

基于ACT-R理论的概念教学案例

——以“诱导公式”为例

陶 非

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2025年3月10日; 录用日期: 2025年6月6日; 发布日期: 2025年6月17日

摘 要

随着基础课程改革的持续推进, 认知科学理论指导下的教学实践创新已成为教育研究的重要方向。ACT-R理论在数学概念教学中的应用逐渐受到重视, 现选取高中数学“三角函数诱导公式”为例, 系统探讨ACT-R理论指导下的数学概念教学模式重构。首先介绍ACT-R理论基本观点, 然后结合教学背景、目标和过程阐述该理论用于实际教学的情况。通过构建基于ACT-R理论的教学设计模型, 验证理论在促进知识结构化、提升问题解决能力方面的有效性, 为数学概念教学优化提供参考, 助力遵循学生身心发展规律开展教学。

关键词

ACT-R理论, 数学概念教学, 诱导公式

A Case of Teaching Concepts Based on ACT-R Theory

—Taking “Induction Formula” as an Example

Fei Tao

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Mar. 10th, 2025; accepted: Jun. 6th, 2025; published: Jun. 17th, 2025

Abstract

With the continuous promotion of the basic curriculum reform, the innovation of teaching practice under the guidance of cognitive science theory has become an important direction of educational research, and the application of ACT-R theory in the teaching of mathematical concepts has gradually

文章引用: 陶非. 基于 ACT-R 理论的概念教学案例[J]. 创新教育研究, 2025, 13(6): 200-207.

DOI: 10.12677/ces.2025.136429

been paid attention to, and we now take the high school mathematics “Trigonometric Function Derivative Formula” as an example to systematically explore the reconstruction of mathematical concept teaching mode under the guidance of ACT-R theory. We will systematically discuss the reconstruction of mathematical concept teaching mode under the guidance of ACT-R theory. Firstly, the basic viewpoints of ACT-R theory are introduced, and then the background, objectives and process of teaching are described to illustrate how the theory is used in actual teaching. By constructing a teaching design model based on the ACT-R theory, we verify the effectiveness of the theory in promoting knowledge structuring and enhancing problem-solving ability, which provides reference for optimising the teaching of mathematical concepts, and helps to carry out teaching in accordance with the laws of students’ physical and mental development.

Keywords

The ACT-R Theory, Teaching Mathematical Concepts, Induced Formulae

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着《普通高中数学课程标准 2017 年版(2020 年修订)》(以下简称“新课标”)的颁布以及基础课程改革的持续推进,教育研究者通过教学实践对学生的认知发展状况有了不同的认识。教学过程应严格遵循学生身心发展的内在规律以及教育教学本身的规律,以学生发展为本,使人人都能获得良好的数学教育[1]。新课标以发展学生核心素养为导向,课程标准通过知识体系的系统化整合,着力建构学科知识网络,其本质在于促进深度学习视域下的概念迁移与思维进阶[2]。

ACT-R 理论认为数学的认知本质可解构为陈述性知识与程序性知识的动态交互机制。其中,学科知识体系中的数学概念、公理定理等陈述性表征构成认知基底,其组织方式直接影响工作记忆的提取效率;而程序性知识则通过问题解决的过程,学生不断提升个人的认知能力,实现从对数学知识的简单了解到灵活运用的转变,逐步形成自动化认知策略。所以在实际教学中,可以将 ACT-R 理论与具体教学内容相结合,并开展教学设计研究。通过这种方式,帮助学生把困难问题拆解成一个个较小的简单问题,进而逐一解决,实现培养学生的数学学科核心素养[3]。

2. 理论框架

2.1. ACT-R 理论

ACT-R 理论是 1976 年由心理学家安德森(John R. Anderson)等人提出的,该理论解释人类复杂的认知思维过程。ACT-R 理论主张通过一些简单的原理帮助学习者形成简单的认知单元,随后使这些简单单元朝着复杂化方向发展,进而形成复杂的知识网络。一方面,它能够在数学教学中得到广泛应用。通过精致练习,让学生达到熟能生巧的境界,实现知识的迁移和深入理解,从而精准地抓住问题的关键所在。另一方面,可以依据该理论逐步构建起一套完整的教学流程,对各个教学环节加以完善,进而实现教学的优化[3]。三个基本二元维度是该理论的主要部分,即:“知识形态二元论”即陈述性知识和程序性知识,“认知过程二元论”即操作假设过程和学习假设过程,“系统层级二元论”即符号水平层级和亚符号水平层级[4],如图 1 所示。

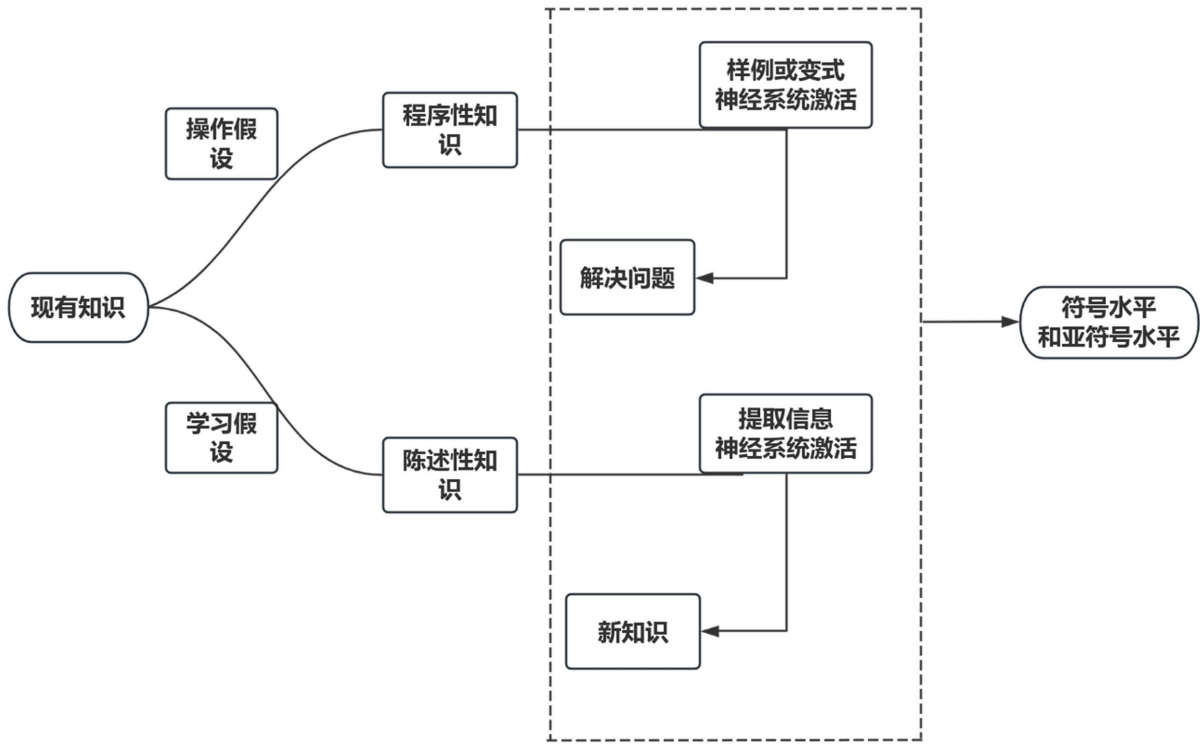


Figure 1. ACT-R theory cognitive process
图 1. ACT-R 理论认知过程

在高中数学概念教学中，学生对概念定义、属性等陈述性知识是基础，在运用概念解决问题中涉及程序性知识。在陈述性阶段通过复习回顾激活学生已有陈述性知识，创设情境引导学生观察、思考，将陈述性知识向程序性知识转化。再通过例题促使学生运用新知识解题，培养程序性知识。自动化阶段设置复杂例题，让学生分组讨论，强化知识自动化运用能力。数学概念教学具有逻辑性强、抽象度高的特点，学生需要从具体实例中抽象出概念本质，再将概念应用于解决复杂问题。基于“知识形态二元论”，教师在教学初始阶段，通过创设丰富的情境，如利用生活实例、数学史故事等引入数学概念，激活学生已有的亚符号水平层级经验，帮助学生初步理解概念的陈述性知识。在学生掌握一定陈述性知识后，依据“认知过程二元论”的操作假设过程，教师设计一系列探究活动。运用“知识形态二元论”，教师布置多样化的练习题和实际问题，让学生在练习中巩固陈述性知识和程序性知识，并促进两者的深度融合。基于“认知过程二元论”的操作假设过程，教师提出开放性的数学问题或项目，鼓励学生运用所学知识进行拓展创新。

2.2. 教学背景

2.2.1. 陈述性认识

诱导公式位于高中数学人教版必修第一册的三角函数章节中，是三角函数的主要性质之一。学生在学习本节内容前，已经积累了丰富的相关陈述性知识，这些知识如同知识网络中的节点存储于学生记忆中。这一节内容不仅是对前面所学三角函数定义、单位圆、同角三角函数基本关系式的进一步应用和深化，而且为后续学习三角函数的图像与性质、三角恒等变换等打下了坚实的基础。

2.2.2. 程序性认识

学生在前期学习已经发展了一定的程序性知识和能力，具备一定的分析推理能力和计算能力，诱导

公式的推导是一个重要环节,需要运用到归纳和类比方法,从特殊角度和情况推导出一般规律,这种能力是学生在长期数学学习中逐渐形成的程序性知识。并且,学生在学习过程中需要将三角函数值与单位圆上的点联系起来,通过观察单位圆对称性来推导公式,这要求他们运用数形结合的思想,这也是学生在之前学习中积累的解决数学问题的程序性策略。

2.2.3. 知识网络的构建与迁移

诱导公式在三角函数知识体系中具有重要地位,它是完善三角函数知识网络的关键环节。经过本节课学习过程,学生能将三角函数知识之间的内部联系清晰展现出来,知识间的关联有助于学生将新学的诱导公式与已有知识整合,形成更复杂、更系统的知识网络,提升他们对三角函数整体的理解和运用能力[5]。

学生在后续学习中,能够将诱导公式作为解决问题的工具,实现知识的迁移。例如,在研究三角函数图像的对称性、周期性等性质时,诱导公式能帮助简化计算和分析过程;在三角恒等变换中,诱导公式也是化简式子的重要依据。这种知识的前后连贯性和迁移性,符合 ACT-R 理论中知识相互作用促进学习的观点,有助于学生在整个三角函数知识体系的学习中顺利发展。

2.3. 教学目标

通常在教学目标设定环节,教育学者期望学生最终达成的目标往往具有较高的难度。通过 ACT-R 目标层级理论[6],对最终目标加以分解和细化如图 2 所示,在关注子目标相互联系的同时,合理地对教学目标进行分层,让学生便能更轻松地理解学习任务,也能清晰知晓自己现阶段处于教学目标的哪一具体阶段,有效提高学生的注意力,进而提升课堂教学的效果。

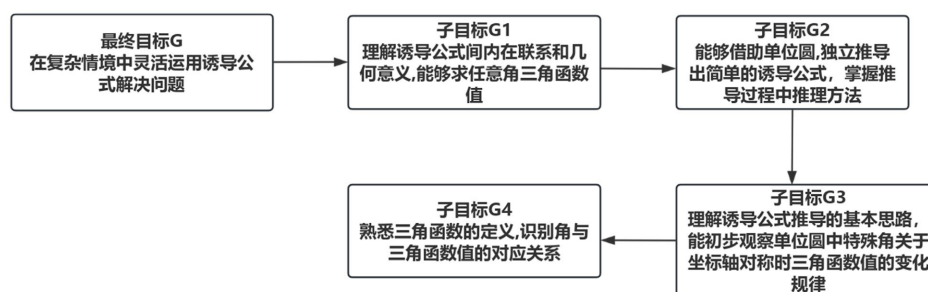


Figure 2. Induced formula cascade goals
图 2. 诱导公式层级目标

3. 教学过程

3.1. 陈述性阶段

3.1.1. 复习回顾,温故知新

教师:上节课我们共同经历了一场数学知识的探索之旅,大家还记得我们借助什么工具,依据什么来推导公式的吗?

学生:(齐声回答)借助单位圆,依据三角函数的定义。

教师:那通过上节课的学习,我们得出了什么重要公式?它有着怎样的特点和意义呢?

学生:诱导公式一。它刻画了三角函数“周而复始”的变化规律,还明确了终边相同角的同一三角函数值相等,也有对应的几何意义。

教师:除此之外,我们上节课还利用圆的什么性质得到了同角三角函数之间的关系呢?

学生：圆的几何性质。

通过回顾推导公式的工具和依据，激活学生的陈述性知识，即单位圆和三角函数定义相关内容，这是认知的基础。提问得出的重要公式，进一步巩固这部分知识在记忆中的存储。对于诱导公式一特点和意义的探讨，是将陈述性知识向程序性知识转化的过程，帮助学生理解如何运用。最后关于圆的几何性质得到同角三角函数关系的问题，强化知识间联系，促进知识网络构建，提升学生解决相关问题的能力。

3.1.2. 创设情境，导入新课

教师：圆是一个非常神奇的图形，它有很多独特的性质。其中圆的对称性最为关键。“对称”这个概念很早就被人们所关注。在数学学习中，我们常常从直观的几何图形开始，慢慢深入到抽象的代数表达。就像之前我们从圆的对称性这个几何特征出发，去寻找代数规律一样。请大家仔细观察黑板上平面直角坐标系中的单位圆，尝试从中找到一些特殊的对称性。

学生 1：点 P 关于原点有一个对称点 P_1 。

学生 2：点 P 关于 x 轴对称的点 P_2 也是特殊的对称点。

学生 3：老师，还有点 P 关于 y 轴对称的点 P_3 。点 P 关于原点对称的点 P_4 。

通过询问圆的关键性质激活学生关于圆的性质的陈述性知识，从几何到代数的思路引导将已有知识与当前学习建立联系。让学生观察单位圆找对称点，是在实践中运用知识，将陈述性知识向程序性知识转化，强化对图形观察和分析的能力，为探究三角函数奥秘构建知识基础，促进知识网络完善，提升解决问题能力。

3.1.3. 新知探究，学以致用

教师：以 OP_1 为终边的角 β 与角 α 有什么关系？角 β 、 α 的三角函数值之间有什么关系？

学生 1：我觉得角 β 和角 α 的终边方向好像是相反的，但具体关系不太确定。

学生 2：从图形上看，角 β 似乎比角 α 多转了半圈，但不知道怎么准确表达。

教师：现借助几何画板软件的动态功能，来绕原点旋转角 α 的终边至角 β 的终边，大家仔细观察，看看随着旋转的圈数和方向的不同，能发现角 β 与角 α 有什么确切的关系呢？

学生 3：我发现角 β 与角 $\pi + \alpha$ 终边相同，所以角 β 可以表示为 $2k\pi + (\pi + \alpha)$, ($k \in \mathbb{Z}$)。

教师：那现在我们再来看，因为 $P(x, y)$ 和 $P_1(x_1, y_1)$ 是关于原点对称的，根据我们之前学的知识，这两点坐标有什么关系呢？

学生 4： $x_1 = -x$ ， $y_1 = -y$ 。

教师：根据三角函数的定义，我们来分别看看 $\sin \alpha$ 、 $\sin(\pi + \alpha)$ 、 $\cos \alpha$ 、 $\cos(\pi + \alpha)$ 、 $\tan \alpha$ 、 $\tan(\pi + \alpha)$ 的值。同学们自己动手写一写。

学生 5： $\sin \alpha = y$ ， $\sin(\pi + \alpha) = y_1$ ，因为 $y_1 = -y$ ，所以 $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ 。

学生 6： $\cos \alpha = x$ ， $\cos(\pi + \alpha) = x_1$ ，因为 $x_1 = -x$ ，所以 $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ 。 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ ， $\tan(\pi + \alpha) = \frac{y_1}{x_1}$ ，

因为 $y_1 = -y$ ， $x_1 = -x$ ，所以 $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ 。

教师：大家一起回顾一下这个推导过程，加深理解。学生思考在推导过程中用到点 P 所在位置条件吗？

学生：无论点 P 在哪里，点 P_1 的坐标与点 P 的坐标之间的关系都不变。但是对于 $\tan \alpha$ ， α 的终边不能够落在 y 轴，所以此时 $\alpha \neq k\pi + \pi/2$ ($k \in \mathbb{Z}$)。

教师提出角 β 与角 α 的关系及三角函数值关系问题，激活学生关于角和三角函数的陈述性知识，学生的回答显示出他们对已有知识的调用。几何画板动态演示，将角的变化具象化，引导学生将陈述性知

识用于观察角旋转的程序性活动，使学生得出角的关系，促进知识向实际应用转化，形成程序性知识。思考点坐标关系和三角函数值计算，强化新旧知识联系，让学生用坐标知识和三角函数定义推导诱导公式二，实现陈述性和程序性知识深度融合，完善解决问题程序。回顾推导过程和讨论条件，能让学生反思，加深理解，巩固知识网络，提高解决问题能力，为后续学习打基础。整个设计围绕学生认知发展，遵循 ACT-R 理论，促进数学学习。

3.1.4. 类比探究，举一反三

教师：引导学生类比诱导公式二的研究思路如图 3 所示，如果作点 P 关于 y 轴(或 x 轴)的对称点 P_2 (或 P_3)，那么又可以得到什么结论？大家先自己思考一下，然后小组内讨论交流。

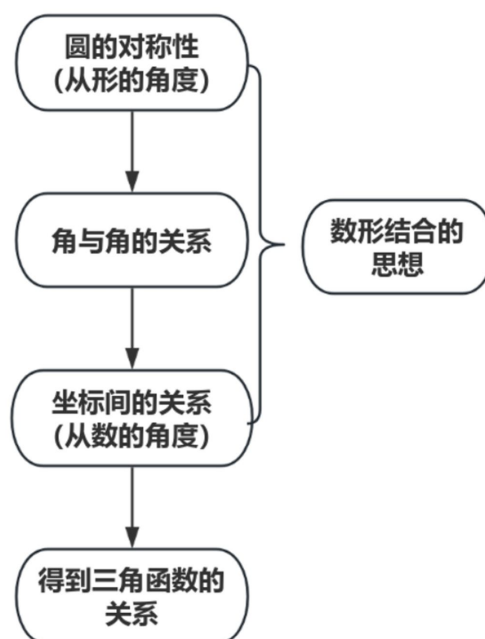


Figure 3. Derivation process of the induction formula
图 3. 诱导公式推导流程

学生们积极思考，热烈讨论，各小组内成员纷纷发表自己的看法。

教师引导学生类比诱导公式二的研究思路，能激活学生头脑中已有的关于诱导公式推导的陈述性知识，如三角函数定义、角的表示等，同时调动之前推导的程序性知识。让学生自主思考和小组讨论，使他们在实践中运用这些知识，在交流中碰撞出思维火花，将知识进一步整合。小组代表分享结果环节，强化了发言学生对知识的清晰表达和深入理解，也让其他学生从不同角度再次审视知识。梳理推导过程，加深对诱导公式三与四的理解，完善学生的知识网络，让他们明晰不同对称情况下角与三角函数值变化规律，将知识转化为解决问题的能力，实现知识迁移，为灵活解题奠定基础。

3.2. 程序性阶段

例题 1 求 $\sin 210^\circ$ 的值。

学生 1：老师， 210° 可以写成 $(180^\circ + 30^\circ)$ ，是不是可以用诱导公式二呢？根据诱导公式二，

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha, \text{ 那这里的 } \alpha \text{ 是 } 30^\circ, \text{ 所以 } \sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

将学生分成若干小组，进行诱导公式推导接力。教师给出一个起始角度和推导方向(如从 α 推导关于

y 轴对称的角的诱导公式), 小组第一个学生写出第一步推导过程, 然后传递给下一个学生继续, 看哪个小组能又快又准确地完成推导。此活动让学生在实践中运用三角函数定义、单位圆性质等知识进行推导, 强化从陈述性知识到程序性知识的转化, 培养学生的逻辑推理能力。

此环节通过呈现例题激活学生刚学的诱导公式等陈述性知识, 促使其从记忆中提取信息, 让知识处于活跃状态, 同时引导学生观察角度特点并思考适用公式, 将陈述性知识用于解题程序中, 学生把 210° 拆分为 $(180^\circ + 30^\circ)$ 并应用公式求解, 这培养了他们运用诱导公式解题的程序性知识, 强化解题程序, 提高运用知识解决问题的能力, 而且齐声回答 $\sin 30^\circ$ 的值, 巩固了特殊角三角函数值这一基础知识, 增强了师生互动, 活跃了课堂氛围, 为后续学习营造积极环境, 促进知识在认知体系中的深化。

3.3. 自动化阶段

例题 2 化简
$$\frac{\cos(\pi - \alpha) \tan(\alpha - 2\pi)}{\sin(2\pi - \alpha)}$$

教师: 这道题稍微复杂一些, 现在大家分组讨论一下, 看看如何运用诱导公式进行化简。

小组代表 1: 根据诱导公式, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, $\tan(\alpha - 2\pi) = \tan \alpha$, $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$, 所以原式就等于 $\frac{(-\cos \alpha \tan \alpha)}{-\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha \tan \alpha}{\sin \alpha}$, 然后 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, 代入化简后得到 1。

教师: 这个小组的化简过程非常清晰, 结果也正确。其他小组有没有不同的做法或者补充呢?

小组代表 2: 老师, 我们小组的思路也是先利用诱导公式化简, 不过在化简过程中, 我们先将 $\tan(\alpha - 2\pi)$ 根据周期性质直接写成 $\tan \alpha$, 然后再进行后面的计算, 结果也是 1。

布置小组项目, 如让学生利用诱导公式研究某一周期性现象(如潮汐变化、昼夜时长变化等)中的三角函数关系, 并制作成 PPT 展示。学生在项目实施过程中, 需要综合运用诱导公式、三角函数性质等知识, 解决实际问题, 培养合作交流能力和创新思维, 实现知识的深度融合与灵活运用。

通过复杂拓展例题促使学生整合诱导公式等知识, 分组讨论让学生自主调用诱导公式、三角函数周期性质等陈述性知识, 强化自动化运用能力, 使他们面对复杂问题能快速准确解题[7]。小组讨论培养了合作交流能力和多元思维, 不同思路拓宽了学生视野。教师最后总结强调观察角的特点来转化的解题策略, 并提醒注意诱导公式符号变化和三角函数基本性质等细节, 加深学生理解和运用的精准度, 帮助高效准确解题。

4. 建议、结论与局限性

4.1. 理论与实践结合, 优化学习过程

高中数学作为研究数量关系和空间形式的科学, 在义务教育后成为普通高级中学的主课程, 有着基础性、选择性和发展性的特点。不同的数学知识板块, 如代数、几何、函数等, 具有各自的特点。将 ACT-R 理论与课堂实践结合, 紧密围绕不同的特性展开, 将高中数学复杂知识合理分解, 使学生学习难度降低。其中学生陈述性知识的获得可帮助学生扎实掌握高中数学中诸如函数、几何与代数、概率与统计等内容的基础知识, 这些内容构成了高中数学知识体系的重要部分。程序性知识的训练则能使学生在面对各种数学问题时, 熟练运用所学, 如在数学建模和探究活动中灵活处理问题。

4.2. 分层设计教学目标, 推动学生全面发展

目标层级理论契合高中数学课程的发展性要求, 可依据不同层次学生的能力, 沿着必修、选择性必修和选修课程逐步提升学生的数学水平。教师可以将最终目标分解为多个子目标, 并关注学生子目标之

间的相互联系,从而更合理地分层设定教学目标。例如,在诱导公式的教学中,教师可以将目标设定为:首先让学生掌握诱导公式的基本形式和推导过程(陈述性知识),然后能通过例题练习应用诱导公式求解问题(程序性知识),最后能够灵活运用诱导公式解决复杂问题(自动化阶段)。通过逐步达成这些子目标,学生能够更清晰地理解学习任务,有效提高注意力,从而提升课堂教学的效果[8]。

4.3. 结论

在高中数学诱导公式的教学中,将 ACT-R 理论融入课堂,使复杂的数学知识简单化,能有效促进学生对知识的理解与运用,提升其认知能力和问题解决能力。

此原理在高中数学教学中具有普遍性,在函数、几何等其他知识板块同样适用。在研究过程中,虽未出现与理论相悖的情况,但对于学习进度较慢的学生,在知识转化和应用的衔接上仍需进一步探索个性化的教学辅助策略。未来研究可进一步聚焦于如何利用现代信息技术,根据学生个体差异精准推送学习资源,深化 ACT-R 理论在数学教学中的应用,同时探索如何更好地引导学生在自主学习中运用该理论,以适应不同的学习情境和需求。

4.4. 局限性

研究主要以教学案例分析的方式展开,缺乏多种研究方法的综合运用。如未采用量化研究方法对教学效果进行精确测量,也未运用质性研究方法深入挖掘学生的学习体验和认知过程,这使得研究结果的客观性和全面性受到一定程度的制约。对于学习进度较慢的学生,在知识转化和应用的衔接上,仅提出需要进一步探索个性化教学辅助策略,但未深入展开研究。不同学生在认知能力、学习风格等方面存在差异,研究未能充分考虑这些差异对诱导公式学习的影响,在满足个体学习需求方面存在欠缺。

参考文献

- [1] 教育部. 普通高中数学课程标准: 2017 年版 2020 年修订[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 崔友兴. 基于核心素养培育的深度学习[J]. 课程·教材·教法, 2019, 39(02): 66-71.
- [3] 李欣瑶. 基于 ACT-R 理论的数列概念的教学设计[J]. 中学数学, 2024(15): 44-45.
- [4] 米亚会. 基于 ACT-R 的线段图在应用题解题中的认知研究[J]. 教育与教学研究, 2015, 29(3): 107-111, 114.
- [5] 严兴光. 基于数学理解的三角函数概念教学[J]. 数学通报, 2021, 60(5): 21-24, 59.
- [6] 石天然, 操静, 林子植. 基于 ACT-R 理论的高中数学教学目标设计[J]. 教学与管理, 2024(9): 85-88.
- [7] 王萍萍. 从 ACT-R 理论看我国的数学双基教学[D]: [硕士学位论文]. 苏州: 苏州大学, 2007.
- [8] 王克亮. 课堂问题的设计与解决应凸显知识本质——一次主题教研活动中“三角函数的诱导公式”的教学体会[J]. 数学通报, 2017, 56(5): 10-14.