Creative Education Studies 创新教育研究, 2025, 13(5), 644-666
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2025.135388

Hans汉斯

钢筋混凝土受扭构件扭曲截面承载力计算的教学设计和实践

周晓军

西南交通大学土木工程学院，四川 成都

收稿日期：2025年3月12日；录用日期：2025年5月22日；发布日期：2025年5月30日

摘　要

钢筋混凝土受扭构件扭曲截面承载力和配筋的计算是《地下铁道与轻轨》课程中涉及混凝土结构设计的教学难点之一。本文结合课程教学内容，基于“理论推演、标准应用、实践检验”三维融合的教学理念，依据混凝土构件截面剪力流和变角度空间桁架斜压杆拉力的静力平衡关系提出了易于本科学生理解和掌握的钢筋混凝土受扭构件截面承载力计算和钢筋配置的理论推演方法，提出了钢筋混凝土受扭构件中钢筋配置的教学组织和设计。通过在《地下铁道与轻轨》课程中的教学实践表明，所提出的教学设计不仅有助于提高课程的教学质量，而且还有利于提高学生开展钢筋混凝土受扭构件结构设计的能力和创新意识。

关键词

钢筋混凝土受扭构件，扭矩，受扭承载力，变角度空间桁架模型，教学设计

Instructional Planning and Its Practice for Calculating the Torsional Strength of Warped Cross-Section of Reinforced Concrete Members Subject to Torsion

Xiaojun Zhou

School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan

Received: Mar. 12th, 2025; accepted: May 22nd, 2025; published: May 30th, 2025

文章引用: 周晓军. 钢筋混凝土受扭构件扭曲截面承载力计算的教学设计和实践[J]. 创新教育研究, 2025, 13(5): 644-666. DOI: 10.12677/ces.2025.135388

Abstract

To calculate both the torsional strength and reinforcement of reinforced concrete members subject to torsion is one of the difficulties in teaching the course entitled *Subway and Light Rail Transit*. Considering the instructional contents of this course, and in combination with the educational philosophy of three dimensional integration of theoretical deduction, standard application and practical verification, the method to calculate both the torsional strength of wrapped cross-section of reinforced concrete members subject to torsion and the reinforcing bars is deduced and presented so that the method can be easily comprehended and mastered by undergraduates based on the static equilibrium relationship between shear force flow in the cross-section of concrete members and the tension in oblique rods in spatial truss model with changeable angles. The instructional design on the determination of reinforcing bars in reinforced concrete members subject to torsion is also presented in this paper. The practice of using the instructional planning presented in this paper for teaching the undergraduates the course entitled *Subway and Light Rail Transit* shows that the instructional planning does not only help improve the teaching quality of the course, but also enhance the undergraduates' ability and their innovative awareness of thinking when designing the reinforcement of reinforced concrete members subject to torsion as well.

Keywords

Reinforced Concrete Torsional Members, Torque, Torsional Strength, Spatial Truss Model with Variable Angles, Instructional Planning

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

《地下铁道与轻轨》是我校为土木工程专业隧道与地下工程方向以及城市地下空间工程专业本科生而开设的一门专业核心课程。课程的教学内容中涉及到钢筋混凝结构承载能力的计算和钢筋的配置，如地铁车站和区间隧道衬砌以及高架线路中的车站和桥梁结构的设计等。因此向本科生讲解钢筋混凝土结构的设计和计算方法是本课程教学的主要内容之一[1]-[3]，也是要求选修本课程的学生必须要理解和掌握的知识点与技能。

经过多年对《地下铁道与轻轨》课程中涉及此部分内容的教学实践发现，由于变角度空间桁架模型属于三维空间的承载体系，同时还要将其视为箱形结构，且计算变角度空间桁架模型中纵向钢筋和箍筋拉力时需要截取箱形截面空间桁架的一个侧壁作为隔离体，因此需将钢筋混凝土受扭构件抽象为一个具有螺旋形斜裂缝的箱形空间桁架结构，并结合静力平衡和钢筋拉力的分解原则来求解截面的承载力。目前国内现行的教学参考书中虽然对钢筋混凝土受扭构件扭曲截面承载力和配筋方法进行了讲解，但通常仅给出了计算的图示和理论公式，并未讲解钢筋混凝土受扭构件扭曲截面承载力和受力钢筋计算的路线和方法，尤其是未明确给出基于变角度空间桁架模型的受扭构件扭曲截面承载力计算的理论推导过程[4]-[11]。文献[4]-[6]中在讲解素混凝土受扭构件扭曲截面承载力时，仅根据矩形截面素混凝土的计算图示列出了素混凝土受扭构件开裂扭矩设计值的计算表达式，未给出该表达式的推演过程，也未明确指出计算公式是以混凝土抗拉强度来确定受扭构件的扭矩设计值。此外，对于矩形截面钢筋混凝土受扭构件，仅

列出了对其简化计算的变角度空间桁架模型图示，未明确桁架中纵向钢筋和箍筋拉力与箱形横截面剪力流所引起的剪力之间的静力平衡关系，而且在箍筋拉力的分析中并未详细讲解如何考虑箍筋间距的做法。在文献[7]-[9]中虽然分别就矩形截面素混凝土和钢筋混凝土受扭构件的扭矩设计值进行了讲解，但针对素混凝土的扭矩设计值也仅列出了其截面内剪应力的分布图示和构件受扭开裂扭矩的计算公式，未详细讲解基于矩形截面剪应力的合力及其力偶的计算过程。而对于钢筋混凝土受扭构件，文献[7]-[9]中仅仅给出了将矩形截面钢筋混凝土受扭构件简化为变角度空间桁架的模型图示，未详细讲解将矩形截面钢筋混凝土受扭构件简化为具有一定厚度的箱形桁架的方法。此外，在分析变角度空间桁架模型中钢筋拉力和箱形截面剪力流之间的平衡关系时，未明确讲解箱形截面中斜压杆所受压力的含义及其计算方法。同时在分析变角度空间桁架模型中箍筋的拉力时，未讲解选取空间桁架模型中一个侧壁作为隔离体时，纵向钢筋拉力仅是整个箱形构件中纵向钢筋拉力一半的概念，也未详细讲解在计算箍筋拉力中如何引入箍筋间距的做法。文献[10] [11]中在讲解钢筋混凝土受扭构件的扭曲截面承载力时，直接列出了素混凝土受扭构件开裂扭矩和钢筋混凝土受扭构件扭矩设计值的计算公式，未讲解计算公式的理论推演过程。

就钢筋混凝土受扭构件扭曲截面承载力计算的教学内容分析，其涉及到较多的理论推演，当学生或阅读者仅根据教学参考书中直接列出的计算公式和图例进行学习时，并不能从原理上理解和掌握其分析过程与计算方法，因而学生在学习钢筋混凝土受扭构件扭曲截面承载力计算方法时尚存在较大的困难，导致学生对此部分知识点的学习效果以及课程的教学质量均不佳，也无法引导学生在学习知识点的过程中树立创新思维的意识，此部分内容就成为本课程教学中的难点之一。

为使学生能够容易理解和掌握钢筋混凝土受扭构件扭曲截面承载力和钢筋配置的计算与设计方法，启发和引导学生树立创新思维的意识，使学生掌握钢筋混凝土受扭构件在纯扭、受剪弯和轴向压缩等状况下承载力计算与钢筋的配置方法，本文结合《地下铁道与轻轨》课程中钢筋混凝土受扭构件的承载力计算和受力钢筋设计的教学内容，本着“理论推演 + 标准应用 + 实践检验”三维融合的新型教学理念，对受扭构件承载力和受力钢筋设计及其计算方法推演过程的教学设计进行研究与总结，以期实现课程的教学目标，进而提高学生运用所学知识开展地铁和轻轨工程结构中钢筋混凝土受扭构件的设计和计算能力，并逐步引导和培养学生树立混凝土结构创新设计的意识和思维。

2. 课程教学内容和讲解思路

根据《地下铁道与轻轨》课程教学的内容，与钢筋混凝土受扭构件承载力计算相关的教学内容包括混凝土受扭构件的类型、混凝土纯扭构件的破坏形态、混凝土受扭构件中的受力钢筋、素混凝土受扭构件扭曲截面的承载力、基于空间变角度桁架模型的钢筋混凝土受扭构件中纵向钢筋和箍筋的拉力、钢筋混凝土纯扭构件承载力及其在弯剪扭共同作用下承载力计算和配筋设计方法等。为便于课程教学和学生的理解，此部分教学内容的组织和讲授的思路安排如下：(1) 先讲解钢筋混凝土受扭构件扭转的类型及其破坏形态，引入受扭构件中配置钢筋的目的和意义；(2) 以素混凝土矩形正截面受扭构件为例，分析矩形正截面受扭构件的破坏模式，基于塑性理论中薄壁圆筒截面剪力流的概念讲解矩形正截面混凝土受扭承载力；(3) 以矩形正截面钢筋混凝土受扭构件的破坏形态建立变角度空间桁架模型，并讲解空间桁架模型截面剪力流引起的剪力与桁架中斜压杆压力和纵向钢筋以及箍筋的拉力；(4) 讲解计算混凝土纯扭构件受扭作用和扭压组合作用下承载力方法；(5) 混凝土受扭剪作用下承载力和钢筋的配置方法；(6) 讲解钢筋混凝土受扭剪共同作用下的配筋构造要求。

此外，为了解学生对所讲授内容的理解和掌握状况，还采用课堂随机抽点学生回答问题、向学生发放针对讲述内容的问卷调查、在课堂上临时设置单元测验以及向学生布置与讲授内容有关的课后课程设计等方法，即采用基于问题导向学习(Problem-based learning，简称 BPL)的教学方式，目的在于利用课程

设计中的问题进一步督促学生在理解所学内容的基础上能够掌握和应用钢筋混凝土受扭构件承载力的计算方法，并引导学生树立创新思维，拓宽学生的知识面。现结合上述的教学内容就相应的教学设计和实践总结如下。

3. 钢筋混凝土受扭构件的类型及其破坏形态

3.1. 钢筋混凝土受扭构件的类型

为便于学生理解和掌握钢筋混凝土受扭构件的承载特性，首先需要讲解钢筋混凝土受扭构件的扭转类型。工程中钢筋混凝土构件的扭转分为平衡扭转和约束扭转两种，见图 1。

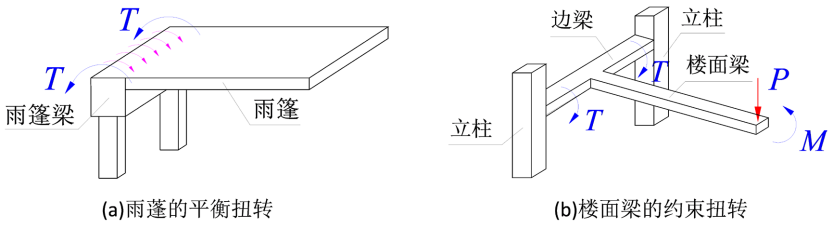

Figure 1. Torsional types of reinforced concrete members
图 1. 钢筋混凝土构件的扭转类型

图 1(a)中的雨篷梁为平衡扭转。平衡扭转通常是静定结构，其所承受的扭矩可通过对受扭构件的静力平衡分析而得到，且此类构件的扭转与构件的扭转刚度无关。图 1(b)中楼面边梁为约束扭转，又被称为协调扭转。此类构件上的扭矩除受到静力平衡条件影响而外，还受到与其相邻构件变形协调的影响，因此属于超静定结构。

3.2. 矩形正截面混凝土构件的受扭破坏形态

在讲解钢筋混凝土受扭构件类型基础上，进一步讲解混凝土构件受扭矩作用下的破坏形态，首先以矩形截面素混凝土构件为例，根据大量的试验表明，素混凝土构件在扭矩 T 作用下发生破坏的典型形态见图 2。

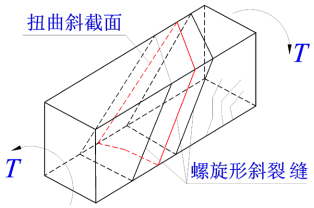

Figure 2. Torsional failure mode of plain concrete members
图 2. 素混凝土构件受扭破坏形态

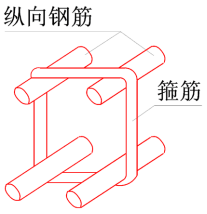

Figure 3. Anti-torsional bars in concrete members
图 3. 混凝土构件中的抗扭钢筋

当构件受到扭矩 T 作用的初期，混凝土构件处于弹性阶段，但随着扭矩 T 的增大，混凝土内出现不同程度螺栓状的斜向裂缝，并在其截面内产生剪应力。当混凝土构件外壁面上的剪应力达到其抗拉强度 f_t 时便发生沿某一主斜裂缝的突然破坏，并在其内部形成扭曲的斜截面。由于这种破坏属于脆性破坏，混凝土构件不具有延性，是工程中需要避免的。素混凝土受扭构件破坏后的扭曲斜截面见图 2。为防止混凝土构件在扭矩 T 作用下发生脆性破坏，可在其内部配置适量的纵向钢筋和箍筋，并将这些钢筋称为抗扭钢筋，其设置方式见图 3。通过配置抗扭钢筋就可以利用钢筋所具有较高的抗拉和抗压以及抗剪强度来提高混凝土受扭构件的抗拉强度和延性。

此外，还需要向学生讲解钢筋混凝土受扭破坏的形态。对钢筋混凝土矩形正截面构件的受扭加载试验表明，其破坏形态主要有适筋破坏、部分超筋破坏、超筋破坏和少筋破坏 4 种。所谓的适筋破坏就是指钢筋混凝土受扭构件在扭矩 T 作用下其内部的纵向钢筋和箍筋首先达到屈服强度，然后混凝土被压碎而发生的破坏。混凝土构件发生此种破坏时具有一定的延性，也是工程中所希望的。而当钢筋混凝土构件内纵向钢筋的配筋率大于箍筋配筋率时，则构件受扭矩作用下箍筋发生屈服而纵筋不发生屈服；反之，当构件内箍筋的配筋率超过纵向钢筋的配筋率时，则构件在扭矩作用下其内部纵向钢筋发生屈服而箍筋不发生屈服，这两种破坏形式均属于部分超筋破坏，此种破坏模式中混凝土构件的延性小，也是工程中需要避免的。另外，当混凝土构件中纵向钢筋和箍筋的配筋率均过高时，构件受扭矩作用下混凝土先发生破坏，而其内部的钢筋则均未发生屈服，这时混凝土构件发生的破坏被称为是超筋破坏，并且构件的破坏属于脆性破坏，这种破坏是工程中不希望发生的。若混凝土构件内纵筋和箍筋的配筋率过小，则混凝土构件在扭矩作用下一旦出现裂缝随即发生脆性破坏，同时使纵筋和箍筋也达到屈服强度，混凝土构件不具有延性，这种破坏就属于少筋破坏，因此在工程设计中应避免出现超筋和少筋的钢筋混凝土受扭结构。

通过对受扭混凝土构件破坏形态的讲解，使学生了解其破坏形态，并使学生理解在受扭构件中配置钢筋的作用，进而引起学生学习钢筋混凝土受扭承载力计算的兴趣，有助于学生逐步树立工程结构的概念。

4. 钢筋混凝土矩形截面受扭承载力的计算

4.1. 素混凝土矩形截面纯扭构件扭曲截面承载力

在讲解混凝土构件受扭破坏形态的基础上，进一步以矩形正截面素混凝土构件为例讲解受扭构件的承载力及其计算方法。首先讲解素混凝土受扭构件的承载力及其计算方法。以不配置受力钢筋的矩形正截面混凝土构件为讲解对象，其在扭矩 T 的作用下从弹性到发生塑性破坏时正截面 ABCD 内剪应力 τ 的分布状况分别见图 4。

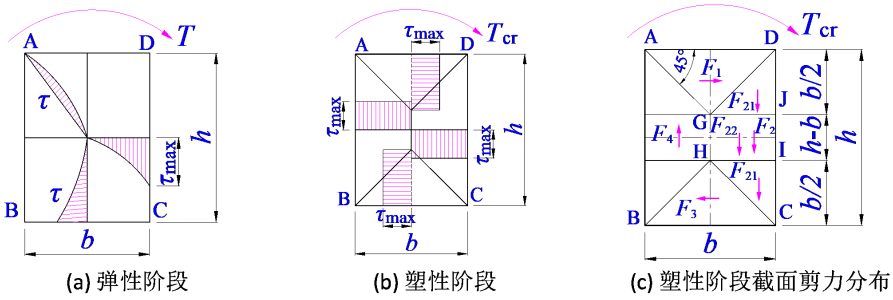

Figure 4. Shear stress distribution in the normal cross-section of plain concrete members subject to pure torsion
图 4. 素混凝土纯扭构件矩形正截面的剪应力分布

图 4 中 b 为截面的宽度，h 为截面的高度，两者的单位均以 mm 计，图 4 中 τ 和 τ_{max} 分别为截面上的平均剪应力和边中跨处的最大剪应力，其单位为 MPa。当矩形正截面混凝土构件受剪力 T 作用下处于弹性阶段时，构件正截面 ABCD 内的剪应力分别见图 4(a)。最大剪应力 τ_{max} 均出现在长边的中点处。当最大剪应力 τ_{max} 达到混凝土的轴心抗拉强度 f_t 时，混凝土各边的中点处剪应力也达到其抗拉强度 f_t，此时混凝土构件便发生塑性破坏，将此时构件所承受的扭矩被称为是混凝土构件的开裂扭矩 T_{cr}，见图 4(b)。根据塑性力学，将混凝土正截面 ABCD 内发生塑性破坏时的剪力 F 划分为 4 个区域内的平均剪力，即由图 4(c)中 F_1、F_2、F_3 和 F_4 组成。考虑到矩形正截面 ABCD 为轴对称图形，因此可将其划分为 4 个区域，即由 ΔAGD、ΔBCH、梯形 ABHG 和梯形 CDGH 所包围的区域，且 ΔAGD 与 ΔBCH 所围成的面积相等，梯形 ABHG 和梯形 CDGH 所包围的面积也相等。假设正截面所承受的平均剪应力为 τ，即上述 4 个区域内的剪应力 τ 均相等，则在正截面 ABCD 上的开裂扭矩 T_{cr} 就由各个区域内剪力引起的力偶组成。以梯形 CDGH 所包围的面积为例，将其可进一步划分为由 ΔDGJ 和 ΔCIJ 与长方形 GHIJ 所包围的面积，并且有 $F_1 = F_3$、$F_2 = F_4$。现分别讲解正截面 ABCD 中 ΔAGD 和梯形 CDGH 所包围面积内的剪力。在讲解截面上的剪力时需要引导学生正确理解剪力和剪应力的含义。即截面上的剪应力是单位面积上作用的剪力，剪力平行于截面。根据图 4(c)中的几何关系，ΔAGD 面积上作用的剪力 F_1 为

$$F_1 = \frac{1}{2}AD \times JD \times \tau = \frac{1}{2}b \times \frac{b}{2} \times \tau = \frac{b^2}{4}\tau \tag{1}$$

由剪力 F_1 引起的力偶 T_1 为

$$T_1 = F_1 \times \left(h - \frac{b}{3}\right) = \frac{b^2}{4}\tau\left(h - \frac{b}{3}\right) \tag{2}$$

作用于梯形 CDGH 面积上的剪力 F_2 由作用于 ΔDGJ 和 ΔCIJ 面积以上的剪力 F_{21} 与长方形 GHIJ 面积上的剪力 F_{22} 组成，则在 ΔDGJ 面积上作用的剪力 F_{21} 为

$$F_{21} = \frac{1}{2}GJ \times JD \times \tau = \frac{1}{2}b \times \frac{b}{2} \times \tau = \frac{b^2}{4}\tau \tag{3}$$

由剪力 F_{21} 引起的力偶 T_{21} 为

$$T_{21} = F_{21} \times \left(b - \frac{b}{3}\right) = \frac{b^2}{4}\tau\left(b - \frac{b}{3}\right) \tag{4}$$

由作用于长方形 GHIJ 面积上的剪力 F_{22} 为

$$F_{22} = HI \times IJ \times \tau = \frac{b}{2}(h - b)\tau \tag{5}$$

由剪力 F_{22} 引起的力偶 T_{22} 为

$$T_{22} = F_{22} \times \frac{b}{2} = \frac{b^2}{4}(h - b)\tau \tag{6}$$

从而由矩形正截面 ABCD 中各部分剪力所引起的力偶即可得到截面的扭矩为

$$T = T_1 + T_2 = T_1 + T_{21} + T_{22} = \tau\frac{b^2}{6}(3h - b) \tag{7}$$

当截面的最大剪应力 τ_{max} 达到混凝土抗拉强度 f_t 时混凝土构件便发生破坏，此时的扭矩就是受混凝土扭构件的扭矩设计值 T_{cr}，且有

$$T_{cr} = \tau_{max}\frac{b^2}{6}(3h - b) = f_t W_t \tag{8}$$

式中的 W_t 为受扭构件的截面受扭塑性抵抗矩，其单位为 m^3。

式(8)是以矩形正截面素混凝土受扭矩 T 作用下处于弹性和弹塑性特性而得到的开裂扭矩 T_{cr} 的计算公式，即扭曲截面的承载力。由式(8)可知，混凝土的扭矩设计值 T_{cr} 受控于其轴心抗拉强度 f_t 和构件截面受扭塑性抵抗矩 W_t。实际上混凝土构件并非为理想的弹性和弹塑性材料，其在扭矩 T 作用下的力学行为常处于非弹性和非弹塑性状态之间，因而，结合大量的试验研究，我国《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2010) (2024 版)中推荐以式(8)来计算受扭构件的扭矩设计值时需要考虑混凝土抗拉强度 f_t 的降低系数 η，该系数常取 $\eta = 0.7$，因而矩形正截面素混凝土受扭构件的开裂扭矩设计值 T_{cr} 为[12]

$$T_{cr} = \eta f_t W_t = 0.7 f_t W_t \tag{9}$$

式中各个符号的含义同前。此处，应当向学生明确说明，根据式(9)分析，素混凝土矩形截面受扭构件的开裂扭矩设计值 T_{cr} 是受控于混凝土轴心抗拉强度 f_t 和截面的受扭塑性抵抗矩 W_t。

4.2. 基于变角度空间桁架模型的受扭构件扭曲截面承载力

以上讲解和分析了素混凝土构件在扭矩 T 作用下发生扭曲破坏时开裂扭矩设计值 T_{cr} 的计算表达式。试验研究表明，在扭矩 T 作用下素混凝土受扭构件中一旦出现斜裂缝就会突然发生毫无延性的脆性破坏。为防止混凝土受扭构件发生的脆性破坏，可在其内部配置适量的纵向钢筋和箍筋，以提高其受扭承载力和延性。由于钢筋混凝土受扭构件在扭矩 T 作用下的破坏受多种因素的影响，根据钢筋混凝土构件发生受扭破坏的形态，针对钢筋混凝土受扭构件扭曲截面承载力的计算需要借助于变角度空间桁架模型。

为便于讲解和帮助学生理解，现建立图 5 所示的矩形正截面钢筋混凝土构件在扭矩 T 作用下的变角度空间桁架模型。该模型是通过大量试验而得到。

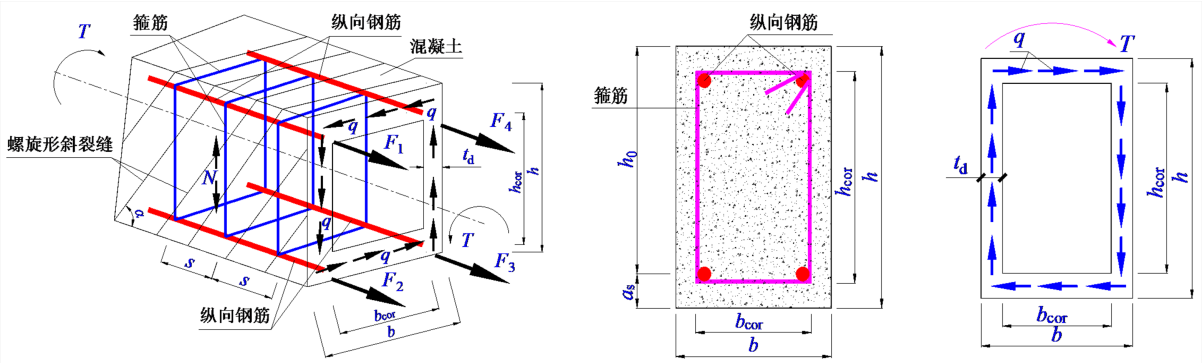

Figure 5. Spatial truss model with changeable angles
图 5. 变角度空间桁架模型

即将矩形正截面钢筋混凝土受扭构件视为一个由具有螺旋形斜裂缝的混凝土外壳、纵向钢筋和箍筋共同组成的空间桁架，其形状呈箱形结构，并且将斜裂缝的混凝土视为桁架的压杆。混凝土外壳即箱形截面侧壁的厚度为 t_d，其单位为 mm。图 5 中混凝土外壳斜裂缝混凝土的压杆与构件水平轴线之间的夹角为 α，单位为°。混凝土构件中箍筋的间距为 s，单位以 mm 计。矩形正截面的短边和长边的长度分别为 b 和 h，而 b_{cor} 和 h_{cor} 分别为以箍筋内表面计算的构件正截面核心部分短边和长边的长度，a_s 为纵向钢筋合力作用点至截面边缘的距离，h_0 为截面的有效高度，上述各个参数的单位均以 mm 计。N 为混凝土构件内箍筋的拉力，纵向钢筋的拉力分别为 F_1、F_2、F_3、F_4，拉力的单位均以 kN 计。q 为正截面内由扭矩 T 所引起的混凝土外壳中的剪力流，单位为 N/m。

为便于分析，针对空间桁架模型还需要向学生讲解所采用的 4 点假设：

(1) 将实心的矩形正截面混凝土构件简化成具有厚度为 t_d 的箱形空间桁架，并且混凝土只承受压力。在扭矩 T 作用下箱形截面混凝土外壳中会形成螺旋形斜裂缝，并由螺旋形斜裂缝受压的混凝土外壳组成桁架的斜压杆，其与水平面之间的夹角为 α。

(2) 配置在受扭混凝土构件中的纵向钢筋和箍筋只能承受拉力，且分别为桁架的弦杆和腹杆。

(3) 受扭混凝土构件在扭矩 T 作用下核心区域的混凝土不参与受扭作用，同时忽略钢筋的销栓作用。

(4) 混凝土受压桁架薄壁壳体中任意横截面内混凝土的剪力流 q 均匀且相等，且桁架中纵向钢筋的拉力也相等。

在课堂讲解时，需要向学生说明，上述 4 点假设是基于室内大量试验测试的结果，也是将复杂的混凝土受扭构件简化为变角度空间桁架模型的前提条件。根据以上 4 个假设条件，按照弹性理论中薄壁圆管横截面剪力流的计算方法，在扭矩 T 作用下，箱形截面混凝土构件中厚度为 t_d 的侧壁内产生大小相等的环向剪力流 q，见图 5(c)，其表达式为

$$T = \oint q\mathrm{d}s r = 2q\oint \frac{r\mathrm{d}s}{2} = 2qA_{cor} \tag{10}$$

式中 ds 为箱形截面混凝土构件侧壁的单元长度，r 为与箱形桁架模型横截面面积等效的圆的半径，单位均为 mm。A_{cor} 为变角度空间桁架模型中横截面内纵向钢筋中心线连线所围成的面积，即有 $A_{cor} = b_{cor} \times h_{cor}$，其单位以 mm^2 计。

由式(10)得到混凝土构件箱形横截面上的剪力流 q 为

$$q = \tau t_d = \frac{T}{2A_{cor}} \tag{11}$$

式中符号含义同前。

在矩形正截面受扭构件中配置纵向钢筋和箍筋的目的就是要防止混凝土构件发生受扭破坏，因而需要计算出受扭构件中纵向钢筋和箍筋中的拉力。现取图 5(a)中箱形截面变角度空间桁架模型的一个竖向侧壁为隔离体进行分析，其承载状况见图 6，并在图 6 中建立二维坐标系 xoy。

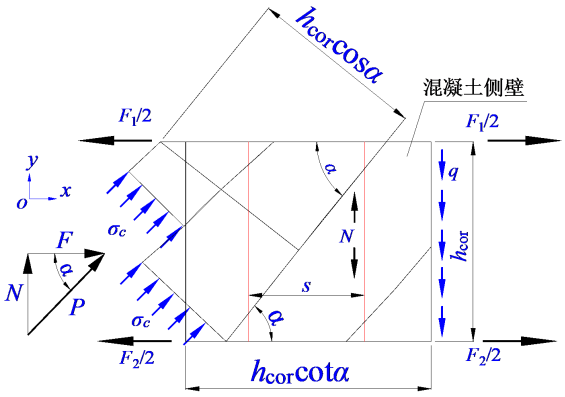

Figure 6. Loading condition of side-wall of spatial truss with variable angles
图 6. 空间变角度桁架竖向侧壁承载状况

在扭矩 T 的作用下，令图 6 中变角度空间桁架竖向侧壁内螺旋形斜裂缝受压混凝土所承受压力为 P，其沿 x 轴和 y 轴方向上的分量为 F 和 N，两者的单位均为 kN。根据二维坐标系 xoy 中静力平衡的关系可

得，分量 N 就是箍筋的拉力，而分量 F 则是纵向钢筋的拉力。

由于图 6 是图 5(a)所示的空间桁架中的一个侧壁，而空间桁架是由 4 个带螺旋形斜裂缝受压混凝土的壁面组成，因此在每个侧壁中纵向钢筋的拉力是图 6 中对应纵向钢筋拉力的 1/2。因此根据图 6 中 x 轴和 y 轴方向上的静力平衡，可得

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow N = qh_{cor} \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow F = \dfrac{1}{2}F_1 + \dfrac{1}{2}F_2 \end{cases} \tag{12}$$

根据变角度空间桁架混凝土斜压杆的压力 P 和箍筋的拉力 N 与纵筋的拉力 F 三者之间的三角函数关系可得

$$P = \frac{N}{\sin\alpha} \tag{13}$$

则将式(12)中拉力 N 的表达式和式(11)同时代入式(13)可得到斜压杆所承受的压力 P 为

$$P = \frac{qh_{cor}}{\sin\alpha} = \frac{\tau t_d h_{cor}}{\sin\alpha} \tag{14}$$

现在来分析变角度空间桁架中纵向钢筋所承受的拉力，由式(12)得到图 6 中纵向钢筋的拉力 F_1 和 F_2 满足

$$F_1 + F_2 = 2F = 2P\cos\alpha \tag{15}$$

将式(14)代入式(15)得到图 6 中纵向钢筋的拉力 $F_1 + F_2$ 为

$$F_1 + F_2 = 2\frac{\tau t_d h_{cor}}{\sin\alpha}\cos\alpha = \frac{Th_{cor}}{A_{cor}}\cot\alpha \tag{16}$$

现在分析竖向侧壁桁架中箍筋所承受的拉力 N，根据图 6 中桁架模型斜裂缝混凝土压杆所承受的压力 P 和纵向钢筋的拉力 F 以及箍筋的拉力 N 之间三角函数关系可得

$$N = qh_{cor} \tag{17}$$

此处为了在式(17)中引入箍筋的间距 s，可利用正切和余切函数之间的关系对式(17)进行变换有

$$N = qh_{cor} = \frac{qh_{cor}}{1} = \frac{qh_{cor}}{\tan\alpha\cot\alpha} \tag{18}$$

在讲解该式时，需要向学生特别说明，式(18)中就利用了正切和余切函数互为倒数的关系，即 $\tan\alpha\cot\alpha = 1$，其目的就是要在计算箍筋拉力的公式中引入箍筋的间距 s。通过对式(18)中利用正切和余切函数互为倒数关系的引入，有助于拓宽学生的知识面和树立创新的思维。

根据图 6 中的几何关系，可以得到角度 α 的正切函数关系式，即

$$\tan\alpha = \frac{h_{cor}}{s} \tag{19}$$

将式(19)其代入式(18)并对其进行化简后得到箍筋的拉力 N 为

$$N = \frac{qh_{cor}}{\tan\alpha\cot\alpha} = \frac{qh_{cor}}{\dfrac{h_{cor}}{s}\cot\alpha} = \frac{qh_{cor}s}{h_{cor}\cot\alpha} = \frac{qs}{\cot\alpha} = qs\tan\alpha \tag{20}$$

将剪力流 q 的表达式(11)代入式(20)即得到箍筋的拉力 N 为

$$N = qs\tan\alpha = \tau t_d s\tan\alpha = \frac{T}{2A_{cor}}s\tan\alpha \tag{21}$$

式(21)即为变角度空间桁架模型中的带有斜裂缝压杆的侧壁箍筋拉力 N 的计算表达式，由式(21)可见，箍筋的拉力 N 与箍筋的间距 s、构件所承受的扭矩 T 和变角度空间桁架结构中横截面内纵向钢筋中心线连线所围成的面积 A_{cor} 有关。

上述的箍筋拉力是在图 5 中选取了变角度空间桁架的一个竖向侧壁而得出的表达式。采用同样的方法可取变角度空间桁架中的顶部或底部的一个壁面进行分析，同样会得到其内部纵向钢筋和箍筋的拉力表达式。若假设变角度空间桁架模型上顶部的螺旋形混凝土斜压杆的倾角也为 α，通过静力平衡，按照上述的推导过程仍然可以得到顶部螺旋形混凝土斜压杆中纵向钢筋的拉力 F_3 和 F_4 的计算表达式，即

$$F_3 + F_4 = 2\frac{\tau t_d b_{cor}}{\sin\alpha}\cos\alpha = \frac{Tb_{cor}}{A_{cor}}\cot\alpha \tag{22}$$

利用式(16)和式(22)便得到基于变角度空间桁架模型的矩形截面钢筋混凝土受扭构件中纵向钢筋的总拉力 F 为

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = \frac{T\cot\alpha}{2A_{cor}}\left(2b_{cor} + 2h_{cor}\right) \tag{23}$$

式(23)中$(2b_{cor} + 2h_{cor})$就是空间桁架箱形截面剪力流路线外侧所围成面积 A_{cor} 的周长，令 $C_{cor} = 2b_{cor} + 2h_{cor}$，并结合式(21)，得到钢筋混凝土受扭构件在扭矩 T 作用下其内部纵向钢筋的总拉力 F 和箍筋的拉力 N 的表达式，其为

$$\begin{cases} F = \dfrac{TC_{cor}}{2A_{cor}}\cot\alpha \\ N = \dfrac{Ts}{2A_{cor}}\tan\alpha \end{cases} \tag{24}$$

从式(24)可以看出，正式由于钢筋混凝土受扭构件中纵向钢筋的总拉力 F 和箍筋的拉力 N 均受控于斜压杆的倾角 α，即拉力是随着角度 α 而发生变化，所以将钢筋混凝土受扭构件的模型被称为是变角度的空间桁架模型。

如此讲解，便于学生理解为何要将钢筋混凝土受扭构件简化为变角度空间桁架模型的缘由。正是由于混凝土受扭构件中钢筋的拉力与角度 α 有关，因此在讲解此部分内容时，基于问题导向学习即 Problem-based learning 的模式，在课堂上随机抽取了 2~3 名学生，让学生结合式(24)来思考和回答纵向钢筋拉力 F 和箍筋拉力 N 与角度 α 之间的关系，并讨论角度 α 能不能取为 0˚或 90˚以及当 α = 45˚时拉力的表达式。其中有 2 名学生能够正确回答在 tanα 中角度 α 能取 0˚和不能取 90˚值，但有 1 名同学未能正确回答该问题。经教师课堂讲解，帮助该同学正确理解了 tanα 中角度 α 的取值问题。如此讲授不仅能引导学生参与课堂教学，帮助学生理解和加深对变角度空间桁架模型的理解和认识，同时也有利于拓宽学生的思维和知识面。

在讲解根据变角度空间桁架模型得到受扭构件中钢筋拉力表达式的基础上，需要进一步向学生讲解受扭构件扭矩设计值的计算方法。所要讲解的内容如下：假设在扭矩 T 的作用下，钢筋混凝土受扭构件中的纵向钢筋和箍筋在混凝土受压破坏前均发生屈服，即混凝土构件发生适筋破坏，则纵向钢筋的屈服应力和箍筋的屈服应力分别为 f_y 和 f_{yv}，此时令钢筋混凝土受扭构件中配置的全部纵向钢筋的横截面面积为 A_{stl}，配置的受扭单肢箍筋的横截面面积为 A_{st1}，进而得到纵向钢筋的拉力设计值 F_u 和箍筋的拉力设计值 N_u 分别为

$$\begin{cases} F_u = f_y A_{stl} \\ N_u = f_{yv} A_{st1} \end{cases} \tag{25}$$

根据式(24)所代表的纵向钢筋和箍筋的拉力与式(25)所代表的钢筋屈服强度相比，两者应相等，从而得到受扭构件在扭矩 T 作用下发生适筋破坏时扭曲截面承载力的表达式为

$$\begin{cases} T = \dfrac{2A_{cor} f_y A_{stl}}{C_{cor} \cot \alpha} \\ T = \dfrac{2A_{cor} f_{yv} A_{st1}}{s \tan \alpha} \end{cases} \tag{26}$$

在此需要向学生说明，式(26)就是根据钢筋混凝土受扭构件中纵向钢筋拉力 F 达到其抗拉屈服强度 f_y 和箍筋的拉力 N 达到其抗拉屈服强度 f_{yv} 时得到的受扭构件的承载力 T。

从式(26)中消去 T 可得到

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \sqrt{\zeta} = \sqrt{\frac{f_y A_{stl} s}{f_{yv} A_{st1} C_{cor}}} \tag{27}$$

式中 ζ 是混凝土受扭构件中纵向钢筋与箍筋的配筋强度比。

将式(27)代入式(26)中的第 2 式便得到以变角度空间桁架模型中的箍筋屈服强度来计算的钢筋混凝土受扭构件中扭曲截面承载力设计值 T_u 的计算公式，即

$$T_u = 2\sqrt{\zeta} \frac{f_{yv} A_{cor} A_{st1}}{s} \tag{28}$$

为便于学生理解，此处需要特别强调钢筋混凝土受扭构件中扭曲截面承载力设计值是以变角度空间桁架模型中的箍筋拉力来计算的，而不是以纵向钢筋的拉力来计算。采用该公式计算时所得的剪力设计值会偏于安全，其目的就是要确保结构的安全。如果已知钢筋混凝土受扭构件中的剪力设计值 T_u，就可以用式(28)来计箍筋的横截面面积 A_{st1}。

利用式(28)开展工程设计时，变角度空间桁架中斜压杆的倾角 α 取值范围为 $3/5 \le \tan\alpha \le 5/3$，且配筋强度比 ζ 应当满足 $0.36 \le \zeta \le 2.778$。在得到矩形截面素混凝土构件和钢筋混凝土构件受扭矩 T 作用下的扭曲截面承载力设计值 T_u 的表达式之后，将两者组合即可得到基于变角度空间桁架模型的矩形截面、T 形截面、I 形截面纯扭构件受扭承载力的计算表达式。为便于学生的理解和掌握与应用，还需要分别讲解国家标准《混凝土结构设计标准》(GB50010-2010) (2024 年版)中推荐的计算公式[12]。

4.2.1. 矩形截面钢筋混凝土纯扭构件的受扭承载力

矩形正截面钢筋混凝土纯扭构件的横截面及其几何参数见图 5(b)，其扭曲截面的受扭承载力设计值 T_u 为

$$T_u = 0.35 f_t W_t + 1.2\sqrt{\xi} \frac{f_{yv} A_{cor} A_{st1}}{s} \tag{29}$$

式中 ζ 应当满足 $\zeta \ge 0.6$，通常 $\zeta = 1.2$，当 $\zeta > 1.7$ 时取 $\zeta = 1.7$，其余符号含义同前。

此处需要向学生特别说明，式(29)中第 1 项的常系数为 0.35，而素混凝土截面扭矩公式(9)中的系数为 0.7，此外式(29)中第 2 项的常系数为 1.2，而式(28)中的系数为 2。很显然式(29)中的系数取值较小，其原因在于式(29)中考虑了受扭构件中混凝土的抗扭作用，并且将 A_{cor} 取为箍筋内表面所围成的面积，同时还考虑了结构可靠度的要求，如此由式(29)计算得到的扭矩设计值会偏于安全。

从式(29)还可以看出，其中的第 1 项代表了素混凝土受扭构件的抗扭性能，而第 2 项则代表了钢筋的抗扭性能，因此钢筋混凝土受扭构件的抗扭承载力是由素混凝土和钢筋的抗扭性能共同构成，是两者抗扭设计值的组合。

4.2.2. 轴向受压和扭矩共同作用下的矩形截面钢筋混凝土纯扭构件的承载力

当矩形正截面钢筋混凝土构件受轴向压力 N_{ax} 和扭矩 T 共同作用时，其受扭承载力设计值 T_u 的表达式为

$$T_u = 0.35 f_t W_t + 1.2\sqrt{\xi}\frac{f_{yv}A_{cor}A_{st1}}{s} + 0.07\frac{N_{ax}}{A}W_t \tag{30}$$

与式(29)相比，式(30)中多出的第 3 项即代表了轴向压力 N_{ax} 所引起的扭矩。

在使用式(30)时，若轴向压力 $N_{ax} > 0.3f_cA$ 则取 $N_{ax} = 0.3f_cA$，A 为钢筋混凝土构件的正截面面积，其单位以 mm^2 计。

4.2.3. 箱形截面钢筋混凝土纯扭构件受扭承载力

对于具有箱形截面的钢筋混凝土受扭构件而言，其横截面见图 7 所示。

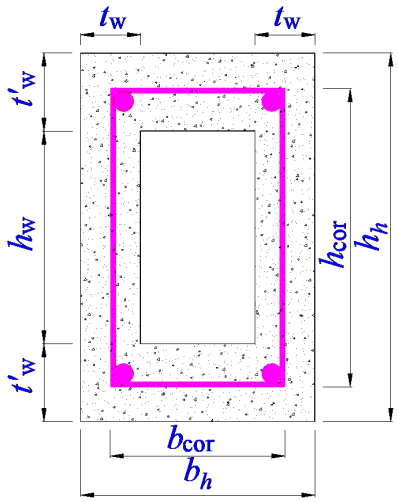

Figure 7. Box-shaped cross-section of torsional members
图 7. 受扭构件的箱形截面

图 7 中 b_h 和 h_h 分别为箱形截面的宽度和高度，而 h_w 为箱形截面的腹板净高度，t_w 和 t'_w 分别为箱形截面的壁厚，且 $t_w \le t'_w$，上述各几何尺寸的单位均以 mm 计。箱形截面钢筋混凝土纯扭构件受扭承载力的设计值 T_u 为

$$T_u = 0.35\alpha_h f_t W_t + 1.2\sqrt{\xi}\frac{f_{yv}A_{cor}A_{st1}}{s} \tag{31}$$

式中 α_h 为箱形截面壁厚的影响系数，其值为 $\alpha_h = 2.5t_w/b_h$，且需要满足 $t_w > b_h/7$。当 $\alpha_h > 1$ 时取 $\alpha_h = 1$。箱形截面钢筋混凝土受扭构件的塑性抵抗矩 W_t 为

$$W_t = \frac{b_h^2}{6}(3h_h - b_h) - \frac{(b_h - 2t_w)^2}{6}\left[3h_w - (b_h - 2t_w)\right] \tag{32}$$

式中各符号的含义同前。

4.2.4. T 形和 I 形截面钢筋混凝土纯扭构件受扭承载力

对于 T 形和 I 形截面的钢筋混凝土纯扭构件，可将其正截面划分为若干个矩形截面进行配筋设计。矩形截面的划分原则是使构件中的腹板截面保持完整，然后再划分受压翼缘和受拉翼缘的截面。T 形和 I 形截面钢筋混凝土构件的正截面及其几何尺寸以及矩形截面中腹板截面划分的方式见图 8。

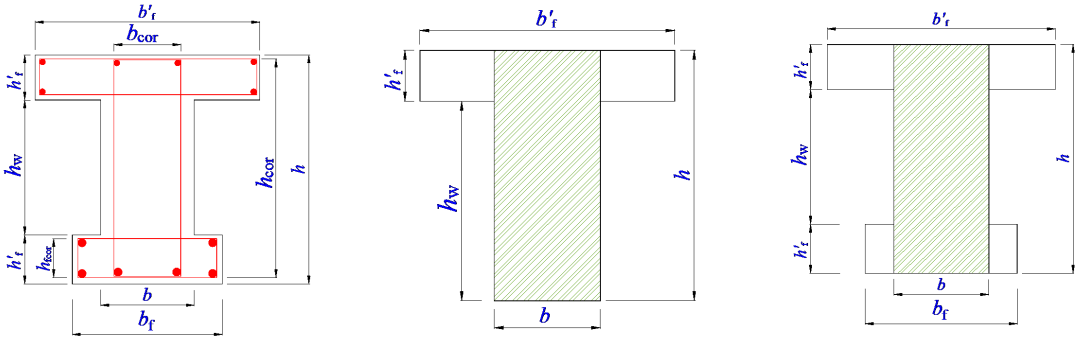

Figure 8. T-shaped and I-shaped cross-section and their divisions
图 8. T 形和 I 形截面及其截面划分

翼缘的宽度应满足 $b_f' \le b+6h_f'$ 和 $b_f \le b+6h_f$ 以及 $h_w/b \le 6$ 的要求。划分为各个矩形截面面积后就可以按照式(29)来分别计算各个截面的受扭承载力。此时需要考虑腹板和受压翼缘以及受拉翼缘各个截面的扭矩设计值，计算的原则是按照各个矩形截面的受扭塑性抵抗矩与截面总的受扭塑性抵抗矩的比值进行分配。各自的计算表达式分别为：腹板截面的扭矩设计值 $T_w=\left(W_{tw}/W_t\right)T$；受压翼缘截面的扭矩设计值 $T_f'=\left(W_{tf}'/W_t\right)T$；受拉翼缘截面的扭矩设计值 $T_f=\left(W_{tf}'/W_t\right)T$，此处 T 为整个截面所承受的扭矩设计值。W_t、W_{tw}、W_{tf}' 和 W_{tf} 分别为整个构件截面、腹板截面、受压翼缘截面和受拉翼缘截面的受扭塑性抵抗矩，各自的计算表达式又分别为：腹板矩形截面的受扭塑性抵抗矩 $W_{tw}=\left[b^2\left(3h-b\right)\right]/6$，受压翼缘矩形截面的受扭塑性抵抗矩 $W_{tf}'=\left[h_f'^2\left(b_f-b\right)\right]/2$，受拉翼缘矩形截面的受扭塑性抵抗矩 $W_{tf}=\left[h_f^2\left(b_f-b\right)\right]/2$。受扭构件截面总的受扭塑性抵抗矩 $W_t=W_{tw}+W_{tf}'+W_{tf}$。

5. 弯剪扭构件扭曲截面承载力的计算

以上讲解了素混凝土和钢筋混凝土纯扭构件的承载力计算方法。在工程中的混凝土构件和结构更多的是要受扭、剪和弯共同的作用。因此还需要向学生讲解此类构件的承载力。此处着重讲解《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2010) (2024 年版)中分别给出的受剪力和受扭矩共同作用下钢筋混凝土构件承载力的计算方法[12]。

5.1. 剪扭共同作用下矩形截面混凝土构件的承载力

在剪扭共同作用下矩形截面钢筋混凝土构件的受剪承载力和受扭承载力需要分别加以计算，两者的计算表达式为

1) 剪扭构件的受剪承载力

$$V_u=0.7\left(1.5-\beta_t\right)f_t bh_0+1.25\frac{f_{yv}A_{sv}}{s}h_0 \tag{33}$$

2) 剪扭构件的受扭承载力

$$T_u = 0.35\beta_t f_t W_t + 1.2\sqrt{\zeta}\frac{f_{yv}A_{st1}A_{cor}}{s} \tag{34}$$

式中 β_t 为剪扭构件混凝土受扭承载力的降低系数，其计算表达式和取值的范围为

$$0.50 \le \beta_t = \frac{1.5}{1+0.5\dfrac{VW_t}{Tbh_0}} \le 1.0 \tag{35}$$

对于受集中荷载作用下的独立钢筋混凝土受扭构件，当集中荷载对支座截面或节点边缘所产生的剪力值占总剪力值的比率超过 75%以上时，受剪承载力 V_u 按式(36)加以计算

$$V_u = \frac{1.75}{\lambda+1}\left(1.5-\beta_t\right) f_t bh_0 + \frac{f_{yv}A_{sv}}{s}h_0 \tag{36}$$

此时，构件的受扭承载力仍然按照式(34)计算，并且剪扭构件混凝土受扭承载力降低系数 β_t 的计算式可由式(37)来计算。

$$\beta_t = \frac{1.5}{1+0.2\left(1+\lambda\right)\dfrac{VW_t}{Tbh_0}} \tag{37}$$

式中 λ 为钢筋混凝土构件计算截面的剪跨比[13]-[16]。当 $\beta_t \le 0.5$ 时取 $\beta_t = 0.5$，当 $\beta_t \ge 1.0$ 时取 $\beta_t = 1.0$。

5.2. 剪扭共同作用下箱形截面混凝土构件的承载力

在剪扭共同作用下箱形截面钢筋混凝土构件的承载力也分为受剪承载力和受扭承载力，两者需要单独加以计算，相应的计算表达式为：

1) 剪扭构件的受剪承载力

$$V_u = 0.7\left(1.5-\beta_t\right) f_t bh_0 + 1.25\frac{f_{yv}A_{sv}}{s}h_0 \tag{38}$$

2) 剪扭构件的受扭承载力

$$T_u = 0.35\alpha_h\beta_t f_t W_t + 1.2\sqrt{\zeta}\frac{f_{yv}A_{st1}A_{cor}}{s} \tag{39}$$

式中 β_t 为箱形截面剪扭构件混凝土受扭承载力降低系数，其计算表达式为

$$\beta_t = \frac{1.5}{1+0.2\left(1+\lambda\right)\dfrac{V\alpha_h W_t}{Tb_h h_0}} \le 1.0 \tag{40}$$

对于受集中荷载作用下的独立箱形截面钢筋混凝土受扭构件，其受剪承载力仍然按照式(36)计算，而受扭承载力降低系数 β_t 则需要按照式(40)来计算。此外，对于受集中荷载作用下的箱形截面剪扭构件的受扭承载力仍需要按照式(39)计算，其中的截面塑性抵抗矩 W_t 则需要用 $\alpha_h W_t$ 来替换，而受扭承载力降低系数 β_t 则需要按照式(40)来计算。

5.3. 剪扭共同作用下 T 形和 I 形截面混凝土构件的承载力

对于剪扭共同作用下 T 形和 I 形截面混凝土构件的承载力，其包括了受剪承载力和受扭承载力。剪扭构件的受剪承载力按照式(33)或者按照式(36)进行计算。而对于剪扭构件的受扭承载力，可按照纯扭构件的计算方法进行计算，将其截面划分为若干个矩形截面，可分别按照式(34)加以计算。但计算中腹板为

剪扭构件，计算中应将 T 和 W_t 分别用 T_w 和 W_{tw} 替换。受压翼缘和受拉翼缘为纯扭构件，可按照矩形截面纯扭构件进行计算，计算中应将 T 和 W_t 分别以 T_w' 和 W_{tf}' 和 T_f 和 W_{tf} 替换。

根据工程经验和《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2020)的要求，矩形、T 形和 I 形截面钢筋混凝土构件配筋的一般原则是[12]：纵向钢筋应按照受弯构件的正截面受弯承载力和剪扭构件的受扭承载力分别计算所需要的钢筋横截面面积和相应位置进行配筋。箍筋应按照剪扭构件的受剪承载力和受扭承载力分别计算所需要的箍筋横截面面积，并在相应位置进行配筋。

此外，根据《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2020) (2024 年版)中的规定，在设计钢筋混凝土受扭构件时，对于受弯矩 M、剪力 V 和扭矩 T 共同作用的钢筋混凝土构件，需要根据以下条件来判断构件的承载状况：

(1) 当剪力 V 满足式(41)时可不考虑剪力对构件影响，此时仅按照受弯构件的正截面受弯承载力和纯扭构件扭曲截面受扭构件承载力分别加以计算。反之，当剪力 V 不满足式(41)时就需要考虑剪力对构件的影响。

$$\begin{cases} V \le 0.35 f_t b h_0 \\ V \le \dfrac{0.875 f_t b h_0}{1+\lambda} \end{cases} \tag{41}$$

(2) 当扭矩 T 满足式(42)时可不考虑扭矩对构件影响，可仅按照受弯构件的正截面受弯承载力和斜截面受剪承载力分别加以计算。反之，当扭矩 T 不满足式(42)时需要考虑扭矩对构件影响。

$$\begin{cases} T \le 0.175 f_t W_t \\ T \le 0.175 \alpha_h f_t W_t \end{cases} \tag{42}$$

6. 钢筋混凝土受扭构件的构造要求

以上讲解了钢筋混凝土构件在弯剪扭共同作用下承载力的计算方法。为正确应用上述方法开展混凝土受扭构件的配筋设计，还需要向学生讲解《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2020) (2024 年版)中对构件中钢筋配筋率的相关要求[12]。主要内容如下：

为防止受剪、扭和弯矩共同作用下钢筋混凝土构件出现少筋和超筋破坏，在《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2020) (2024 年版)中对受扭构件的纵向钢筋配筋率 ρ_{tl} 和箍筋的配筋率 ρ_{sv} 分别进行了规定。构件中纵向钢筋的最小配筋率 $\rho_{tl,\min}$ 需要按照式(43)加以计算，即

$$\rho_{tl} = \frac{A_{stl}}{bh} \ge \rho_{tl,\min} = \frac{A_{stl,\min}}{bh} = 0.6\sqrt{\frac{T}{Vb}}\frac{f_t}{f_y} \tag{43}$$

式中当 $T/(Vb) > 2$ 时取 $T/(Vb) = 2$。

而钢筋混凝土构件中箍筋的最小配筋率 $\rho_{sv,\min}$ 则需要式(44)的要求，即

$$\rho_{sv,\min} = \frac{nA_{sv1}}{bs} \ge 0.28\frac{f_t}{f_{yv}} \tag{44}$$

式中 n 为箍筋的肢数。A_{sv1} 为单肢箍筋的横截面面积，mm^2。

此外，为防止弯剪扭构件不出现超筋破坏，对受剪弯扭共同作用下的钢筋混凝土构件，其截面几何尺寸还应当满足如下要求：当 $h_w/b \le 4$ 或 $h_w/t_w \le 4$ 时，受剪扭构件的剪力 V 和扭矩 T 应满足

$$\frac{V}{bh_0} + \frac{T}{0.8W_t} \le 0.25\beta_c f_c \tag{45}$$

当 $h_w/b = 6$ 或 $h_w/t_w = 6$ 时，受剪扭构件的剪力 V 和扭矩 T 应满足

$$\frac{V}{bh_0}+\frac{T}{0.8W_t}\le 0.2\beta_c f_c \tag{46}$$

式中 β_c 为混凝土强度影响系数，当混凝土强度等级为 C50 时取 $\beta_c = 1.0$，当混凝土强度等级为 C80 时取 $\beta_c = 0.8$，其间可按照线性插值法求得[13]-[16]。当 $4 < h_w/b < 6$ 或 $4 < h_w/t_w < 6$ 时，应按照线性内插值法确定。f_c 为混凝土轴心抗压强度设计值。

对于在弯矩 M、剪力 V 和扭矩 T 共同作用下的钢筋混凝土构件而言，当剪力 V、扭矩 T 和轴心压力 N_{ax} 满足式(47)和式(48)时可不进行构件截面受剪扭承载力的计算，但需要按照构造要求配置纵向钢筋和箍筋。

$$\frac{V}{bh_0}+\frac{T}{W_t}\le 0.7 f_t \tag{47}$$

$$\frac{V}{bh_0}+\frac{T}{W_t}\le 0.7 f_t+0.07\frac{N}{bh_0} \tag{48}$$

式中 N_{ax} 为与剪力设计值 V 和扭矩设计值 T 相应的轴向压力设计值，当轴向压力 $N_{ax} > 0.3f_cA$ 时取 $N_{ax} = 0.3f_cA$，A 为钢筋混凝土构件的正截面面积，单位以 mm² 计。

7. 工程案例设计

在向学生讲解钢筋混凝土构件在受剪、扭和压共同作用下承载力的计算方法后，为便于学生的理解和掌握，可结合一个 T 形截面预制梁就其中纵向钢筋和箍筋进行计算和设计。在均布荷载作用下的 T 形截面钢筋混凝土预制梁，其截面尺寸见图 9 所示。

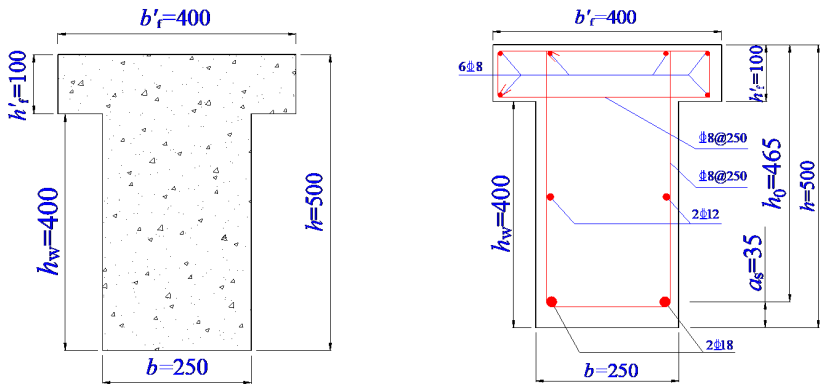

Figure 9. T-shaped beam (Unit: mm)
图 9. T 形截面梁(单位：mm)

已知 T 形梁所承受的弯矩设计值 $M = 70$ kN·m，剪力设计值 $V = 95$ kN，扭矩设计值 $T = 10$ kN·m。构件拟采用的混凝土强度等级为 C30，其轴心抗压强度设计值 $f_c = 14.3$ N/mm²，轴心抗拉强度设计值 $f_t = 1.43$ N/mm²。纵向钢筋和箍筋均采用 HRB400 级，纵向钢筋的抗拉屈服强度设计值为 $f_y = 360$ N/mm²，箍筋的抗拉屈服强度设计值为 $f_{yv} = 360$ N/mm² [10]-[16]，该结构的作用环境类别为一类，需要计算和设计 T 梁在受弯、受剪和受扭共同作用下的钢筋。

根据前文中讲解的过程和计算方法，计算该 T 形梁的承载力和设计钢筋的步骤如下：

步骤 1：验算构件截面尺寸

首先需要验算混凝土梁截面尺寸是否满足承载要求。根据工程经验，选取纵向钢筋合力作用点至截面边缘的距离 $a_s = 35$ mm，则梁截面的有效高度 $h_0 = h - a_s = (500 - 35)\text{mm} = 465\text{ mm}$，见图 9。将各个参数代入 4.2.4 小节中的公式可计算得到 T 形梁腹板截面、受压翼缘和构件截面总的塑性抵抗矩分别为 $W_{tw} = 1302.08\times10^4\text{ mm}^2$，$W_{tf} = 75\times10^4\text{ mm}^2$，$W_t = W_{tw} + W_{tf} = 1377.08\times10^4\text{ mm}^2$。由于 $h_w/b = 1.6 < 4$，故根据式(45)可得

$$\begin{aligned}&\frac{V}{bh_0}+\frac{T}{0.8W_t}=\left(\frac{95\times10^3}{250\times465}+\frac{10\times10^6}{0.8\times1377.08\times10^4}\right)\text{N/mm}^2=1.725\text{ N/mm}^2\\&<0.25\beta_c f_c=0.25\times1.0\times14.3\text{ N/mm}^2=3.575\text{ N/mm}^2\end{aligned}\tag{49}$$

由式(47)可得

$$\begin{aligned}&\frac{V}{bh_0}+\frac{T}{W_t}=\left(\frac{95\times10^3}{250\times465}+\frac{10\times10^6}{1377.08\times10^4}\right)\text{N/mm}^2=1.543\text{ N/mm}^2\\&>0.7 f_t=0.7\times1.43\text{ N/mm}^2=1.001\text{ N/mm}^2\end{aligned}\tag{50}$$

由式(49)和式(50)可得该 T 形构件截面尺寸满足承载要求，但需要配置钢筋。

步骤 2：分析扭矩和剪力对构件承载力的影响

其次需要分析剪力 V 和扭矩 T 是否对构件产生影响。根据式(41)和式(42)可得

$$V = 95\text{ kN} > 0.35 f_t bh_0 = 0.35\times1.43\times250\times465 = 58.18\text{ kN}\tag{51}$$

$$T = 10\text{ kN}\cdot\text{m} > 0.175 f_t W_t = 0.175\times1.43\times1377.08\times10^4 = 3.45\text{ kN}\cdot\text{m}\tag{52}$$

由式(51)和式(52)可得剪力和扭矩均会对该 T 形混凝土构件产生影响，因此需要考虑两者的作用。

步骤 3：计算纵向钢筋的横截面积 A_s

根据混凝土构件所承受的弯矩设计值 M，判断 T 形截面的类型[13]-[16]。由于

$$\alpha_1 f_c b'_f h'_f\left(h_0-\frac{h'_f}{2}\right)=1.0\times14.3\times400\times100\times\left(465-\frac{100}{2}\right)\text{N}\cdot\text{mm}=237\text{ kN}\cdot\text{m}>70\text{ kN}\cdot\text{m}\tag{53}$$

故该 T 形构件属于中和轴在翼缘内的第 1 类 T 形梁。由此计算纵向受弯钢筋的横截面面积 A_s。

第 1 类 T 形梁受弯构件的截面抵抗矩系数 α 为[13]-[16]

$$\alpha=\frac{M}{\alpha_1 f_c b'_f h_0^2}=\frac{70\times10^6}{1\times14.3\times400\times465^2}=0.056\tag{54}$$

则内力臂系数 γ_0 为[13]-[16]

$$\gamma_0 = 0.5\left(1+\sqrt{1-2\alpha}\right)=0.5\left(1+\sqrt{1-2\times0.056}\right)=0.971\tag{55}$$

纵向钢筋的横截面面积 A_s 为[13]-[16]

$$A_s=\frac{M}{f_y\gamma_0 h_0}=\frac{70\times10^6}{360\times0.971\times465}\text{mm}^2=430.6\text{ mm}^2\tag{56}$$

步骤 4：计算受剪和受扭钢筋的横截面面积

此部分内容计算和设计的步骤包括：

1) 计算 T 形构件腹板和受压翼缘承受的扭矩

T 形构件中腹板截面的扭矩为

$$T_w=\frac{W_{tw}}{W_t}T=\frac{1302.1\times10^4}{1377.1\times10^4}\times10\times10^6\ \text{N}\cdot\text{mm}=9.46\ \text{kN}\cdot\text{m} \tag{57}$$

受压翼缘截面承受的扭矩为

$$T_f'=\frac{W_{tf}'}{W_t}T=\frac{75\times10^4}{1377.1\times10^4}\times10\times10^6\ \text{N}\cdot\text{mm}=0.54\ \text{kN}\cdot\text{m} \tag{58}$$

2) 计算腹板的配筋

$$A_{cor}=b_{cor}\times h_{or}=200\times450\ \text{mm}^2=90000\ \text{mm}^2 \tag{59}$$

$$C_{cor}=2\left(b_{cor}+h_{or}\right)=2\times\left(200+450\right)\text{mm}=1300\ \text{mm} \tag{60}$$

① 计算受扭箍筋

由式(35)得

$$\beta_t=\frac{1.5}{1+0.5\dfrac{VW_{tw}}{T_wbh_0}}=\frac{1.5}{1+0.5\times\dfrac{95\times10^3}{9.46\times10^6}\times\dfrac{1302.1\times10^4}{250\times465}}=0.96 \tag{61}$$

取 $\zeta=1.2$，按照式(34)得

$$\begin{aligned}\frac{A_{st1}}{s}&=\frac{T_w-0.35\beta_t f_tW_{tw}}{1.2\sqrt{\zeta}f_{yv}A_{cor}}\\&=\frac{9.46\times10^6-0.35\times0.96\times1.43\times1302.1\times10^4}{1.2\times\sqrt{1.2}\times360\times9.0\times10^4}\text{mm}^2/\text{mm}=0.0752\ \text{mm}^2/\text{mm}\end{aligned} \tag{62}$$

由式(33)计算受剪的箍筋

$$\begin{aligned}\frac{A_{sv}}{s}&=\frac{V_u-0.7\left(1.5-\beta_t\right)f_tbh_0}{1.25f_{yv}h_0}\\&=\frac{95\times10^3-0.7\times\left(1.5-0.96\right)\times1.43\times250\times465}{1.25\times360\times465}\text{mm}^2/\text{mm}=0.153\ \text{mm}^2/\text{mm}\end{aligned} \tag{63}$$

腹板所需要的单肢箍筋总面积为

$$\frac{A_{st1}}{s}+\frac{A_{sv}}{2s}=\left(0.0752+\frac{0.153}{2}\right)\text{mm}^2/\text{mm}=0.1517\ \text{mm}^2/\text{mm} \tag{64}$$

选取箍筋直径为 8 mm 的 HRB400 级钢筋，其横截面面积为 50.3 mm²，得到箍筋的间距为

$$s=\frac{50.3}{0.1517}=331\ \text{mm} \tag{65}$$

取 $s=250$ mm。

② 受扭纵向钢筋钢筋计算

由式(27)得

$$A_{stl}=\frac{\zeta f_{yv}C_{cor}}{f_y}\frac{A_{st1}}{s}=\frac{1.2\times360\times1300}{360}\times0.0752\ \text{mm}^2=117.3\ \text{mm}^2 \tag{66}$$

腹板底面所需要受弯和受扭纵向钢筋的横截面面积为

$$A_s+A_{stl}\frac{\left(b_{cor}+2\times0.25h_{cor}\right)}{C_{cor}}=\left[430.6+117.3\times\frac{\left(200+2\times0.25\times450\right)}{1300}\right]\text{mm}^2=468.9\ \text{mm}^2 \tag{67}$$

可选取 2 根 Φ18 mm 的 HRB400 级钢筋，其横截面面积为 509 mm^2。

腹板两侧边所需要的受扭纵向钢筋的横截面面积为

$$A_{stl}\frac{\left(2\times 0.5h_{cor}\right)}{C_{cor}}=117.3\times\frac{\left(2\times 0.5\times 450\right)}{1300}\text{ mm}^2=40.6\text{ mm}^2 \tag{68}$$

选用 2 根 Φ12 的 HRB400 级钢筋，其横截面面积为 226 mm^2。

腹板顶面所需要的纵向钢筋的横截面面积为

$$A_{stl}\frac{\left(b_{cor}+2\times 0.25h_{cor}\right)}{C_{cor}}=\left[117.3\times\frac{\left(200+2\times 0.25\times 450\right)}{1300}\right]\text{mm}^2=38.3\text{ mm}^2 \tag{69}$$

选用 2 根 Φ8 的 HRB400 级钢筋，其横截面面积为 101 mm^2。

3) 受压翼缘配筋的计算

$$A'_{cor}=b'_{cor}\times h'_{or}=100\times 50\text{ mm}^2=5000\text{ mm}^2 \tag{70}$$

$$C'_{cor}=2\left(b'_{cor}+h'_{or}\right)=2\times\left(100+50\right)\text{ mm}=300\text{ mm} \tag{71}$$

① 受扭箍筋的计算

取 $\zeta=1.0$，按照式(29)得

$$\frac{A'_{st1}}{s}=\frac{T'_f-0.35f_tW'_{tf}}{1.2\sqrt{\zeta}f_{yv}A'_{cor}}=\frac{5.4\times 10^5-0.35\times 1.43\times 75\times 10^4}{1.2\times\sqrt{1.0}\times 360\times 5000}=0.076\text{ mm}^2/\text{mm} \tag{72}$$

选取箍筋为 Φ8 的双肢箍，强度等级为 HRB400 级钢筋，单肢的 $A'_{sv1}=50.3\text{ mm}^2$，则箍筋的间距为

$$s=\frac{50.3}{0.076}\text{ mm}=661\text{ mm} \tag{73}$$

取间距 $s=250$ mm。

② 受扭纵向钢筋计算

由式(27)得

$$A_{stl}=\frac{\zeta f_{yv}C'_{cor}A'_{st1}}{f_ys}=\frac{1.0\times 360\times 300\times 0.076}{360}\text{ mm}^2=22.8\text{ mm}^2 \tag{74}$$

选取 4 根 Φ8 的 HRB400 级钢筋，其横截面面积为 201 mm^2。

4) 验算腹板的最小箍筋配筋率

由式(44)得

$$\rho_{sv,\min}=0.28\frac{f_t}{f_{yv}}=0.28\times\frac{1.43}{360}=0.0011 \tag{75}$$

实际配筋率为

$$\rho_{sv}=\frac{nA_{sv1}}{bs}=\frac{2\times 50.3}{250\times 250}=0.0016>0.0011 \tag{76}$$

5) 验算腹板弯曲受拉纵向钢筋的配筋率

由式(43)得

$$\rho_{stl,\min}=\frac{A_{stl,\min}}{bh}=0.6\sqrt{\frac{T_w}{Vb}}\frac{f_t}{f_y}=0.6\times\sqrt{\frac{9.46\times 10^6}{95\times 10^3\times 250}}\times\frac{1.43}{360}=0.0015 \tag{77}$$

受弯构件纵向钢筋最小配筋率为

$$\rho_{s,\min}=0.45\frac{f_t}{f_y}=0.45\times\frac{1.43}{360}=0.0018<0.002 \tag{78}$$

故取 0.2%。

截面弯曲受拉边的纵向钢筋最小配筋率为

$$\begin{aligned}&\rho_{s,\min}bh_0+\rho_{stl,\min}bh\frac{\left(b_{cor}+2\times0.25h_{cor}\right)}{C_{cor}}\\&=0.002\times250\times465+0.0015\times250\times500\times\frac{\left(200+2\times0.25\times450\right)}{1300}\\&=293\ \text{mm}^2<509\ \text{mm}^2\end{aligned} \tag{79}$$

实际配筋为 2Φ18HRB400 级钢筋。

根据以上计算步骤得到的 T 形截面混凝土梁的配筋见图 9(b)所示，至此完成了该 T 形梁的配筋设计。

8. 讨论

通过上述的理论推导分别讲解了钢筋混凝土受扭构件扭曲截面承载力计算和受力钢筋配置的设计方法。实际上前文中的理论推导过程也就是设计和组织此部分内容的教学思路，即先讲解钢筋混凝土构件在扭矩作用下发生的扭转类型和受扭破坏的形态，由此引入钢筋混凝土构件在扭矩作用下发生适筋破坏、局部超筋破坏、超筋破坏和少筋破坏的概念。然后借助塑性力学中薄壁圆筒受剪时横截面剪力流的概念，分析和讲解矩形截面混凝土受扭作用时截面内剪力流的计算表达式，进而给出矩形截面素混凝土受剪承载力的计算方法。在讲解素混凝土受扭构件截面承载力的基础上，结合钢筋混凝土构件受扭破坏的形态，引入变角度空间桁架模型，选取变角度空间桁架模型中的一个侧壁作为隔离体，根据静力平衡条件和三角函数关系讲解计算隔离体中纵向钢筋和箍筋拉力的方法，并根据素混凝土和钢筋混凝土受扭构件扭曲截面承载力的叠加方法，讲解《混凝土结构设计标准》(GB/T50010-2010)中推荐的受扭剪弯共同作用下混凝土构件承载力的计算方法，并讲解受扭剪弯构件中钢筋最小配筋率的计算和构造要求。最后再结合一个受剪弯扭共同作用的 T 形截面梁案例，讲解受弯、受剪和受扭共同作用下该 T 形梁腹板、翼缘的承载力和钢筋的计算和设计过程，如此设计的教学思路遵循了由简单至复杂和由易入难的认知过程，可充分体现了“理论推演 + 标准应用 + 实践检验”的三维融合的教学理念，有利于学生对钢筋混凝土受扭构件承载力的理解和掌握，尤其是通过案例的讲解，可指导学生根据所讲解的步骤进行逐步的计算，帮助学生掌握计算过程和方法。

本部分教学内容中具有引导和启发学生进行创新思维的内容可以总结为 2 个方面：(1) 将受扭钢筋混凝土构件近似简化带有螺旋形斜裂纹压杆的变角度空间桁架模型，而将构件中纵向钢筋视为桁架的弦杆，箍筋视为桁架的腹杆。在分析纵向钢筋即弦杆的拉力时，每选取空间桁架中的一个侧壁作为隔离体进行分析，此时隔离体中纵向钢筋的拉力仅占未取为隔离体时构件中原纵向钢筋拉力的 1/2，因此相邻的两个侧壁中纵向钢筋的拉力之和就是原纵向钢筋的拉力。由于该知识点难以理解，需要在课堂讲解时向学生予以说明。(2) 在计算箍筋的拉力时，需要利用正切函数和余切函数的关系式，即利用 $\tan\alpha\cot\alpha=1$，并将其中的 $\tan\alpha$ 用图 6 中的几何关系得到的 $\tan\alpha=h_{cor}/s$ 代入，就实现了将箍筋的间距 s 引入到箍筋拉力的计算公式(22)中。在课堂讲解时需要向学生说明这种凑数的方法，使学生从中理解和掌握计算箍筋拉力中引入箍筋间距 s 的创新思维，有助于培养学生的创新意识。

此外，从钢筋混凝土构件受剪力、弯矩和扭矩共同作用下截面承载力的计算方法分析，构件在剪弯

扭共同作用下的承载力是以素混凝土和钢筋混凝土纯扭承载力为基础，分别计算受弯和受剪的承载力并结合受扭构件的承载力完成钢筋的设计。另外对于 T 形和 I 形截面混凝土梁而言，在计算截面受扭承载力时，需要划分矩形截面，划分时首先要保证 T 形和 I 形梁中腹板截面积的完整性，然后再计算受压和受拉翼缘截面的塑性抵抗矩，各个矩形截面的扭矩设计值需要按照各个矩形截面的受扭塑性抵抗矩与截面总的受扭塑性抵抗矩的比值进行分配的原则确定。这也是学生容易混淆和不能正确理解和掌握的知识点。在讲解时需要重点予以说明。

以上研究和总结了钢筋混凝土受扭构件扭曲截面承载力和配筋计算理论的教学组织和设计，为提高课程的教学质量，在教学过程中除了教师课堂讲授上述的知识点和方法而外，还需要引导学生积极参与到教学活动中。例如在讲授钢筋混凝土受扭构件的破坏形态时，在课堂上可随机抽点 2~3 名学生，让被抽到的学生在课堂上简述素混凝土和钢筋混凝土受扭破坏的 4 种形态，并解释哪些破坏形态是属于脆性破坏，哪些破坏形态是属于延性破坏，为什么在实际工程中要避免脆性破坏而采用延性破坏的结构等问题。还可以抽取部分学生让其讲述变角度空间桁架模型的含义和建立该模型的 4 个假设条件。又如在讲解式(25)的推导过程中，可结合式(25)随机抽取 2 名学生，让其讲解变角度 α 的取值问题，不仅能活跃课堂讲课的氛围，还可以引导学生主动参与课堂讨论，加深学生对教师所讲授知识的印象，进而促进学生对知识点的理解和掌握。

结合课堂教学的内容，教师还可安排随堂测验或发放问卷调查，要求全体学生在下课前用 5~10 min 完成，借以了解和考察学生对所讲授内容的理解与掌握程度。例如，在 2024 年向选修本课程的土木工程专业本科生讲授钢筋混凝土受扭构件扭曲截面承载力计算的表达式(28)和式(29)时，要求全体选修的学生在下课前 10 min 以书面答卷的形式回答什么叫混凝土受扭构件中纵向钢筋和箍筋的配筋强度比，其如何取值？从全部选修的 60 名土木工程专业学生所提交的答卷分析，98.6%的同学均能给出正确答案，由此也表明绝大部分同学能够理解和掌握该知识点。

此外，针对混凝土受扭构件承载力和配筋设计的教学内容，还需要布置相应的课程设计，其内容可涉及到地铁车站围护基坑稳定的桩顶冠梁、车站框架结构中的边梁、高架拱桥中的主拱、桥墩等。基于问题导向的学习(PBL)方法，通过设定课后的课程设计任务，使学生在课后结合教师课堂所用的讲义、教学参考书以及在线网络资源如中国大学 MOOC (西南交通大学 MOOC、湖南大学 MOOC 等)、百度、知网和 ChatGPT 等资源完成课程设计，并利用课程教学中建立的 QQ 群、微信群等与学生进行在线交流，及时解答学生在学习过程中遇到的问题，其目的在于督促和加深学生对所学内容中基本概念和基本原理以及计算方法的理解和掌握。教师则根据学生在课堂上的参与程度和学生课后完成课程设计的状况，及时对教学内容和方式进行补充、调整和完善，在课堂向学生进行讲评，进而提高课程的教学质量，引导学生理解和掌握钢筋混凝土受扭构件承载力和配筋设计的方法。

就文中总结的教学方法而言，还可以从以下方面开展研究。即为提高课程的教学质量，增加学生学习钢筋混凝土受扭构件扭曲截面承载力与配筋设计的兴趣和积极性，一方面可适当邀请国内从事地铁和轻轨结构设计和建造的专业人员来校向学生讲解地铁结构设计的过程和方法以及工程应用案例，并结合授课的内容，带领学生到成都地铁等在建的施工现场进行工程实践，参观和学习在建车站混凝土结构中钢筋的设置方法，通过工程现场的学习，加深学生对所学知识的感性认识，有利于增加学生的工程经验和拓宽学生的知识面；另一方面也需要研究在教学过程中引入人工智能技术如 ChatGPT、DeepSeek、虚拟仿真、工程案例的视频库、数字化教材以及教师与学生线上和线下互动等方式，充分利用微信、QQ 等网络视频和通讯工具，就学生在学习过程中对所遇到的问题进行在线交流与解答，帮助学生理解和掌握教学内容和相应的知识点，进而提高课程的教学质量和学生对课程内容学习的效果。

按照上述的教学设计和组织，在 2019 年~2024 学年间为我校土木工程和城市地下空间工程专业本科

生而开设的《地下铁道与轻轨》课程中进行了教学实践，通过对选修该课程学生学习效果的考核，约96.5%以上的学生均能正确理解和掌握钢筋混凝土受扭构件内受力钢筋配置的计算和设计方法，达到了课程教学大纲所要求的学生应掌握钢筋混凝土受扭构件配筋设计能力要求的教学目标，取得了良好的教学效果。

9. 结论

钢筋混凝土受扭构件扭曲截面承载力和钢筋的计算是《地下铁道与轻轨》课程中的重要教学内容和难点之一，由于此部分教学内容涉及变角度空间桁架模型和三角函数以及静力学平衡，并且讲授的内容包含较多的理论推导，因而教学内容具有符号多、理论推演多、公式多和计算多的“四多”特点，并且需要建立抽象的变角度三维空间桁架的概念，因而教学难度大。如何使学生理解和掌握此部分内容的理论推导过程与设计方法，是教师结合课程教学大纲对教学内容进行设计和研究的重点。本文结合对钢筋混凝土受扭构件受力钢筋设计和计算方法的教学实践，基于“理论推演 + 标准应用 + 实践检验”三维融合的教学理念，研究和总结了混凝土受扭构件中扭曲截面承载力和受力钢筋计算方法推演过程的教学设计，给出了基于问题导向学习(PBL)模式的教学实践和具体做法。现将课堂教学内容组织和讲解的思路总结如下：

(1) 课程讲解中首先使学生明确钢筋混凝土受扭构件的承载特点和扭转类型及其破坏形态。

(2) 基于钢筋混凝土受扭破坏的形态，分别讲解素混凝土和钢筋混凝土矩形截面纯扭构件承载力的基本概念和计算方法。

(3) 讲解将钢筋混凝土受扭构件简化为变角度空间桁架模型的假设条件和模型的组成，重点讲解选取空间变角度桁架模型中某一个侧壁作为隔离体来分析构件中纵向钢筋和箍筋拉力的计算方法，并给出了理论推演的方法，使学生理解和掌握借助平面静力平衡和三角函数性质来确定钢筋拉力计算方法的推演过程，同时结合混凝土结构设计标准、工程案例来讲授钢筋混凝土受扭构件配筋设计的基本过程和配筋的构造要求，便于学生领会和应用。

(4) 教学过程中还需要积极引导学生参与教学活动，使学生完成课堂互动和课后与教学内容相关的课程设计。例如在讲解中明确将钢筋混凝土受扭构件简化为变角度空间桁架模型、根据桁架模型计算箍筋拉力时应用正切和余切函数互为倒数的凑数法来引入箍筋间距以及根据箍筋的抗拉屈服强度作为受扭构件的扭矩设计值等可作为引导学生进行创新思维和拓宽知识面的切入点，有助于学生树立创新思维。

通过教学实践，上述的教学设计在课堂教学中能使学生更容易理解和掌握混凝土受扭构件承载力和配筋设计的基本概念、基本原理与计算方法，也有利于达到预期的教学目标，进而培养和提高学生分析和解决工程问题的能力，更有利于引导学生逐步树立创新的思维和意识。

基金项目

本文的研究得到四川省2021~2023年高等教育人才培养质量和教学改革项目“服务交通强国，聚焦智能建造”(JG2021-258)的支持，并得到了西南交通大学课堂教学与改革项目的支持。

参考文献

[1] 周晓军, 周佳媚. 城市地下铁道与轻轨交通[M]. 第2版. 成都: 西南交通大学出版社, 2016.

[2] 周晓军. 混合式教学法在《地下铁道》课程中的应用与效果评价[J]. 教育教学论坛, 2019(48): 176-177.

[3] 张庆贺, 朱合华, 庄荣. 地铁与轻轨[M]. 北京: 人民交通出版社, 2002.

[4] 秦力, 魏春明. 混凝土结构基本原理[M]. 北京: 机械工业出版社, 2016.

[5] 叶列平. 混凝土结构[M]. 第5版. 北京: 清华大学出版社, 2006.

[6] 许成祥, 张皓. 混凝土结构基本原理[M]. 北京: 机械工业出版社, 2016.

[7] 沈浦生, 梁兴文. 混凝土结构设计原理[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2020.

[8] 顾祥林. 混凝土结构基本原理[M]. 第 2 版. 上海: 同济大学出版社, 2011.

[9] 李乔. 混凝土结构设计原理[M]. 第 3 版. 北京: 中国铁道出版社, 2013.

[10] 宋玉普, 王清湘. 钢筋混凝土结构[M]. 北京: 机械工业出版社, 2015.

[11] 翟爱良, 郑晓燕. 钢筋混凝土结构计算与设计[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2002.

[12] 中国建筑科学研究院. GB50010-2010 混凝土结构设计标准(2024 年版) [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010.

[13] 周晓军. 钢筋混凝土偏心受拉构件正截面受力钢筋计算的教学设计与实践[J]. 教育进展, 2024, 14(11): 239-254. https://doi.org/10.12677/ae.2024.14112048

[14] 周晓军. 钢筋混凝土偏心受压构件正截面受力钢筋计算的教学设计与实践[J]. 教育进展, 2024, 14(11): 1427-1451. https://doi.org/10.12677/ae.2024.14112221

[15] 周晓军. 钢筋混凝土受弯构件斜截面承载力计算方法的教学设计和实践[J]. 创新教育研究, 2025, 13(2): 318-336. https://doi.org/10.12677/ces.2025.132122

[16] 李守巨. 混凝土结构常用公式与数据速查手册[M]. 北京: 知识产权出版社, 2015.