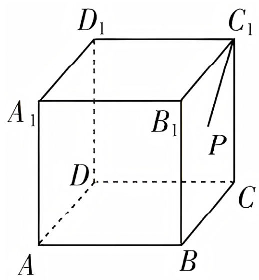

Figure 7. Diagram of question 3
图 7. 问题 3 图

问题 4 已知圆 C：$(x-2)^2+y^2=25$，直线 L 过 A 点$(-2, 0)$，且与 X 轴不重合，直线 L 交圆 C 于 EF 两点，过 A 作直线 EC 的平行线交直线 FC 于点 D，D 点的轨迹是什么？

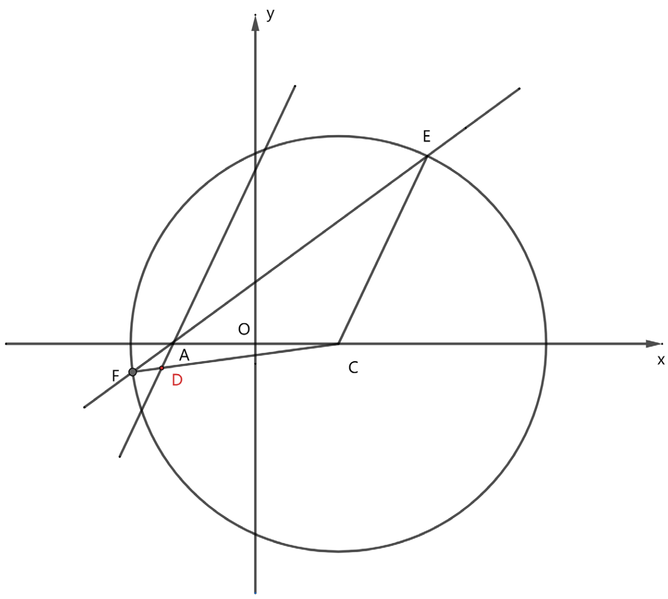

Figure 8. Diagram of question 4
图 8. 问题 4 图

师生活动 学生根据对图 7 的观察与思考，发现依据“线面垂直的性质”可将 P 点到 C_1D_1 的距离，转换为 P 点到 C_1 的距离，也等于 P 到 BC 的距离。根据对图 8 的观察，发现根据平行线得到$\Delta FDA \backsim \Delta FCE$，又因为 $CE = CF$ 得 $DA = DF$，故 $DA + DC = DF + DC = 5$ (半径)。教师总结：动点 P 到定点的距离等于它到定直线的距离(抛物线定义)；动点 D 到两个定点 A、C 的距离为一个定值，且这个定值大于两定点间的距离(椭圆定义)。

设计意图 问题 1、2、3 分别考查了椭圆、双曲线、抛物线的定义应用，但都聚焦于定长定值的寻找。将动点问题，通过几何特征转化为定值问题，在变化中抓住不变量，利用定义解决了一系列动点轨迹问题。问题 4 则是对椭圆定义应用的进一步升华，不是直接利用，而是通过联系许多知识点，比如平行线、相似三角形、等腰三角形等知识，进行进一步的转化，才有可能解决此问题。促进学生思维转化能力、逻辑推导能力、独立思考能力等关键能力的进阶。逐步加大考查的难度，通过 4 个由易到难的问题，呈现了应用圆锥曲线的定义解决轨迹问题的思想方法。

③ 创设情境三：真实情境，动手操作(问题 5 和问题 6)

问题 5 如果让你用纸张折出椭圆、双曲线、抛物线，你会吗？

师生活动 教师让各个小组利用课前准备好的纸张先尝试折出椭圆。一段时间后，带领班级学生按照如下的步骤进行折叠：

第一步：在一张圆形的纸片内，标记一个定点 A (非圆心)。

第二步：沿某条弦 BC 进行折叠，使弧 BDC 过点 A，然后展开。

第三步：沿另一条弦进行折叠，使弧 EFG 过点 A，然后展开。

第四步：多次重复上述步骤。

展示折纸作品，发现最终的折痕是一个椭圆。

问题 6 那为什么这个折痕是椭圆呢？你能从数学的角度来解释一下吗？

师生活动 小组展示，教师总结。

小组：(如图 9 所示)在折叠的过程中，我们假设，圆弧上的 M 点是和 A 点重合的，进行折叠之后，折痕是 EF，那我们就可以把 EF 看成是线段 AM 的垂直平分线，这样线段 EF 和圆的半径有一个交点 N，我们发现，这个问题就是我们刚才研究的问题 1，它跟我们的 D 点是一样的，所以每一条折痕上都有一个满足条件的 D 点，那我折叠了很多次之后，就会得到很多个满足条件的点 D，它就形成了一个椭圆。

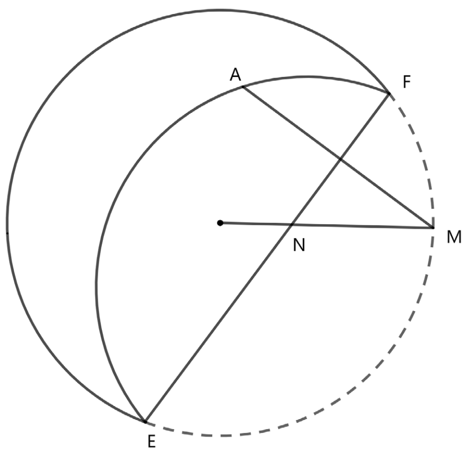

Figure 9. Proof diagram of question 6
图 9. 问题 6 证明图

教师：在复杂的实际情境中，发现原来问题 5 和问题 6，就是我们刚刚研究过的问题 1。举一反三，大家能试着折出双曲线和抛物线吗？我们把这个问题留作课后的思考作业。

设计意图 通过折纸活动，亲身经历椭圆、双曲线、抛物线的折叠过程，深化课堂感受，留下课堂记忆。培养学生在实际生活场景下，抽象出数学问题的能力，发展转化与化归思想。

环节三：反思提炼教学，巩固所学知识

问题 7 通过我们刚才对这几个问题的研究，我们经历了一个怎样的探究过程呢？

问题 8 通过这节课的学习，你都学到了哪些知识，学会了哪些方法呢？

设计意图 通过问题 7 的设问，让学生总结在研究动点轨迹问题的时候，要从研究图形开始、分析特征，发现不变性，应用定义，到形成解决问题的策略。通过问题 8，让学生归纳总结本节课学习了哪些知识，掌握了哪些方法，通过深度交流，了解学生所思、所想、所惑，为他们提供针对性练习。

3.3. 实施效果

3.3.1. 学生思维的演变

从初步的感知和理解开始，学生逐渐掌握概念，在实际情况下能够灵活运用数学知识解决实际问题，学生的思维模式会发生显著变化。根据思维的变化动态，具体分为以下几个阶段：

初步感知与观察阶段，在教学初期，学生通过观察教师用 GeoGebra 展示的动态几何过程，从直观的几何体开始抽象出圆锥曲线的形状和性质。学生从感知图形变化的特征入手，激发了对圆锥曲线定义的兴趣，为后续学习奠定了感性基础。从动态感知到静态推理阶段，在问题 1 和问题 2 的探讨中，学生通过动态几何软件的操作和小组讨论，将直观的几何观察与静态数学证明相结合。学生经历了从直观感知到逻辑推理的过渡，逐渐掌握了椭圆和双曲线的定义及其推导过程，建立了初步的抽象思维能力。知识迁移与综合应用阶段，在问题 3 和问题 4 中，学生运用已学知识解决了更复杂的动点轨迹问题。从简单的几何操作到涉及多种数学知识(如平行线性质、相似三角形等)的综合应用，学生的思维逐步提升到能够进行多步骤推导和概念转化的层次。实际操作与归纳总结阶段，在问题 5 和问题 6 的折纸活动中，学生亲自动手体验了圆锥曲线定义的应用，通过探索活动深化了对几何曲线的理解。问题 7 和问题 8 的总结环节，促使学生对本节课的学习过程进行反思，将所学知识体系化并内化。

3.3.2. 教师的引导作用

在该设计框架中，教师的作用是至关重要的。教师不仅是知识的传递者，更是学生思维过程的引导者和催化剂[5]。通过设计发人深省的问题并促进独立探索，教师可以激发学生的对话与思考，促进学生的深度学习。

动态演示与问题引导，教师通过动态几何工具观察展示几何变化过程，并设计逐步深入的问题链，引导学生探索三角形的构成与性质。例如，利用动态演示引导学生观察图形的变化，引发他们对椭圆形、双曲线、抛物线的几何图形的思考。

分层次递进的教学设计，教师设计从简单到复杂的链问题(如问题 1 至问题 4)，通过对比与延伸，帮助学生逐步理解圆锥曲线的定义及其应用。问题设计不仅关注数学论证的严谨性，还关注与实际问题的联系，促进学生思维进阶。

合作探究与即时反馈，教师在问题讨论中组织学生进行小组合作，通过集体讨论解决疑难问题，并及时给出反馈和总结，帮助学生在互动中加深对知识的理解。

实践操作与抽象归纳相结合，在折纸活动中，教师引导学生动手实践，把实际操作与抽象数学概念联系起来，帮助学生在活动中形成感性认知并上升到理性分析。

反思总结与方法对比，教师通过设计总结性问题(问题 7 和问题 8)，引导学生反思探究过程，提炼解决问题的方法与策略，促进学习迁移与能力提升。

4. 教学反思

4.1. “问题引领数学教学模式”优势

“三情境，八问题”统领教学活动的模式，既发挥了学生的主体地位，又发挥了教师的主导作用，

从创设的问题情境，走向了由问题引领的数学教学。以问题引领为核心的教学模式充分体现了其对学生思维能力的关注和培养。通过问题链的递进设计，学生不仅深入理解了圆锥曲线的定义和性质，还逐步解决问题的过程中发展了逻辑推理能力、抽象思维能力和知识迁移能力。可以说，这一教学模式在帮助学生构建知识体系、提升数学素养方面发挥了积极作用。

4.2. “问题引领数学教学模式”未来展望

4.2.1. 差异化教学

在实际实施中，不同学生的认知水平和学习能力存在差异。一些学生在面对较复杂的推理问题时可能会遇到困难，而另一些学生则能够快速完成并提出更深入的问题。这种个体差异在一定程度上影响了教学的均衡推进。未来设计中，应更加关注学生个体差异，通过分层教学、个性化任务和多样化评价机制，为不同层次的学生提供足够的学习支持。例如，设置基础任务和拓展任务，让学生根据自身能力水平进行选择，以更好地满足不同的学习需求。

4.2.2. 模式推广

怎么推广“问题引领教学模式”还需继续研究，本次设计聚焦于圆锥曲线定义应用的教学，但在其他数学知识领域，如何针对不同的知识特点调整问题链设计与情境创设方式，使之在更广泛的教学内容中发挥作用，设计符合其特点的构造和问题链，并保持同样的教学效果，仍需进一步探索。例如，高中数学中的函数、概率等知识内容可能需要不同的设计和问题链结构。

4.2.3. 实证研究

本设计的教学效果虽然在课堂中有所体现，但缺乏系统的数据来验证问题引领模式在提升学生数学素养中的具体效果。未来可以借助科学研究方法，对教学设计的效果进行模拟验证。例如，通过对比实验组和对照组的学习效果，引导问题模式在学生思维能力提升中的作用。同时，结合质性研究，如学生访谈和课堂观察，深入了解模式实施流程中的优势和不足。

问题引领教学模式不仅有助于知识传授，还能显著提升学生的思维能力和数学素养。尽管面临个性化需求和推广应用的挑战，但通过持续优化和科学研究，这一模式具有广阔的应用前景，为数学教育改革提供了重要的理论和实践支持。

基金项目

湖北省教育科学规划重点项目“课程思政与数学文化双融合的中学数学教学设计研究”(2022JA212)；黄冈市教育科学规划课题“双减”目标下的作业设计与差异化教学研究(2022GB37)。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[2] 钱建芬. 问题引领的初中数学课堂教学模式构建——以苏科版初中数学“可能性的大小”教学为例[J]. 数学教学通讯, 2016(29): 38-39.

[3] 张玉兰. 问题引领下的初中数学课堂教学模式构建——以苏科版初中数学“一元二次方程”教学为例[J]. 数学学习与研究, 2018(20): 120+122.

[4] 黄尧. 初中数学“问题引领”教学模式研究[J]. 基础教育研究, 2019(20): 18-19.

[5] 贺斌. 教师怎样与新课程同行——谈教师的角色转变及学会新的专业技能[J]. 教育理论与实践, 2002(5): 30-35.