Creative Education Studies 创新教育研究, 2025, 13(5), 778-785
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2025.135401

基于案例的多元函数局部性质的对比教学法

王灯山[1]**，吴娟娟**[2*]

[1]北京师范大学数学科学学院，北京
[2]北京信息科技大学理学院，北京

收稿日期：2025年3月17日；录用日期：2025年5月22日；发布日期：2025年5月30日

摘　要

多元函数的局部性质是高等数学多元函数微积分板块的重要教学内容。本文围绕多元函数局部性质的教学内容，运用对比式的教学方法，结合可视化案例，探讨多元函数局部性质存在性及相互之间的关系，构建多元函数相关性质的知识体系。通过构造和分析若干二元函数特例，并借助数学软件绘制曲面图，将函数的曲面所展示出的不同特性可视化。可视化案例可以帮助学生将抽象知识具象化，同时为数学教学工作者提供课堂教学素材，提升教学效果。

关键词

多元函数，方向导数，偏导数，Maple软件

The Comparative Teaching Method of the Local Properties of Multivariable Functions Based on Cases

Dengshan Wang[1]**, Juanjuan Wu**[2*]

[1]School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing
[2]College of Applied Science, Beijing Information Science and Technology University, Beijing

Received: Mar. 17th, 2025; accepted: May 22nd, 2025; published: May 30th, 2025

Abstract

The local properties of multivariable functions are important teaching contents in the section of calculus of multivariable functions in advanced mathematics. This paper focuses on the teaching

[*]通讯作者。

文章引用: 王灯山, 吴娟娟. 基于案例的多元函数局部性质的对比教学法[J]. 创新教育研究, 2025, 13(5): 778-785.
DOI: 10.12677/ces.2025.135401

content of the existence of local properties of multivariate functions. By the comparative teaching method and based visual cases, this paper explores the relationships among the local properties of multivariable functions: the existence of limit, continuity, partial derivative and directional derivative of multivariate functions at a certain point, and constructs the knowledge system of the related properties of multivariate functions. By constructing and analyzing several special cases of binary functions, and with the help of mathematical software, this paper draws graphs of functions to show the different characteristics. Visual cases can help students to visualize abstract knowledge, and provide teaching materials for mathematics teaching staff to improve the teaching effect.

Keywords

Multivariate Functions, Directional Derivative, Partial Derivative, Maple Software

1. 引言

对比式教学法是现代教育教学方法的重要组成形式，适应于授课内容中具有概念相近、彼此联系却本质有别的知识点的课堂教学[1] [2]。对比式教学法通常以问题为驱动，通过回顾前序课程的相关知识点提出问题，有意识且具有技巧性地引导学生对相近、相似或相对的新旧知识点开展归纳、比较和总结[3]。对比教学法有助于减少学生零散记忆的负担，通过深入辨析知识点的共性和个性问题，在已有的知识架构上形成长时记忆中的图式，达到帮助学生掌握知识点，构建逻辑严谨的完备知识体系的教学效果。对比式教学法在各学科的教学过程中都有着广泛的应用，文献[4]运用 SWOT 分析法，指出案例对比式教学法能够满足应用型和创新型人才培养要求，是管理学教学的有效手段；文献[5]结合图表法、讲述法和实验法，将对比式教学法应用到物理教学中；文献[6]从变量设定、数据类型、运算和函数等方面阐述了 Python、C 和 Java 三种编程语言的区别和联系，并将其应用到教学实践中，使课程教学质量有了显著的提升。更多关于对比教学的研究，推荐读者参看文献[7]-[9]。

多元函数微分学的局部性质包括函数在某点处极限的存在性，连续性，偏导数的存在性，方向导数存在性和可微分等性质，这些性质共同刻画了多元函数的局部特征，他们相互之间既有联系又有本质的差别。在传统的高等数学教学模式中，课堂教学往往从严格的定义出发，通过严谨的证明和推导，得出相关定理和结论。这就需要学生既要克服抽象概念带来的认知困难，还要在复杂的逻辑推理中保持思路清晰，对知识体系有深度的理解。多元函数局部性质中，极限存在、偏导数存在、方向导数存在和可微等概念从字面相近，且计算过程中均有求导和极限形式出现，学生在学习过程中容易顾此失彼，陷入混淆不清的困境，难以掌握各个性质的内在含义和应用范畴。本文将围绕多元函数微分学的局部性质，通过对比教学法的课堂设计理念，结合典型的可视化案例，直观展现满足不同性质的函数曲面的特征，锻炼学生联想记忆和对比记忆，引导学生用辩证统一的观点理解多元函数微分学，建立多元函数微分学知识脉络，提升教学效果。

2. 对比式教学课堂设计

多元函数微分学局部性质的课堂教学采取问题导向方式，在方向导数的定义给定后，抛出问题——方向导数是否存在如何判定？进而引导学生思考包括方向导数在内的各个性质存在性之间的关系。授课

过程中遵循“提出问题(What)-如何解决(How)-倒推溯源(Which)-重点求证(why)-知识完善(Feedback)”的结构与主线，假设多个性质中只满足一个成立时，讨论其他性质是否满足，逐个探寻多元函数微分学的各个局部性质之间的关系，关系图如图 1 所示。

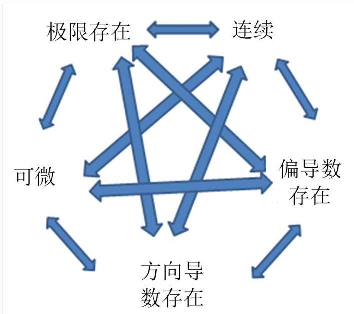

Figure 1. Design diagram for discussing relationships of differential properties of multivariate functions
图 1. 讨论多元函数微分学性质关系的设计图

3. 可视化案例

在本章中，我们将给出具体案例，每个案例构造的二元函数只满足局部性质中的某一个，在此前提下，讨论该函数其他性质的存在性。通过案例间的对比分析，借助数学软件画图，论证并直观展示了多元函数局部性质的存在性，及各性质间能否相互推导的关系图。

3.1. 案例一：多元函数二重极限存在

在本案例中，我们将构造二元函数 $f_1(x,y)$，此函数仅满足在某点处极限的存在，其他局部的性质均不满足，以说明函数极限存在并不能成为其他局部性质存在的充分条件。

考虑函数

$$f_1(x,y)=\begin{cases}1, & x^2+y^2=0,\\ 0, & x^2+y^2\neq 0.\end{cases} \tag{1}$$

显然 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0} f_1(x,y)=0$，故函数在原点处极限存在。由于 $f_1(0,0)=1\neq \lim\limits_{x\to 0,y\to 0} f_1(x,y)=0$，故函数在原点处不连续。由文献[10]第九章第三节可知，函数在原点处不可微。

以原点处沿着 x 轴方向的偏导数为例，根据函数偏导数的定义，

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0,y=0}\frac{0-1}{\Delta x}\to\infty.$$

故函数(1)在原点处沿着 x 轴方向的偏导数不存在。同理可证，在函数(1)在原点处沿着 y 轴方向的偏导数也不存在。

根据函数方向导数的定义，考虑函数在原点处任意方向 $\vec{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 上的方向导数，

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to 0}\frac{f_1(t\cos\theta,t\sin\theta)-f_1(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-1}{t}\to\infty.$$

函数在原点处任意方向的方向导数均不存在。

由此可知，多元函数极限存在是一个相对“较弱”的性质，反映了函数自变量以任意方式向某一点逼近时，函数值向某一个数值逼近，但此数值与函数在该点取值无关。因此，多元函数极限存在，不能

推出函数的连续性，也不能反应函数任意方向的变化率问题。

3.2. 案例二：多元函数具有连续性

在本案例中，我们将构造二元函数 $f_2(x,y)$，使其满足在某点处仅具备连续性，但在该点处，偏导数和任意方向的方向导数存在性都不满足。易知，函数在某点处连续是函数在该点极限存在的充分条件，因此在本案例及以下案例讨论中，若函数在某点处连续成立，函数极限的存在性自然成立，不再赘述。

考虑函数

$$f_2(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases} \tag{2}$$

当 $x\to 0, y\to 0$ 时，$\sqrt{x^2+y^2}\to 0$，考虑到 $\left|\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le 1$，故

$$\lim_{x\to 0,y\to 0} f_2(x,y)=\lim_{x\to 0,y\to 0}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=f_2(0,0).$$

因此函数(2)在原点处极限存在，且连续。考虑函数(2)在原点处沿着 x 轴方向的偏导数

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2}}}{\Delta x}=\pm\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{|\Delta x|},$$

该极限不存在，因此函数(2)在原点处对 x 的偏导数不存在，同理可证在原点处对 y 的偏导数也不存在。

考虑函数(2)在原点处任意方向 $\vec{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 上的方向导数，

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to 0}\frac{f_2(t\cos\theta,t\sin\theta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\sin\frac{1}{t}.$$

该极限亦不存在。因此函数(2)在原点处任意方向的方向导数均不存在。

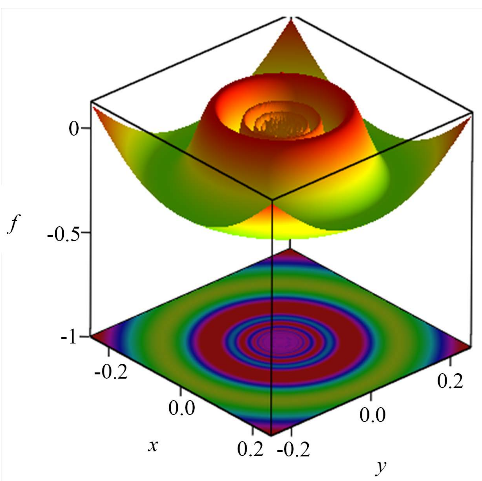

Figure 2. Graph of function (2)
图 2. 函数(2)图像

由此可知，多元函数连续性存在性并不能成为其任意的偏导数存在和任意方向的方向导数存在的充分条件。函数(2)的图像如图 2 所示，从投影图像直观可以看出，曲面在原点附近出现了剧烈的震荡，无法确定函数变化率的问题。

3.3. 案例三：多元函数偏导数存在

在本案例中，我们将构造二元函数 $f_3(x,y)$，使其仅满足在某点处两个方向的偏导数存在，但函数在该点的极限存在性、连续性和其他任意方向的方向导数存在性并不满足。

考虑函数

$$f_3(x,y)=\begin{cases}0, & xy\neq 0,\\ 1, & xy=0.\end{cases} \tag{3}$$

函数图像如图 3 所示。利用极限存在的定义，易知函数原点极限不存在。

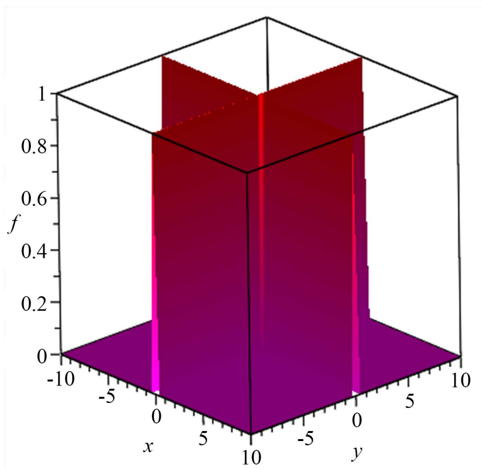

Figure 3. Graph of function (3)
图 3. 函数(3)图像

$$\left.\frac{\partial f_3}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_3(0+\Delta x,0)-f_3(0,0)}{\Delta x}=0.$$

因此函数(3)在原点处对于 x 的偏导数存在，同理可证，原点处对于 y 的偏导数也存在。函数(3)在原点处任意方向 $\vec{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 上的方向导数，

$$\left.\frac{\partial f_3}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to 0}\frac{f_3(t\cos\theta,t\sin\theta)-f_3(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-1}{t}\to\infty,$$

该极限亦不存在。因此函数(3)在原点处任意方向的方向导数均不存在。

由此可知，多元函数在某点的偏导数存在，只能反应函数在该点处沿坐标轴方向的变化率，而函数的极限存在需要考虑函数自变量在原点的邻域内，自变量任意方式向原点趋近时，函数值都向确定的值逼近，偏导数的存在并不能保证任意方向函数的性质。若函数偏导数存在，则可以说明函数沿着两个特殊方向方向导数存在(即 x 轴和 y 轴的正方向)，其他任意方向的性质并不能体现。

3.4. 案例四：多元函数任意方向的方向导数存在

在本案例中，我们将构造二元函数 $f_4(x,y)$，此函数在某一点处沿着任意方向的方向导数存在，但函

数在该点极限并不存在，因此函数的连续性和偏导数存在性也都不能保证。考虑函数

$$f_4(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases} \tag{4}$$

在原点邻域，当动点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 方向趋于原点时，

$$\lim_{(x,y)\to 0,y=kx}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

该极限值随着 k 值的变化而变化[10]，这与极限的存在唯一性矛盾。故函数(4)的在原点处极限不存在，也不连续。

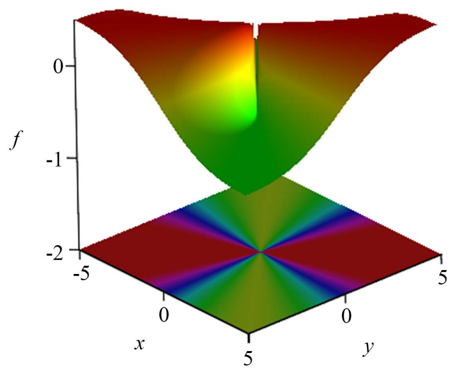

Figure 4. Graph of function (4)
图 4. 函数(4)图像

考虑到

$$\left.\frac{\partial f_4}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_4(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0.$$

因此，函数(4)在原点处的偏导数存在。考虑函数(4)在原点处任意方向 $\vec{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 上的方向导数

$$\left.\frac{\partial f_4}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to 0}\frac{f_4(t\cos\alpha,t\cos\beta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\cos\alpha\cos\beta}{t}=0$$

由此可知，多元函数极限任意方向的方向导数存在，并不能成为函数在某点处极限存在或者连续的充分条件。从图 4 中直观可以看出，当 $P(x,y)$ 沿着不同方向向原点趋近时，函数趋近不同的值，函数在原点处不连续，但用 $y=kx$ 平面去截曲面时，得到的直线总是平行于 xoy 平面的一条直线，因此各个方向的方向导数均为零。

为了进一步说明函数任意方向的方向导数存在，也不能保证偏导数存在的事实，我们考虑圆锥曲面

$$f_5(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{5}$$

在原点处，

$$\left.\frac{\partial f_5}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_5(0+\Delta x,0)-f_5(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

函数在原点处对于 x 的偏导数不存在，函数对于变量 y 偏导数的不存在性同理可证。考虑函数(5)任

意方向的方向导数

$$\left.\frac{\partial f_5}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2\cos^2\alpha + t^2\cos^2\beta}}{t} = 1.$$

因此，函数(5)在原点处沿任意方向的方向导数都存在且相等。

从几何直观而言，圆锥曲面是一条直线 $z = |x|$ 绕着 z 轴旋转而成的曲面，因此圆锥曲面的两个偏导数存在问题可以退化为在 zox 平面直线 $z = |x|$ 和 yoz 平面直线 $z = |y|$ 在原点处的可导性问题。偏导数反映了函数在特殊方向的增长率，是沿着坐标轴正方向的方向导数。注意到由于圆锥曲面是旋转曲面，其对称性使得各方向的方向导数均为两条直线的夹角的正切值，因此圆锥曲面各个方向的方向导数相等。在沿着两个坐标轴的正方向上，偏导数均等于方向导数，而在沿着两个坐标轴的负方向上，偏导数恰恰等于方向导数的相反数，这是导致圆锥曲面在原点处偏导数不存在的几何解释。

3.5. 案例五：多元函数可微

由文献[10]第九章第三节和第七节可知，如果函数 $z = f(x,y)$ 在原点可微，则函数在原点的某一邻域内，函数的全增量可表示为：

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$。由于 $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z = 0$，故函数在原点处连续。此时，考虑函数在原点处沿 x 方向的变化率问题，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{x\to 0, y=0}\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{Ax + o(x)}{x} = A,$$

因此，在原点处函数对 x 的偏导数存在，同理可证，在原点处函数对 y 的偏导数存在，且 $z_y(0,0) = B$。

另一方面，对于任意方向 $\vec{l} = (\cos\theta, \sin\theta)$，不妨设 $\Delta x = t\cos\theta, \Delta y = t\sin\theta, \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = t$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t} = f_x(0,0)\cos\theta + f_y(0,0)\sin\theta.$$

由此可知，函数在任意方向的偏导数均存在。图 5 显示了函数 $z = x^2 + y^2$ 曲面图像，从直观上看，多元函数可微在图像上表示函数曲面“光滑”，是函数其他局部性质存在的充分条件。

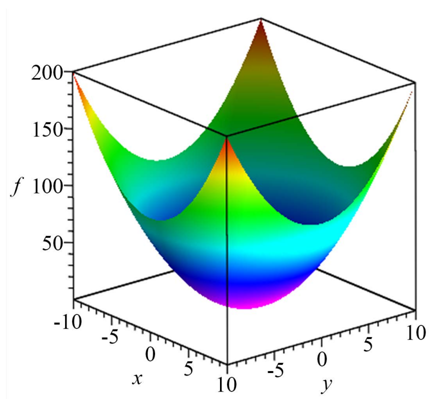

Figure 5. Graph of function $z = x^2 + y^2$

图 5. 函数 $z = x^2 + y^2$ 图像

综上所述，多元函数连续性、偏导数存在和方向导数存在相互之间并没有必然的联系，但他们都是多元函数微分存在的必要条件，通常可以通过反证法判定函数微分不存在。多元函数微分学相关性质之间的关系如图 6 所示。

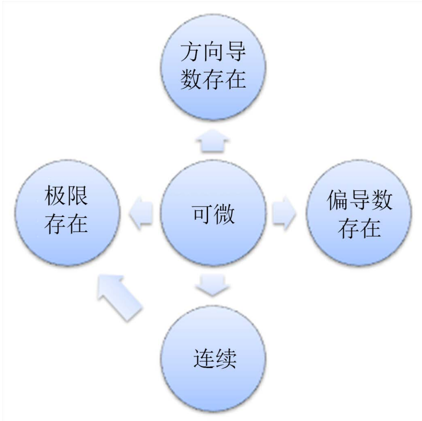

Figure 6. Relationships among the existence of differential properties of multivariate functions
图 6. 多元函数微分学的性质的存在性之间的相互关系

4. 小结

经过多年的课堂教学实践可以发现，案例对比教学法的授课方式，摒弃了传统平铺直叙的授课手段，学生通过思考前序知识，对后续定理合理的假设并论证，针对相近的概念进行对比思考，实现了知识结构的完整性和闭合性，自主学习和探索能力得到了很好的提升。同时，在教学过程中采用可视化案例，帮助学生直观地区别和理解多元函数微积分中相近的概念，在图像上的本质差别，在教学实践中得到了学生的认可，具备较好的推广意义。

基金项目

北京师范大学教学建设与改革项目：“适应拔尖人才培养的《数学分析》课程教学改革探索”；北京信息科技大学教学改革项目(2024JGYB45)。

参考文献

[1] 郑翔．对比式问题驱动教学法在通信原理课程中的应用实践[J]．科教导刊, 2020(35): 149-150.
[2] 季诺．高等数学课堂教学法的研究与创新[J]．河北能源职业技术学院学报, 2009, 9(4): 86-88.
[3] 汪志宏．高等数学教学中对比式教学法的应用探析[J]．科教文汇, 2012(1): 100-100, 116.
[4] 何朝林．基于案例的对比式教学法的 SWOT 分析[J]．价值工程, 2010, 29(11): 181-182.
[5] 刘在福．浅谈对比式教学法在物理教学中的应用[J]．甘肃联合大学学报：自然科学版, 2000(s1): 153-154.
[6] 李晶晶，王超，薛思敏．对比式教学法在程序设计类课程教学中的应用[J]．计算机教育, 2025(1): 184-187, 192.
[7] 朱贵宪．对比式教学法在计算机专业课程教学中的应用[J]．安阳工学院学报, 2021, 20(4): 108-110.
[8] 徐伶伶，王莹莹．对比法在操作系统教学中的应用[J]．计算机光盘软件与应用, 2014(14): 249, 251.
[9] 郑元叶．比较教学方法在高校思政课中的应用[J]．福建师大福清分校学报, 2018(6): 93-98, 103.
[10] 同济大学数学系，主编．高等数学(下册) [M]．第 7 版．北京：高等教育出版社, 2014.