

基于问题驱动的“函数的概念”教学设计研究

付依柔¹, 聂于清¹, 李新潮², 陈惠汝^{1*}

¹黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

²黄冈中学, 湖北 黄冈

收稿日期: 2025年4月1日; 录用日期: 2025年6月18日; 发布日期: 2025年6月26日

摘要

在传统概念教学中, 学生的参与程度较低、教师重记忆而轻理解、教学活动缺乏挑战性与趣味性, 导致学生对概念的理解不够深入。因此, 文章以“函数的概念”教学为例, 应用问题驱动教学法, 变被动接受为主动探究、以问题引导学生自主构建知识、借助问题情境帮助学生把握概念本质, 这种方式不仅顺应了学生的认知发展规律, 也贴合了知识本身的发展脉络, 有助于学生深刻理解和掌握函数的概念。

关键词

问题驱动, 函数的概念, 教学设计

Research on the Instructional Design of “Concept of Function” Based on Problem-Based Learning

Yirou Fu¹, Yuqing Nie¹, Xinchao Li², Huiru Chen^{1*}

¹School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

²Huanggang High School, Huanggang Hubei

Received: Apr. 1st, 2025; accepted: Jun. 18th, 2025; published: Jun. 26th, 2025

Abstract

In traditional conceptual teaching, students' participation is low, teachers emphasize memorization rather than understanding, and teaching activities lack challenge and interest, which leads to students'

*通讯作者。

文章引用: 付依柔, 聂于清, 李新潮, 陈惠汝. 基于问题驱动的“函数的概念”教学设计研究[J]. 创新教育研究, 2025, 13(6): 404-411. DOI: 10.12677/ces.2025.136456

lack of in-depth understanding of concepts. Therefore, this paper takes the teaching of “the concept of function” as an example, and applies the Problem-Based Learning to change passive acceptance into active exploration, guide students to construct knowledge independently with problems, and help students grasp the essence of the concept with the help of problematic situations, which not only conforms to the law of cognitive development of students, but also fits in the development of knowledge itself, and helps students to deeply understand and master the concept of function.

Keywords

Problem-Based Learning, Concept of Function, Instructional Design

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》(以下简称“课标”)中提到:“在教学活动中,应结合教学任务及其蕴含的数学学科核心素养设计合适的情境和问题,引导学生用数学的眼光观察现象、发现问题,使用恰当的数学语言描述问题,用数学的思想、方法解决问题,在解决问题的过程中,理解数学内容的本质,促进学生数学学科核心素养的形成和发展”[1]。问题驱动教学法强调在真实的问题情境中进行探究活动,将实际生活情境抽象为数学问题,从而更好地理解和运用数学知识解决问题。显然,这与课标中提出的要求是相一致的。课标中还指出:“函数作为现代数学中最基础的概念之一,是表达客观世界中变量间相互关系和规律的重要数学语言和工具,在解决各种实际问题中占据核心地位。函数概念构成了高中数学学习的基石”[1]。问题驱动教学法可以将抽象的函数概念具象化,有助于引导学生主动思考、促进学生深刻理解函数的概念,以及培养学生数学抽象、直观想象等数学核心素养。因此,本文尝试融入问题驱动教学法,以促进函数概念的有效生成。

2. 问题驱动教学法概述

以问题驱动的方式实施数学教学,其直接出处源自张奠宙等提出的关于数学教育的四条特有原则:数学化、适度形式化、问题驱动、提炼数学思想方法[2]。这四条原则当中,指向数学教学方式的就是问题驱动。问题驱动教学法是指教师根据学生的认知水平,在深入知识本质、知识历史发展脉络的基础上,将所学知识转化为一系列具有“本原性的、派生性的、启发性的、反映知识本质”的问题引领课堂教学[3]。这种方法强调以问题为学习的起点,不像传统教学那样先学习理论知识再尝试解决问题[4]。在课标指导下,问题驱动教学法不仅顺应现代教育的发展趋势,而且对于促进学生的全面发展及提升教育教学质量发挥着不可替代的作用。因此,教师应当积极探索并实践这一教学模式,为学生创造更多有意义的学习体验。将问题驱动教学法应用于数学概念的教学中,通过引入触及本质的问题或与生活紧密相关的问题情境,带领学生经历知识的生成过程,进而深化学生对知识的理解,培养学生的数学核心素养。

3. 教学设计

在高中数学中,函数占据了至关重要的地位,并发挥着极其重要的作用。函数贯穿了高中数学课程

始终，它不仅是研究方程、不等式、数列、导数等数学知识的基础，也在生物学、化学、物理学等多个学科领域有所应用。学生在初中阶段已经接触到了函数的概念，所以部分学生可能会产生疑问：“既然初中已经学过函数，为什么高中还要再学？”实际上，尽管初中与高中对函数的定义在本质上相同，但高中的定义展现出更为广泛的适用性。在初中阶段，函数的定义建立在“变量说”的基础之上；而到了高中，则采取更为深入的“集合-对应关系说”来界定函数。此外，高中阶段的定义还明确界定了函数的定义域与值域，并引入了更为抽象的符号 $f(x)$ ，从而增强了函数的表达力和精确度。

如图 1 所示，本节课采用问题驱动教学法，秉持着“问题主线，教师主导，学生主体”的模式。通过核心问题的导入引出本节课的课题，随后设置问题串联课堂，将学生置于充满挑战的问题情境中。在此情境下，学生需主动分析问题、探索规律并最终抽象出函数的概念，这一过程不仅深化了他们对函数概念的理解，还提升了他们的逻辑思维能力，培养了数学抽象、直观想象、逻辑推理等核心素养。

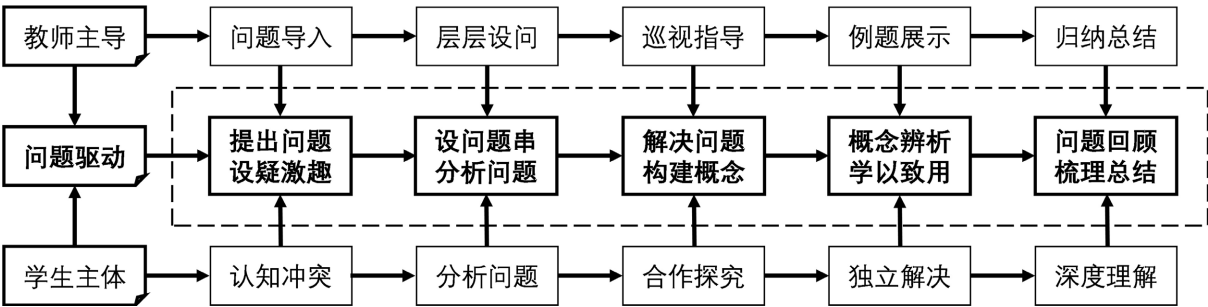


Figure 1. Diagram of the teaching model of problem-based pedagogy
图 1. 问题驱动教学法教学模式图

3.1. 提出问题，设疑激趣

在客观世界中，存在着多种多样的变化。以天宫二号的发射为例，其在升空过程中与发射点的距离会随着时间的推移而不断发生变化；某市的气温会随着时间的变化而变化；我国高速铁路营业里程逐年增加……请同学们也举出生活中的相关例子来体会变量间的对应关系，同时回顾初中学习的函数概念，并思考以下问题。

问题 1 如何用集合语言和对对应关系来刻画两个变量之间的关系？

设计意图 带领学生体会生活中变量的对应关系，并回顾初中函数的定义，既能帮助学生养成“温故而知新”的学习习惯，也能将初中函数概念作为先导材料，引发学生的认知冲突，激发他们的求知欲，带着问题进入课堂，为深入学习高中函数概念做好准备。

3.2. 设问题串，分析问题

问题 2 一辆高速列车准备从站点出发，一直加速到 350 km/h 后，维持这个速度匀速行驶 0.5 小时。若我们设列车运行的时间为 t (单位：h)，那么列车行进的总路程 S (单位：km) 与运行时间 t 的关系应该如何表示？

追问 1 S 是 t 的函数吗？对应关系如何表示？

预设回答 由于涉及两个变量 S 和 t ，当其中一个变量 t 取一个确定的值时，另一个变量 S 都会有且仅有一个确定的值与之对应。基于这种一一对应的关系，我们可以将后者看作是前者的函数。对应关系表示为 $S = 350t$ 。

追问 2 现在我们知道了两个变量间的对应关系，如果列车加速至 350 km/h 后行驶 2 h，那么行驶路

程就为 700 km。你认为这一表述是否准确呢？

预设回答 不正确，因为问题 2 中的条件是列车保持匀速行驶半小时，我们无法知道半小时以后的情况。

师生活动 教师评价学生的回答并总结，上述说法不正确，是因为没有关注到 t 的变化范围。

追问 3 S 与 t 的变化范围是什么？如何用更精确的语言表示 S 与 t 的对应关系？

预设回答 t 的变化范围是 $0 \leq t \leq 0.5$ ， S 的变化范围是 $0 \leq S \leq 175$ 。

师生活动 教师引导学生通过集合来表示 S 与 t 的变化范围， t 的变化范围是数集 $A_1 = \{t|0 \leq t \leq 0.5\}$ ， S 的变化范围是数集 $B_1 = \{S|0 \leq S \leq 175\}$ 。对于 A_1 中的任一时刻 t ，根据既定的对应关系 $S = 350t$ ，在 B_1 中总能找到一个唯一与之对应的 S 。

设计意图 创设问题情境，以激发学生的思维与认知碰撞，促使他们意识到既有概念的局限性。接着，利用集合来表示问题情境中的变量，让学生初步体验从集合角度理解函数概念，探究“变量说”与“集合-对应关系说”两者之间的内在关联。

问题 3 电气公司规定，工人每周的工作时间不少于 1 天，不多于 6 天。日薪为 350 元，且工资每周结算一次。在此情境下，我们是否可以认为工人的工资 ω 是其工作天数 d 的函数？若可以，又该如何表达这两者间的关系？

预设回答 学生给出的答案大部分可能都是 $\omega = 350d$ 。

师生活动 教师提示学生还可以用不同的表示方法，例如列表格的形式，学生完成表 1。

Table 1. Changes in workers' wages
表 1. 工人工资变化情况

工作天数/天	1	2	3	4	5	6
所得工资/元	350	700	1050	1400	1750	2100

追问 4 参照问题 2 中对 S 与 t 之间对应关系的精准表示，那我们如何以更精确的语言来界定 ω 与 d 之间的对应关系呢？

预设回答 d 的变化范围是数集 $A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， ω 的变化范围是数集 $B_2 = \{350, 700, 1050, 1400, 1750, 2100\}$ 。对于数集 A_2 中任意的 d ，根据既定的对应关系 $\omega = 350d$ ，在另一个数集 B_2 中总能找到一个唯一确定的 ω 与之相对应。

追问 5 问题 2 与问题 3 中的函数能够依据相同的映射规则来阐述，那么它们能否被认定为是同一个函数？另外，决定一个函数的要素又有哪些呢？

预设回答 问题 2 和问题 3 中的函数是同一个函数。

师生活动 教师引导学生发现这两个函数中变量的取值范围不同，所以不是同一个函数。师生共同总结出影响函数的要素有对应关系和两个变量的取值范围。

设计意图 问题 3 的目标是激励学生探索并采用多样化的方法来表达函数，从而为深入理解抽象的对应关系奠定基石。追问 4 则要求学生仿照问题 2 的表述方式，其目的在于加深他们对使用集合语言及映射关系来描述函数的理解，并在此过程中锻炼他们的抽象与概括技能。而追问 5 则进一步引领学生聚焦于函数中变量的具体取值范围，深化对函数概念的理解。

问题 4 图 2 描绘了北京市某一天空气质量指数 I 随时间 t 波动的图形表示。那么，我们如何利用这张图表确定这一天里任意时间 t h 的空气质量指数(AQI)的具体数值 I 呢？

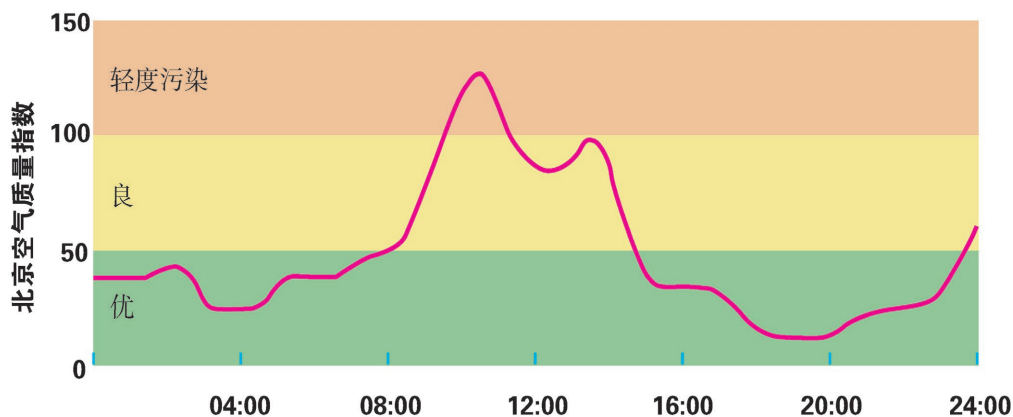


Figure 2. Beijing air quality change chart
图 2. 北京空气质量变化图

预设回答 在横轴上，过任意一点 t_0 作垂线，交曲线于 (t_0, I_0) ， I_0 就是唯一与 t_0 对应的值。

追问 6 你认为这里的 I 是 t 的函数吗？如果是，如何用精确的语言表示 I 与 t 的对应关系？

预设回答 根据图中的曲线可知， t 的变化范围是数集 $A_3 = \{t|0 \leq t \leq 24\}$ ，空气质量指数 I 都在数集 $B_3 = \{I|0 < I < 150\}$ 中。对于数集 A_3 中的任一个时间点 t ，根据该图中曲线所展现的对应关系，总能在数集 B_3 中找到唯一确定的 I 与之相对应。因此， I 是 t 的函数。

设计意图 这是从函数的解析式定义向基于变量间对应关系的定义转变的过程。问题 4 中的函数无法像问题 2 和问题 3 中的函数可以通过明确的解析式来表示，这一现象引发了学生的认知冲突，促使他们逐渐认识到并非所有的函数关系都能被解析式所涵盖。这种教学顺序与函数概念的历史发展顺序一致。此外，利用图像来揭示变量之间的关系，不仅能够直观地展现出变化规律，还能够有效渗透数形结合的数学思想，对于提升学生直观想象的数学核心素养大有裨益。

问题 5 国际上常用恩格尔系数 $r \left(r = \frac{\text{食物支出金额}}{\text{总支出金额}} \times 100\% \right)$ 作为衡量某地区居民生活质量的重要指

标，恩格尔系数越低，则居民的生活水平越高，从表 2 的数据中，我们可以清晰地观察到全省城镇居民生活质量的持续提高。现在，让我们基于表 2 中的对应关系来探讨一个问题：恩格尔系数 r 是否可以看作是年份 y 的函数？你会用什么方式刻画这个函数？

Table 2. Changes in the Engel coefficient
表 2. 恩格尔系数变化情况

年份 y	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
恩格尔系数 r (%)	32.0	30.1	30.0	29.7	29.3	28.6	27.7	27.6	29.2	28.6

预设回答 年份 y 的取值范围是数集 $A_4 = \{2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021\}$ ，恩格尔系数 r 的取值范围是数集 $B_4 = \{r|0 < r \leq 1\}$ 。对于数集 A_4 中的任意一个年份 y ，我们都可以依据表格中呈现的对应关系，在数集 B_4 中找到唯一确定的 r 与之相对应。所以， r 是 y 的函数。

设计意图 引导学生将对函数定义的理解从“变量说”转变为“集合-对应关系说”。问题 4 借助图像直观地展示了函数的对应关系，而问题 5 则通过表格的形式清晰地呈现了这种对应关系。通过采用多样化的展示方式，包括图像、表格等，能够引导学生更全面、深入地理解函数的不同表现形式，进而深化他们对函数概念的理解和掌握。

3.3. 解决问题，生成概念

问题 6 以上四个问题中的函数具有哪些共同的特征？你是否能根据这些共同特征来归纳出函数的概念？

师生活动 教师给出表格，学生先独立思考，再小组交流合作完成表 3，每小组派一名代表上台汇报成果。

Table 3. Comparative summary table of function characteristics

表 3. 函数特征对比总结表

问题情境	自变量的集合	对应关系	函数值所在的集合
问题 2	$A_1 = \{t 0 \leq t \leq 0.5\}$	$S = 350t$	$B_1 = \{S 0 \leq S \leq 175\}$
问题 3	$A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\omega = 350d$	$B_2 = \{350, 700, 150, 1400, 1750, 2100\}$
问题 4	$A_3 = \{t 0 \leq t \leq 24\}$	图 2	$B_3 = \{I 0 < I < 150\}$
问题 5	$A_4 = \{2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019\}$	表 2	$B_4 = \{r 0 < r \leq 1\}$

教师引导学生做好总结，结合具体情况进行评价，并归纳四个问题的共同特点：

- 1) 均包含两个非空数集，它们分别可以用集合 A 和集合 B 来表示；
- 2) 都具备一个对应关系，且对应关系的表达形式是多种多样的；
- 3) 对于数集 A 中的任意一个数 x ，根据对应关系，都能在数集 B 中找到唯一确定的数 y 与之相对应[5]。

教师总结 通过上述总结，我们知道对应关系可以通过解析式、表格、图像等形式来表示。除了前面已经提及的表示方法，为了更高效地表示这种对应关系，我们引入了一个专门的符号 f 来统一表示。接着给出函数的一般性定义：

一般地，设 A 、 B 是非空的实数集，如果对于集合 A 中的任意一个数 x ，按照某种确定的对应关系 f ，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应，那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作：

$$y = f(x), x \in A$$

其中， x 叫作自变量， x 的取值范围 A 叫作函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 值叫作函数值，函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 叫作函数的值域。

问题 7 请指出函数概念中的关键词和函数的三要素。

- 1) 解释关键词“任意”、“唯一”等所具有的实际意义。
- 2) 说明函数抽象符号 $f(x)$ 并不是唯一的，可用任意符号表示，例如 $g(x)$ 、 $h(x)$ 。
- 3) 指出函数的三要素：定义域、值域、对应关系。

设计意图 从生活实例(如列车行驶)过渡到符号化定义，符合皮亚杰的“同化与顺应”机制。通过让学生总结四个问题情境中函数的共同特点，从而引导学生抽象出函数的概念，带领学生经历从特殊到一般的转化过程。在这个过程中，可以有效培养学生的数学抽象能力和逻辑推理能力，同时也突出了从初中函数概念的基础出发，以集合 - 对应关系的角度重新定义函数这一教学重点。

3.4. 概念辨析，学以致用

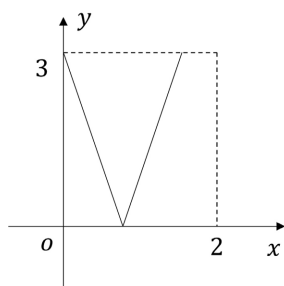
例 1 下列表达式中，哪些 y 是 x 的函数，并给出是或不是的理由。

- 1) $y = 2x^2 + 6$ ；
- 2) $xy = 9$ ；

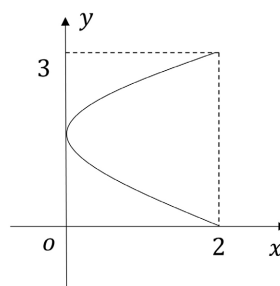
3) $y = \pm\sqrt{7x+2}$;

4) $y = \frac{2x}{7}$ 。

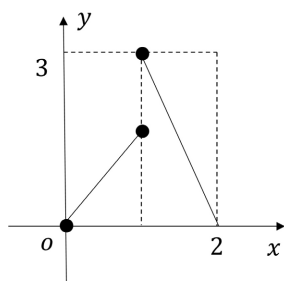
例 2 设 $M = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $N = \{y | 0 \leq y \leq 3\}$, 则下列图像中能够形成对应关系 $f: M \rightarrow N$ 的是()。



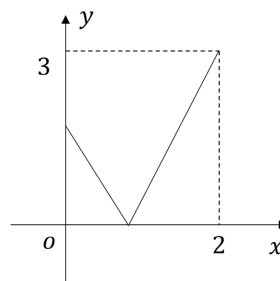
A



B



C



D

例 3 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x+7}}{3-x}$, $g(x) = x^2 + 2 (x \in \mathbb{R})$ 。

- 1) 求 $f(x)$ 的定义域;
- 2) 求 $f(2)$ 的值;
- 3) 求 $f(g(3))$ 的值。

设计意图 通过上述练习题, 让学生体验独立思考的过程, 促进学生的认知发展, 加深对函数三要素的理解, 从而进一步加强对函数概念的掌握。同时, 在这个过程中, 向学生渗透数形结合的数学思想, 帮助他们更好地理解函数的概念。

3.5. 问题回顾, 梳理总结

- 1) 现在请同学们描述一下如何用集合语言 and 对应关系来刻画函数概念?
- 2) 你能阐述初中所学的函数概念与高中函数概念之间的联系吗?
- 3) 函数的本质是什么?

设计意图 问题 1) 引导学生回顾本节课的核心问题; 问题 2) 使学生明确初高中函数概念的区别与联系, 巩固高中函数的概念; 问题 3) 增进学生对函数概念本质的深度理解与把握。

4. 结束语

问题驱动教学法更加注重在真实问题情境中逐步抽象出概念, 这种方法从单纯传递理论知识转向重视概念的生成过程, 有效地解决了学生主动性不足、对知识理解不够透彻、应用知识的能力欠缺等问题。

因此,本节课采用了问题驱动教学法,所有教学活动均围绕问题展开:首先,从核心问题入手,激发学生的认知冲突;其次,通过对四个具体问题情境的层层设问,逐步引导学生寻找解决问题的灵感和思路;再次,学生通过小组合作,总结四个问题的共同特征,从而抽象出函数的概念;最后,通过练习和总结环节,进一步巩固对函数概念的理解。构建“双主线问题链”教学模式,完成生活情境和数学抽象主线的统一,突破单一情境局限。这样的设计让概念的生成既自然又深刻。

综上所述,教师在进行教学设计时,可以围绕教学目标设计一系列具有挑战性的问题,夯实过程性的教学,引导学生在解决实际问题的过程中学习和应用数学知识,从而培养学生的探究精神和实践能力,帮助他们深入理解概念的本质,同时在学习过程中不断提升数学核心素养。

基金项目

2024年黄冈师范学院研究生工作站课题(5032024023);2024年度黄冈市教育科学规划课题(2024JB48)。

参考文献

- [1] 教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)[S]. 北京:人民教育出版社, 2020: 5.
- [2] 张奠宙, 宋乃庆. 数学教育概论[M]. 北京:高等教育出版社, 2023.
- [3] 杨海鹏. 基于问题驱动的高中函数概念教学设计研究[D]:[硕士学位论文]. 广州:广州大学, 2023: 8-9.
- [4] 李静, 王秀兰. 本原性问题驱动下的高等数学变式教学[J]. 数学教育学报, 2013, 22(6): 94-97.
- [5] 顾思敏. 高中函数概念的教学重构[D]:[硕士学位论文]. 广州:广州大学, 2020.