Creative Education Studies 创新教育研究, 2025, 13(5), 183-193
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2025.135325

极限思想在高考数列中的应用

龚煊民，曹学锋

黄冈师范学院数学与统计学院，湖北 黄冈

收稿日期：2025年2月21日；录用日期：2025年5月6日；发布日期：2025年5月15日

摘 要

本文深入研究了极限思想在高考数列中的应用。首先分析了极限思想在高考数列中的研究背景与目的，指出其在高中数学教学和高考备考中的重要性及现实意义。接着阐述了极限思想的理论基础，包括数列极限的定义与性质以及常见数列极限求解方法。在具体应用方面，探讨了极限思想在求解数列通项公式和分析数列性质与变化趋势中的作用，通过实例剖析了历年高考真题和创新题型中极限思想的体现，并总结了解题思路。最后得出研究结论，强调极限思想在高考数列中的广泛应用及重要地位，并对未来研究方向进行了展望，包括深化理论研究、教学方法创新、高考命题趋势研究和跨学科应用研究等方面。

关键词

极限思想，高考数列，数列通项，数列求和

The Application of Limit Thinking in the College Entrance Examination Sequence

Xuanmin Gong, Xuefeng Cao

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Feb. 21st, 2025; accepted: May 6th, 2025; published: May 15th, 2025

Abstract

This paper delves into the application of limit thinking in the college entrance examination sequence. Firstly, the research background and purpose of limit thinking in the college entrance examination sequence are analyzed, and its importance and practical significance in high school mathematics teaching and college entrance examination preparation are pointed out. Then, the theoretical basis of the limit thinking is expounded, including the definition and properties of the limit of the number series and the common methods of solving the limit of the number series. In terms of specific application, the role of limit thinking in solving the general term formula of the number

文章引用: 龚煊民, 曹学锋. 极限思想在高考数列中的应用[J]. 创新教育研究, 2025, 13(5): 183-193.
DOI: 10.12677/ces.2025.135325

series and analyzing the nature and change trend of the number series is discussed, and the embodiment of the limit thinking in the past college entrance examination questions and innovative question types is analyzed through examples, and the ideas for solving the questions are summarized. Finally, the research conclusions are drawn, emphasizing the wide application and important position of limit thinking in the college entrance examination sequence, and looking forward to the future research directions, including deepening theoretical research, teaching method innovation, college entrance examination proposition trend research and interdisciplinary application research.

Keywords

Limit Thinking, College Entrance Examination Sequence, Number Series General Terms, Sum of Sequences

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

1.1. 研究背景

极限思想在高考数列中具有至关重要的地位。在高中数学中，数列是一个重要的知识板块，而极限思想为解决数列问题提供了一种独特而有力的方法。高考作为选拔性考试，对数列的考查常常涉及到极限思想的应用，它不仅能够考查学生的逻辑思维能力和数学运算能力，还能检验学生对数学本质的理解和掌握程度。

目前，关于极限思想在高考数列中的研究已经取得了一定的成果。许多学者和教师都认识到极限思想在高考中的重要性，并对其进行了深入的探讨和分析。他们通过对历年高考真题的研究，总结出了极限思想在数列中的常见考查方式和解题方法。同时，也有一些研究致力于探索如何在教学中更好地渗透极限思想，提高学生的数学素养和解题能力[1]。

然而，尽管已有研究为我们提供了很多有价值的参考，但在实际教学和高考备考中，仍然存在一些问题。例如，学生对极限思想的理解往往不够深入，在解题时难以灵活运用；教师在教学中如何更好地引导学生掌握极限思想，也需要进一步的探索和实践。因此，深入研究极限思想在高考数列中的应用，具有重要的现实意义。

1.2. 研究目的

本文旨在深入探索极限思想在高考数列中的创新应用，以满足当前高中数学教学和高考备考的实际需求。

一方面，通过对极限思想在高考数列中的应用进行研究，帮助学生更好地理解数列的本质和特点。数列作为高中数学的重要内容之一，其概念和性质较为抽象，学生在学习过程中往往存在一定的困难。而极限思想作为一种重要的数学思想方法，可以帮助学生从动态的角度去理解数列的变化趋势，从而更加深入地掌握数列的知识。例如，利用极限思想可以求解数列的通项公式和前 n 项和，还可以判断数列的单调性和收敛性等。通过对这些问题的研究，可以让学生更加直观地感受到数列的变化规律，提高学生对数列的理解和掌握程度。

另一方面，本文的研究也有助于提高学生在高考中的解题能力。高考数列问题常常涉及到极限思想的应用，如数列的极限、无穷递缩等比数列的和等。通过对这些问题的深入分析和研究，可以总结出一些有效的解题方法和技巧，帮助学生在高考中更加准确、快速地解决数列问题。同时，通过对极限思想的学习和应用，还可以培养学生的逻辑思维能力、创新能力和综合运用知识的能力，为学生的未来发展打下坚实的基础。

2. 极限思想理论基础

2.1. 数列极限的定义与性质

数列极限是极限思想在数列中的核心概念，深入理解其定义和性质对于在高考数列中的应用至关重要。

2.1.1. 极限思想的本质

极限思想以无限逼近的方式，通过考量变量在特定变化进程中的最终状态来分析和解决问题。它突破有限思维局限，把研究范畴从有限拓展至无限，为数学研究提供全新视角与方法[2]。在数列领域，极限思想能让我们明晰数列随项数无限增加时的变化走向，进而掌握数列整体性质。

2.1.2. 数列极限的精确定义

对于数列 $\{a_n\}$，若存在常数 A，对任意给定的正数 ε （无论多小），总有正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立，那么称数 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记为 $\lim_{n\to+\infty} a_n=A$。该定义从严谨数学逻辑层面，清晰界定数列极限概念，为后续运用极限思想解决数列问题筑牢理论根基。

2.1.3. 递推数列通项公式推导

在复杂递推数列中，常规手段推导通项公式颇具难度，极限思想则可成为破题利器[3]。例如，已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+1}{2a_n}$， $a_1=2$。假设当 $n\to+\infty$ 时，数列 $\{a_n\}$ 收敛，即 $\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}=A$ (收敛数列极限唯一)。将其代入递推式得 $A=\dfrac{A^2+1}{2A}$，整理为 $2A^2=A^2+1$，解得 $A=1$ 或 $A=-1$。鉴于 $a_1=2$ 及递推式可知数列各项为正，故舍去 $A=-1$。随后对递推式变形，进一步剖析数列 $\{a_n-1\}$ 性质，结合 $\lim_{n\to+\infty} a_n=1$ （即 $\lim_{n\to+\infty}(a_n-1)=0$），逐步推导通项公式。此方法借助极限确定数列无穷状态下的稳定值，为探寻通项公式变形方向提供关键线索。

2.1.4. 性质在高考题中的体现

在高考数列题中，数列极限的性质有着广泛的应用[4]。例如，数列极限的有界性可以帮助我们确定数列的取值范围。若数列$\{x_n\}$收敛，那么数列一定有界，即存在正数 M，使得对一切正整数 n 有 $x_n<M$。在解决一些数列问题时，我们可以利用有界性来确定数列的范围，进而求解其他问题[5]。又如，极限的保号性用的是最多的，它常与求递推数列的极限、函数的极值点与拐点、连续函数的零点定理等一起应用。若数列$\{x_n\}$收敛于 a，且 $a>0$，则存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $x_n>0$ [6]。在高考题中，可能会给出一个数列的递推公式，要求判断数列的某些性质，这时就可以利用极限的保号性来进行分析。

2.2. 常见数列极限求解方法

数列极限的求解方法有多种，其中定义法和夹逼准则是较为常见且重要的方法。

2.2.1. 定义法的应用步骤

定义法求解数列极限的具体流程如下：首先，根据数列极限的定义，对于给定的数列$\{a_n\}$，要确定其

极限是否存在并求出极限值，需要对任意给定的正数 n，找到正整数 N，使得当 $n>N$ 时，$a_n-a<n$ 恒成立，其中 a 为数列的极限值[7]。

在实际应用中，通常需要对数列进行分析和化简。

例如：求数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 的极限。

解：首先，$a_n=\frac{n}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$；

当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n+1}\to 0$；

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$。

2.2.2. 夹逼准则的实例分析

夹逼准则在高考数列题中有着广泛的应用。夹逼准则的基本思想是将待求数列夹在两个已知数列之间，通过已知数列的极限来确定待求数列的极限。

例如：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}\ (a\ge 0,b\ge 0)$。

解：我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=a$，对于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2a^n}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}a\sqrt[n]{2}$；

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=2$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a\sqrt[n]{2}=a$；

由夹逼准则可知，当 $a\ge b\ge 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=a$；

同理，$b\ge a\ge 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=b$；

综上所述，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max\{a,b\}$。

3. 极限思想在高考数列中的应用

3.1. 数列通项与极限

3.1.1. 通项公式推导极限

数列的通项公式是描述数列中每一项与项数之间关系的表达式。通过通项公式求极限是高考数列中常见的问题类型之一。

例如：已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{n^2}{2n^2+1}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

1) 原始解法：

解：首先对 $a_n=\frac{n^2}{2n^2+1}$ 进行分析，因为 $0<\frac{n^2}{2n^2+1}<\frac{n^2}{2n^2}=\frac{1}{2}$；

当 $n\to\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}0=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$；

根据夹逼准则，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}=\frac{1}{2}$。

2) 极限思想解法

解：对 $a_n=\frac{n^2}{2n^2+1}$ 进行化简，分子分母同时除以 n^2，得到 $a_n=\frac{1}{2+\frac{1}{n^2}}$；

当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n^2}\to 0$，所以 $a_n=\frac{1}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}$。

在实际解题中，我们可以通过分析通项公式的特点来确定数列的极限。如果通项公式是关于 n 的多项式，当 n 趋向于无穷大时，主要看最高次项的系数。若最高次项系数为正，则数列极限为无穷大；若最高次项系数为负，则数列极限为负无穷大。如果通项公式是分式形式，当 n 趋向于无穷大时，可以通过分析分子分母的最高次项来确定极限。若分子分母最高次项次数相同，则极限为分子分母最高次项系数之比；若分子最高次项次数小于分母最高次项次数，则极限为 0；若分子最高次项次数大于分母最高次项次数，则极限为无穷大或负无穷大。

3.1.2. 极限反推通项公式

已知数列的极限求通项公式是一种较为复杂的问题类型。在这种情况下，我们通常需要结合数列的性质和极限的定义来进行推导。

例如：已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}\right)=2$，求数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式。

1) 原始解法：

解：假设数列 $\{a_n\}$ 满足递推关系 $a_{n+1}=a_n+k_n$，其中 k_n 是与 n 有关的一个数列；

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}\right)=2$，我们可以先猜测是关于的二次式加上一个小的余项；

设 $a_n=2n^2+bn+c+r_n$ (其中 r_n 是一个当 $n\to\infty$ 时相对 n^2 和 n 可忽略的余项)；

则 $\frac{a_n}{n+1}=\frac{2n^2+bn+c+r_n}{n+1}$，当 $n\to\infty$ 时，

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+bn+c+r_n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-2+\frac{2+bn+c+r_n}{n+1}\right)$；

要使这个极限为 2，可以令 $b=4$，c 和 r_n 满足当 $n\to\infty$ 时 $\frac{2+4n+c+r_n}{n+1}\to 0$；

设 $r_n=\frac{1}{n}$，$c=-2$，则 $a_n=2n^2+4n-2+\frac{1}{n}$ $(n\ge 1)$。

2) 极限思想解法

解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(2+b_n)=2$，符合已知条件；

展开，$a_n=(n+1)(2+b_n)=2n+2+nb_n+b_n$；

当 $b_n=\frac{1}{n}$ 时，$a_n=2n+2+1+\frac{1}{n}=2n+3+\frac{1}{n}$ $(n\ge 1)$。

总之，通过分析数列通项公式与极限的关系，我们可以更好地理解数列的性质和变化趋势，提高在高考数列问题中的解题能力。

3.2. 数列求和与极限

数列求和问题是高考数学中的重要内容之一，而极限思想在数列求和中有着广泛的应用[8]。

3.2.1. 等比数列求和极限

等比数列是高考中常见的数列类型，其求和公式与极限有着紧密的联系。对于等比数列$\{a_n\}$，首项为

a_1，公比为 q，其前 n 项和公式为 $S_n=\{a_1(1-q_n)\}\{1-q\}$ （$q\neq 1$）。当 $q<1$ 时，随着 n 趋向于无穷大，qn 趋向于 0，此时等比数列的和 $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\{a_1\}\{1-q\}$。

例如：有一列正方体，棱长组成以 1 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，体积分别记为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$，则 $\lim_{n\to\infty}(v_1+v_2+\cdots+v_n)=$____。

1) 原始解法

解：由题意得，正方体的棱长满足的通项记为 a_n，则 $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$；

所以 $v_n=\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^3=\frac{1}{8^{n-1}}$ 是以首项为 1，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列；

则 $\lim_{n\to\infty}(v_1+v_2+\cdots+v_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{8^n}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{8}{7}$。

2) 极限思想解法

解：由等比数列通项公式可得正方体的棱长 $a_n=\frac{1}{2^n}$，那么其体积 $v_n=\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^3=\frac{1}{2^{3n-3}}=\frac{1}{8^{n-1}}$；

这是一个首项为 1，公比为 $\frac{1}{8}$ 的等比数列求和的极限问题；

根据等比数列求和公式可得 $v_1+v_2+\cdots+v_n=\frac{\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{8^n}\right)}{1-\frac{1}{8}}$；

当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{8^n}\to 0$；

所以则 $\lim_{n\to\infty}(v_1+v_2+\cdots+v_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{8}{7}$。

3.2.2. 数列求和极限的综合题

在高考综合题中，数列求和与极限的问题常常结合其他知识点进行考查。

例如：已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1，公比为 $\frac{1}{2}$，求 $\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$。

1) 原始解法

解：由题意得 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$；

即 $S_n=1\times\frac{\left[1-\frac{1}{2^n}\right]}{1-\frac{1}{2}}=2\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$；

当 $n\to\infty$ 时，$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left[1-\frac{1}{2^n}\right]$；

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，$\lim_{n\to\infty}S_n=2\times(1-0)=2$。

2) 极限思想解法

解：对于等比数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$q=\dfrac{1}{2}$；

根据等比数列前 n 项和 $S_n=\dfrac{1\times\left[1-\dfrac{1}{2^n}\right]}{1-\dfrac{1}{2}}=2\left[1-\dfrac{1}{2^n}\right]$；

$n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{2^n}\to 0$；

即 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2$

在解决这类综合题时，需要先分析数列的性质，求出数列的通项公式，再根据通项公式进行求和，最后讨论求和后的极限情况[9]。同时，要灵活运用极限的性质和求和公式，结合其他数学知识进行分析和推理，以提高解题的准确性和效率。

4. 极限思想与高考数列题型结合

4.1. 选择题中的极限应用

4.1.1. 快速判断选项

在高考数列选择题中，极限思想常常能够帮助考生快速判断选项[10]。例如，当题目给出几个关于数列的选项，要求判断数列的性质或取值范围时，可以考虑数列在极限情况下的表现。

例如：数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=n^2\left(\dfrac{7^n}{8^n}\right)$，设 a_n 最大，则 $n=$___。

1) 原始解法

解：若 a_n 最大，则 $a_{n+1}\le a_n$，且 $a_{n-1}\le a_n$；

由 $a_{n-1}\le a_n$ 可得，$n^2\left(\dfrac{7^n}{8^n}\right)\ge(n-1)^2\left(\dfrac{7^{n-1}}{8^{n-1}}\right)$，化简得 $n^2\ge\dfrac{8}{7}(n-1)^2$；

由 $a_{n+1}\le a_n$ 可得，$n^2\left(\dfrac{7^n}{8^n}\right)\ge(n+1)^2\left(\dfrac{7^{n+1}}{8^{n+1}}\right)$，化简得 $n^2\ge\dfrac{7}{8}(n+1)^2$；

解不等式组 $\begin{cases}n^2\ge\dfrac{8}{7}(n-1)^2\\ n^2\ge\dfrac{7}{8}(n+1)^2\end{cases}$，$5\le n\le 6$，又因为 $n\in N$，所以 $n=5$ 或 $n=6$。

再比较 a_5 和 a_6 的大小，经过计算得 $a_5=5^2\times\left(\dfrac{7}{8}\right)^5<a_6=6^2\times\left(\dfrac{7}{8}\right)^6$，可得 a_6 最大。

2) 极限思想解法

解：观察数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=n^2\left(\dfrac{7^n}{8^n}\right)$，我们可以考虑对 a_n 取自然对数，即

$$\ln a_n=\ln\left(n^2\left(\frac{7^n}{8^n}\right)\right)=2\ln n+n\ln\frac{7}{8};$$

令 $b_n=\ln a_n$，那么求 a_n 的最大项就转化为求 b_n 的最大项对应的 n 值；

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}-b_n}{n+1-n}$；

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[2\ln(n+1)+(n+1)\ln\frac{7}{8}-2\ln n-n\ln\frac{7}{8}\right]$；

化简得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[2\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+\ln\frac{7}{8}\right]$；

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right]=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n)=\frac{7}{8}<0$；

这表明当 n 足够大时，$b_{n+1}<b_n$，即 $\ln a_{n+1}<\ln a_n$，从而 $a_{n+1}<a_n$；

接着我们可以从 $n=1$ 开始逐步计算 a_n 的值，直到找到 a_n 开始递减的位置；

通过计算和比较可得 a_6 最大。

4.1.2. 易错点分析

在选择题中应用极限思想时，容易出现以下易错点：

一是对数列极限的理解不准确。例如，有些考生可能会错误地认为只要数列的通项公式中分母的次数高于分子的次数，数列的极限就一定为 0，而忽略了一些特殊情况，如分子分母可能存在公因式，化简后极限情况会发生变化。

二是在利用极限判断选项时，忽略了数列的初始项或前几项的影响。虽然极限反映了数列在 n 趋向于无穷大时的表现，但在选择题中，有时候数列的前几项也会对选项的判断产生影响。

为了规避这些易错点，考生在应用极限思想时应注意以下几点：

首先，要准确理解数列极限的定义和性质，对各种类型的数列极限情况进行深入分析和总结。例如，对于分式形式的数列通项公式，要正确判断分子分母的最高次项关系，同时注意是否存在公因式等特殊情况。

其次，在利用极限判断选项时，不能仅仅关注数列的极限情况，还要考虑数列的初始项和前几项的特点。可以先分析数列的前几项，观察是否存在特殊情况，然后再结合极限进行综合判断。

最后，要多做一些高考数列选择题，通过练习熟悉极限思想在选择题中的应用方法和易错点，提高解题的准确性和速度。

4.2. 解答题中的极限

高考数列解答题中，极限思想的运用往往具有一定的难度，主要体现在对学生综合分析能力和逻辑思维能力的高要求上[9]。

压轴题中的极限

在高考压轴题中，极限思想常常作为关键的解题思路出现[11]。

例题 1：数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$。

(1) 证明 $\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$。

解：(1) 由 $a_{n+1}=3a_n+1$，可得 $a_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$；

又 $a_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，所以 $\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$ 是首项为 $\frac{3}{2}$，公比为 3 的等比数列；

根据等比数列通项公式可得 $a_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\times 3^{n-1}$，则 $a_n=\frac{3^n-1}{2}$。

(2) 当 $n=1$ 时，$\frac{1}{a_1}=1<\frac{3}{2}$；

当 $n\ge 2$ 时，$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3^n-1}$；

因为 $3^n-1>2\times 3^{n-1}$ (当 $n\ge 2$ 时)；

所以 $\frac{1}{a_n}<\frac{1}{3^n-1}$；

则 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\cdots\frac{1}{a_n}<1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}$

这是首项为 1，公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列的前 n 项和；

根据等比数列求和公式 $S_n=\frac{1\times\left[1-\frac{1}{3^n}\right]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{3}{2}$

极限思想的体现：在证明不等式部分，将 $\frac{1}{a_n}$ 与 $\frac{1}{3^{n-1}}$ 进行比较后，得到一个等比数列的和 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}$。从极限的角度看，当 $n\to\infty$ 时，这个等比数列的和 $S=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{3}{2}$。这里通过放缩构造出等比数列求和，并且隐含了极限的思想来估计数列和的范围。

例题 2：数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$ ($a>0$)，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$。

(1) 若 $a=1$，求 a_2、a_3、a_4；

(2) 证明：当 $a\ge 2$ 时，$a_n\ge\sqrt{2n}$。

解：(1) $a=1$ 时，$a_2=1+1=2$，$a_3=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，$a_4=\frac{5}{2}+\frac{2}{5}=\frac{29}{10}$；

(2) 当 $a=2$ 时，$a_2=a_1+\frac{1}{a_1}\ge 2\sqrt{a_1\times\frac{1}{a_1}}=2=\sqrt{2\times 2}$ (当且仅当 $a_1=\frac{1}{a_1}$ 即 $a_1=1$ 时取等号)；

假设当 $n=k\,(k\ge 2)$ 时，$a_k\ge\sqrt{2k}$ 成立；

当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{a_k}$；

根据均值不等式 $x+y\ge 2\sqrt{xy}$，$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{a_k}\ge 2\sqrt{a_k\times\frac{1}{a_k}}=2$；

又 $a_{k+1}^2=\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)^2=a_k^2+2+\frac{1}{a_k^2}\ge a_k^2+2$；

由假设 $a_k\ge\sqrt{2k}$，则 ${a_{k+1}}^2\ge 2k+2$，即 $a_{k+1}\ge\sqrt{2(k+1)}$。

极限思想的体现：在证明过程中，虽然没有直接涉及极限计算，但在使用数学归纳法递推的过程中，如果考虑数列 $\{a_n\}$ 随着 n 的无限增大的趋势，其下限是按照 $\sqrt{2n}$ 的规律增长的。可以想象当 $n\to\infty$，数列 $\{a_n\}$ 是无界的，这种对数列长期行为的一种潜在思考体现了极限思想的影子。并且在使用均值不等式等方法估计数列的范围时，也可以从极限的角度去理解这种估计在无穷情况下的合理性。

5. 结论与展望

5.1. 研究结论总结

本文深入研究了极限思想在高考数列中的应用，得出以下结论：

首先，极限思想为高考数列问题的解决提供了有力的工具。在数列通项与极限方面，通过分析通项公式的特点可以确定数列的极限，同时也可以利用极限反推通项公式。在数列求和与极限方面，等比数列求和极限的应用以及数列求和极限综合题的解决，都体现了极限思想的重要性。

其次，在高考数列题型结合中，极限思想在选择题中能够帮助考生快速判断选项，但要注意易错点。在解答题中，尤其是压轴题中，极限思想作为关键解题思路，对学生的综合分析能力和逻辑思维能力要求较高。可以通过夹逼准则、数学归纳法以及与函数性质相结合等多种解题思路拓展，更好地发挥极限思想的作用。

总之，极限思想在高考数列中具有重要的应用价值。它不仅能够帮助学生更好地理解数列的性质和变化趋势，提高解题能力，还能培养学生的数学思维和创新能力。在高中数学教学中，教师应重视极限思想的教学，引导学生掌握极限思想的应用方法和技巧，为学生在高考中取得优异成绩奠定坚实的基础。

5.2. 未来展望

随着教育的不断发展和高考命题的不断创新，极限思想在高考数列中的应用也将面临新的挑战和机遇[12]。未来的研究可以从以下几个方向展开：

5.2.1. 深化理论研究

1) 进一步深入研究数列极限的本质和特性，探索更加精准的定义和性质表述。例如，可以结合现代数学的发展，引入拓扑学、测度论等领域的概念和方法，对数列极限进行更深入的分析和理解。

2) 研究不同类型数列极限的求解方法和技巧，拓展极限思想在高考数列中的应用范围。例如，对于非传统的数列类型，如随机数列、分形数列等，探索其极限的存在性和求解方法。

3) 加强对极限思想与其他数学思想方法的联系和融合的研究。例如，探讨极限思想与函数思想、方程思想、数形结合思想等的相互关系，为高考数列问题的解决提供更多的思路和方法。

5.2.2. 教学方法创新

1) 探索更加有效的教学方法和策略，帮助学生更好地理解和掌握极限思想在高考数列中的应用。例如，可以采用问题驱动教学法、项目式学习法等，让学生在实际问题的解决中深入体会极限思想的魅力。

2) 利用现代信息技术，开发多样化的教学资源和工具，提高教学效果。例如，制作动画演示、数学软件模拟等多媒体教学资源，帮助学生直观地理解数列极限的概念和性质。

3) 加强教师培训，提高教师对极限思想的理解和教学水平。通过组织教师参加专业培训、开展教学研讨等活动，促进教师之间的交流和合作，共同提高教学质量。

5.2.3. 高考命题趋势研究

1) 持续关注高考命题的动态和趋势，分析极限思想在高考数列中的考查方式和重点。例如，研究历年高考真题中极限思想的考查频率、题型分布、难度变化等，为教学和备考提供参考。

2) 预测未来高考命题中极限思想的可能考查方向和创新点。例如，结合数学学科的发展和社会实际需求，预测可能出现的新题型、新情境，为学生的学习和备考提供前瞻性的指导。

3) 建立高考数列中极限思想的命题模型和评价体系。通过对高考真题的分析和研究，总结出极限思想在高考数列中的命题规律和特点，建立科学合理的命题模型和评价体系，为高考命题提供理论支持。

5.2.4. 跨学科应用研究

1) 探索极限思想在高考数列中的跨学科应用，拓展学生的视野和思维方式。例如，将极限思想与物理学、经济学、生物学等学科相结合，引导学生运用极限思想解决跨学科问题，培养学生的综合素养和创新能力。

2) 开展跨学科教学研究，促进学科之间的融合和渗透。例如，组织数学、物理、生物等学科教师共同开展教学研究，设计跨学科的教学案例和项目，提高学生的学习兴趣和学习效果。

3) 加强与高校和科研机构的合作，开展跨学科的研究项目和课题。例如，与高校数学系、物理系等合作开展极限思想在跨学科领域的应用研究，为高考数列教学提供新的思路和方法。

总之，未来极限思想在高考数列中的研究具有广阔的前景和重要的意义。通过深化理论研究、创新教学方法、关注高考命题趋势和开展跨学科应用研究，可以不断提高极限思想在高考数列中的应用水平，为学生的发展和高考的改革提供有力的支持。

参考文献

[1] 刘霄霄, 肖亚. 注重知识的产生过程: 培养学生分析问题和解决问题的能力——以数列的极限为例[J]. 科技风, 2024(20): 28-30.

[2] 朱晔, 左小刚, 冯毅夫. 数列极限各类解法探究[J]. 科技风, 2024(29): 80-82.

[3] 彭仁华, 万亚利. HPM 理论下高等数学课程思政教学设计——以数列的极限为例[J]. 科学咨询(教育科研), 2024(10): 166-170.

[4] 杨娜娜, 孟新友, 马成业. 新时代高等数学“金课”建设新思路设计与研究——以数列极限概念为例[J]. 科技风, 2024(12): 118-120.

[5] 郝建英, 宋旭华. 极限思想在高职数学中的应用[J]. 现代农村科技, 2024(4): 149.

[6] 杨雪芹. 用极限思想探究高考数学北京卷选择题的压轴题[J]. 高中数理化, 2024(7): 59-61.

[7] 俞新龙. 用类比学习求解数列递推关系求通项问题[J]. 广东教育(高中版), 2024(10): 27-29.

[8] 祁居攀. 几类新数列求和问题解法剖析[J]. 高中数学教与学, 2024(19): 18-20+34.

[9] 马婷. 极限思维在高中数学教学中的应用[J]. 文理导航(中旬), 2024(1): 31-33.

[10] 董勇, 徐少成, 孙丹. 剖析学生课后习题解答领略新教材渗透极限思想的内涵[J]. 湖南中学物理, 2023, 38(9): 21-24.

[11] 刘烈文. 数列问题解题方法探究——以“等差数列与等比数列”为例[J]. 中学数学教学参考, 2024(27): 16-17.

[12] 周红军. 数列极限直观顺向描述定义的数学刻画[J]. 高等数学研究, 2024, 27(5): 22-26.