

“导、助、研”三位一体的线上线下混合式线性代数教学探究

刘素兵, 陈春梅, 彭司萍, 郝琳

火箭军工程大学基础部, 陕西 西安

收稿日期: 2025年4月22日; 录用日期: 2025年6月20日; 发布日期: 2025年6月30日

摘要

结合“线性代数”课程内容抽象性高、理论性强、应用性广等特点, 紧扣学生学习主动意识不强、学习能力不足及学而少用等现状, 构建了“导、助、研”三位一体的线上线下混合式教学模式, 实现了线性代数教学由“教”“学”融合式向“学”为主, “导”为辅的模式转变, 进一步提升了学生学习、思考、研究等综合能力, 体现了课程和课堂的育人功能。

关键词

线上线下混合式教学, 线性代数, 教学研究

Guidance, Assistance, and Research: A Tri-Integrated Exploration of Online-Offline Blended Teaching in Linear Algebra

Subing Liu, Chunmei Chen, Siping Peng, Lin Hao

Basic Course Department, The Rocket Force University of Engineering, Xi'an Shaanxi

Received: Apr. 22nd, 2025; accepted: Jun. 20th, 2025; published: Jun. 30th, 2025

Abstract

Given the highly abstract, theoretically intensive, and widely applicable nature of the “Linear Algebra” course content, along with addressing current challenges such as students’ weak proactive learning awareness, insufficient learning capabilities, and limited application of acquired knowledge, a tri-integrated online-offline blended teaching model centered on “guidance, assistance, and research” has been developed. This model shifts the teaching paradigm from a “teaching-learning”

文章引用: 刘素兵, 陈春梅, 彭司萍, 郝琳. “导、助、研”三位一体的线上线下混合式线性代数教学探究[J]. 创新教育研究, 2025, 13(6): 624-632. DOI: 10.12677/ces.2025.136484

integrated approach to a student-centered learning framework supplemented by guided instruction. It further enhances students' comprehensive abilities in learning, critical thinking, and research, while emphasizing the educative role of both curriculum and classroom practices.

Keywords

Online-Offline Blended Teaching, Linear Algebra, Teaching Research

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

线性代数课程是我校各专业科学文化模块的一门必修课，不仅是后续模块课程学习的先导课程，为其提供必须的知识基础和数学工具，也为学生熟悉数学的工程应用方法、提高数学素养和培养科学思维具有重要的作用。线性代数课程具有高度抽象、理论性强、计算繁杂等特点[1] [2]，对于这门课程来讲，在教学过程中，如何结合课程特点、运用信息化技术开展教学改革，让学生更好地理解、掌握线性代数的概念、定理和计算方法，并培养其严谨的数学思维，提升综合创新能力，增强运用理论知识解决实际问题的能力，并服务于社会发展，是十分值得关注和研究的问题。

线性代数教学团队，在新时代军事教育方针指引下，遵循“以学生为中心”，落实“立德树人、为战育人”的根本任务，结合“线性代数”课程内容抽象性高、理论性强、应用性广等特点，紧扣学生学习主动意识不强、学习能力不足及学而少用等现状，构建了“导、助、研”三位一体的线上线下混合式教学模式，实现线性代数教学由“教”“学”融合式向“学”为主，“导”为辅的模式转变，提升学生学习、思考、研究等综合能力，体现课程和课堂的育人功能。

2. “导、助、研”三位一体的线上线下混合式教学模式的构建

建构主义学习理论强调，知识获取是学习者在教师引导下基于已有经验主动建构意义的过程[3]-[5]。该理论指出，学生通过对外部信息的自主加工与认知重组而形成知识体系，当遭遇认知冲突时，会启动经验迁移与问题解决机制。基于维果茨基的最近发展区理论[6]，教师需通过搭建认知脚手架实现潜在发展水平向现实发展水平的跨越，这要求教师角色从知识传递者转变为意义建构的促进者，通过设计问题情境、组织协作对话等策略，引导学生实现认知图式的进阶发展。因此，这就要求教师角色从知识的传递者转变为意义建构的促进者，通过搭建认知脚手架、设计问题情境、组织协作对话等策略，引导学生实现从现有认知图式向新知识结构的进阶发展。

基于认知负荷理论[7]，教学设计需注重工作记忆容量的有限性。因此，在《线性代数》课程教学中，采用模块化分解的策略呈现知识，即将复杂知识体系拆解为符合认知加工规律的微知识单元，通过 MOOC 资源的差异化供给降低外在认知负荷，同时利用问题链设计提升关联认知负荷的投入效率。在这一理论框架指导下，团队开展线上线下资源的整合设计，为开展线上线下混合式教学模式奠定了基础。

融合上述理论，我们秉承“以学生为中心、以教师为主导”的教学理念，有效融合课前、课中、课后三个环节，以教学内容相关知识为珠，以具体计算问题为线，以实际问题的应用为驱，构建了“导、助、研”三位一体的线上线下混合式教学模式，如图 1 所示。通过导学、助学和研学三个环节，来促进学生在教师的引导下主动建构知识，该模式遵循“双主”教学原则，既强调学生的主体建构地位，也重视教

师的主导调控作用。在课前导学环节，通过任务驱动引导学生认知定向；课中助学环节运用社会建构主义对话机制，通过师生协作解构知识难点；课后研学环节依据情境认知理论，在真实工程案例中实现知识迁移，提升工程应用能力。

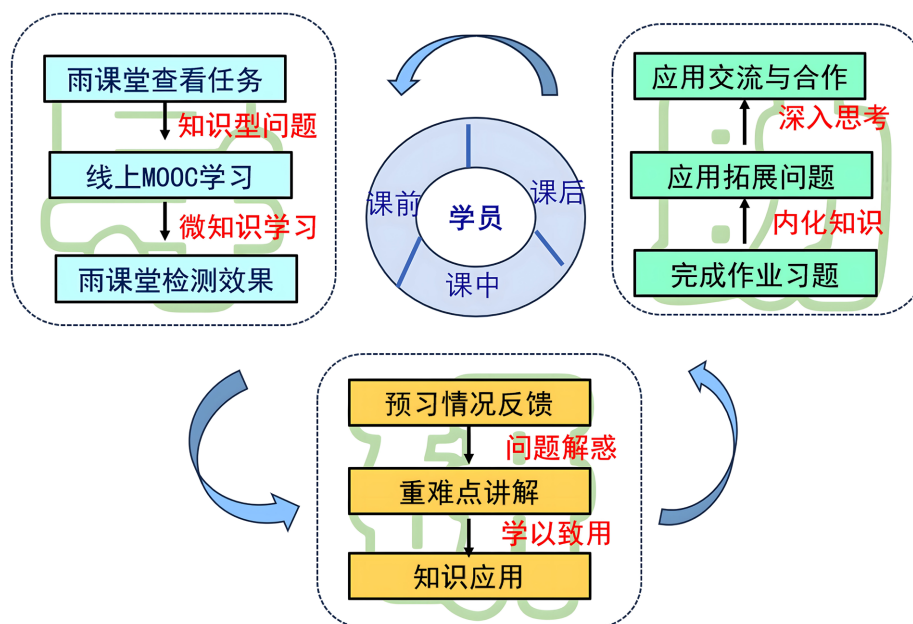


Figure 1. Guidance, assistance, and research: A tri-integrated exploration of online-offline blended teaching in linear algebra
图 1. “导、助、研”三位一体的线上线下混合式教学模式

课前导学环节，按照任务驱动、自主学习、效果评估的分层递进设计，从而引导学生有目的的学习。首先，课前教师提供学习资源，依托雨课堂平台发布导学任务，通过问题链引导认知定向，开展学生自主预习；其次，基于认知负荷理论将核心知识点解构为微知识单元，并嵌入 MOOC 资源，支持学生根据个体认知开展差异化学习；最后，通过雨课堂测试反馈，帮助教师识别学生的认知盲区，为课中教学提供支撑。

课中助学环节，针对学生预习情况反馈，有针对性地解决问题，特别是解决重难点问题，老师助力学生对知识的深入理解。首先，基于预习数据精准定位学生的学习盲区，并对基础性、中等难度问题为学生答疑解惑；然后，针对重难点问题，采用阶梯式问题链的方式进行拆解，辅以精讲。在此过程中，教师要注重充分调动学生学习的积极性，引导学生进行深入分析和探究，并借助雨课堂即时反馈练习进一步深化理解；最后，引入工程应用案例，开展小组研讨、交流，充分发挥学生主动性，形成师生、生生之间有意义的互动交流讨论式，引导学生主动建构知识，在已有认知结构基础上不断更新，这充分体现了建构主义学习理论的教学形式。

课后研学环节，强调以课后的拓展应用，提升学生解决实际问题的应用能力，即以研拓能。主要采用巩固、迁移、创新三阶的递进策略实现。首先，通过难度梯度不同的习题训练，夯实运算技能与概念理解，完成知识巩固层目标；然后，设计具有学科交叉特征的高阶迁移任务，如工程应用案例、军事应用案例，如针对线性代数中的特征值、特征向量知识点，设计离散动力系统的长期行为分析的工程应用案例[6]；针对矩阵运算，设计了导弹飞行过程中不同坐标系间的转换问题[6]等。通过对这些案例的学习和研讨，引导学生在工程案例建模、军事应用案例等真实情境中实现认知内化；最后，以协作式问题研讨为载体，组织跨学科应用交流活动，通过同伴互评、方案迭代等社会化学习机制，激发批判性思维与

创新性解决问题的能力发展。课后延伸实际问题解决项目，实现知识迁移创新。课后整个环节，助力学生对工程应用、军事应用问题的研究，从而增强学习能力并解决学而少用的问题。

教学团队按照“导、助、研”三位一体的线上线下混合式的教学模式，也同步设计了课前导学、课中助学和课后研学教学活动方案，借助大学数学混合式教学平台和雨课堂为技术支撑，将信息化教学手段与传统教学手段如讲授法、演示法、练习法、讨论法有机结合，从而形成了互动教学、形成了“学-练-用”深度循环。

3. 教学设计案例

以线性代数课程的 5.2 节方阵的特征值与特征向量[8]为例，进行“导、助、研”三位一体的线上线下混合式教学的设计。

3.1. 教学目标

知识目标，能阐述特征值与特征向量的定义及性质；掌握方阵特征值与特征向量的计算方法；会描述特征值与特征向量的相关应用。

能力目标，能通过归纳总结和逻辑推理逐步建立特征值与特征向量的概念和性质；能利用 MATLAB 等科学计算软件实现矩阵的特征值与特征向量的计算；会通过数学建模的方法利用特征值与特征向量理论解决实际问题。

价值目标，树立学生大胆严谨、不断完善的科学探究精神和辩证唯物主义思想；提升学生的创新精神，树立将特征值与特征向量理论与科学前沿相结合、不断创新解决新问题的理想和决心。

3.2. “导、助、研”三位一体的线上线下混合式教学的设计

3.2.1. 课前导学环节

1) 教师发布线上学习视频(线性代数第五章第 3~4 讲)

2) 教师发布课前导学的预习卡片、mooc 视频和自测题

紧扣教学重难点，设计了线上的二个导学任务，任务一，指挥与技术人才融合问题；任务二，导学测试题。

课前导学，旨在培养学生主动学习意识、聚焦学习任务、提升学习能力。

针对任务一，学生反馈情况，如下：

问题 1 结果：记 t 年后指挥人才和技术人才占比分别为 x_t 和 y_t ($t = 0, 1, 2, \dots$)，且

$$\alpha_{t-1} = \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix}, \alpha_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \frac{11}{12} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{12} & \frac{35}{36} \end{pmatrix},$$

则前后两年人才交流关系的矩阵表示为： $\alpha_t = A\alpha_{t-1}$ ；

问题 2 结果：(1) 当 $\alpha_0 = (1/4, 3/4)^T$ 时，有 $\alpha_{13} = A^{13}\alpha_0 = \alpha_0 = (1/4, 3/4)^T$ ；(2) 当 $\alpha_0 = (1/5, 4/5)^T$ 时，有 $\alpha_{13} = A^{13}\alpha_0 = ?$ 学生未算出结果。

老师对学生完成导学任务一、二所反馈的问题，总结为三个问题：

(1) $Ax = \lambda x$ 中 λ 和 x 是什么？即特征值、特征向量的定义。

(2) $Ax = \lambda x$ 中 λ 和 x 怎么求？即特征值、特征向量的计算。

(3) 如何用 $Ax = \lambda x$ 解决问题？即特征值、特征向量的应用。

3.2.2. 课中助学环节

课中环节，基于学生课前导学反馈情况和产生的问题进行课中教学设计。

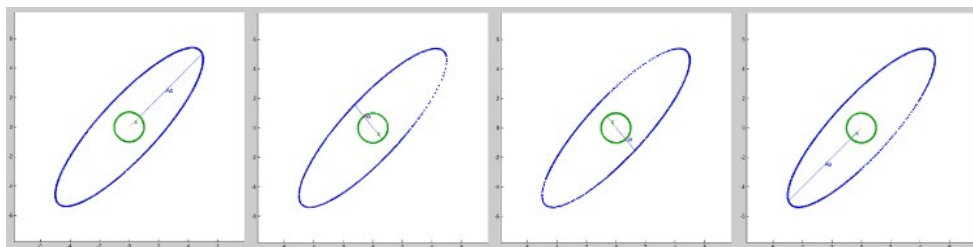
1) 问题驱动，直击定义

对于特征值特征向量概念的理解，通过 PBL 教学，不断设问，启发学生运用矩阵运算和线性变换的知识，在教师引导和学生协作下解决特征值与特征向量概念的建立和理解问题。

① 借助 MATLAB 软件，通过数形结合的方式，揭示特征值与特征向量的几何意义，将抽象的代数概念可视化与形象化，使学生在低维空间形象地理解概念的内涵，再适时引导，拓展到高维空间，从而跨越抽象的障碍，并提升学生思维的广度和深度。

设计问题链，如下：

课堂设问 1：利用 MATLAB 中的函数“eigshow”演示以 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ 为变换矩阵的线性变换，你认为哪些向量为“特殊的向量”？



课堂设问 2：如何用代数关系表示“特殊向量”？

通过问题 1 和 2，逐步构建问题链，并引导学生进行分析，得出存在非零向量 x ，使得关系式 $Ax = \lambda x$ 成立。从而引出特征值、特征向量的概念。

② 引导学生从多个维度对定义进行认知和理解。具体过程如下：引导学生从代数角度分析定义中的条件和结论，强调定义中的两个关键点： A 为 n 阶方阵、 x 为非零向量；

③ 设计雨课堂练习，直击定义，使学生从矩阵运算角度深化定义认知，强调定义中的特征值与特征向量的两个对应：同一特征值对应无穷多个特征向量，但同一特征向量对应同一特征值；

练习 1 已知 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ ，则下列哪个向量为 A 的特征向量()。

- A. $\alpha = (5, 4)^T$ B. $\beta = (-1, 5/4)^T$
C. $\gamma = (-4, 5)^T$ D. $\eta = (1, 1)^T$

2) 化归转化，破解计算

针对特征值、特征向量的计算，以“化归转化”为思维主线，结合课前导学产生的问题，探索特征值与特征向量的计算方法，将特征值的计算转化为行列式 $f_A(\lambda) = |A - \lambda E|$ 的计算上，将特征向量的计算转化为齐次线性方程组求非零解的问题上，即求 $(A - \lambda E)x = 0$ 的基础解系。引导学生总结出求特征值与特征向量的求解步骤，如下：

Step1: 求特征多项式 $f_A(\lambda) = |A - \lambda E|$ ；

Step2: 求特征方程 $f_A(\lambda) = 0$ 的根；

Step3: 求 $(A - \lambda E)x = 0$ 的基础解系。

针对 2 阶、3 阶方阵 A ，求其特征值、特征向量，可以按照上述步骤进行笔算，而对于高阶复杂矩阵的特征值与特征向量的计算，则利用 MATLAB 软件辅助实现，提升学生复杂计算能力和重点知识的攻关

能力。

MATLAB 提供了内置函数 `eig`，可用于计算方阵 A 的特征值、特征向量[9]，调用格式为：

$$[V, D] = \text{eig}(A);$$

其中， A 为待求的矩阵，矩阵 D 的对角元是矩阵 A 的特征值，矩阵 V 的列向量是各个特征值对应的特征向量。特别要注意特征值与特征向量的顺序要对应一致。

3) 观察猜想，启发探究

针对特征值、特征向量的性质，基于课前导学测试题和课堂典型例题，启发学生通过观察特征值、特征向量、矩阵之间的关系，大胆猜想 n 阶矩阵特征值与特征向量的性质，再与学生共同协作小心求证猜想的正确性，注重学生的参与度，加深学生对性质的理解。采用“问题驱动式 + 研讨式 + 启发式”教学方法，在整个问题的探究和剖析过程中，充分启发学生思考的积极性和主动性，凸显以学为中心的教学理念。

例题：已知矩阵 A, B, C ，使用 MATLAB 求各矩阵的特征值，并观察其与矩阵的关系。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

观察结果： A 的特征值为 $-1, 2, 3$ ，则有 A 的特征值之和等于 A 的主对角线之和； $|A| = A$ 的特征值之积。

B 的特征值为 $5, 1, -1$ ，则有 B 的特征值之和等于 B 的主对角线之和； $|B| = B$ 的特征值之积。

C 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$ ，而 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 = C$ 的主对角线之和； $|C| = -4 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ 。

启发学生从具体例子和特殊的结果，大胆猜想一般结论：

猜想：设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的 n 个特征值，则

$$(1) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \triangleq \text{tr}(A).$$

$$(2) \quad \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |A|.$$

引导学生分析特征值结论的猜想本质为一元 n 次方程根与系数的关系，进而对猜想小心求证；带领学生总结成果，建立特征值的性质。

4) 解决问题，学有所用

针对导学任务中的指挥与技术人才融合案例，解决应用问题，让学生感到学有所用。其中教师发挥引导作用，可以将问题分解为几个小问题，例如讨论模型如何建立、求解目标是什么、求解思路如何确定、如何具体计算等，并通过开展小组研讨、交流，充分发挥学生主动性，形成师生、生生之间有意义的互动交流讨论式。具体为：

数学模型：前后两年人才交流关系模型为 $\alpha_i = A\alpha_{i-1}$ ， $\alpha_{i-1}, \alpha_i, A$ 的含义与任务一中对应相同；

求解目标：已知 $\alpha_0 = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)^T$ ，计算 α_{13} ；

求解思路：判断 A 的特征向量的线性相关性，再利用特征值与特征向量转化求解目标；

问题结果： A 有两个不同特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{8}{9}$ ；对应 2 个线性无关的特征值向量为

$$p_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)^T, p_2 = (1, -1)^T$$

表示 α_0 并计算 α_{13} ，有 $\alpha_0 = p_1 - \frac{1}{20}p_2$ ，

$$\begin{aligned}\alpha_{13} &= A^{13}\alpha_0 = A^{13}\left(p_1 - \frac{1}{20}p_2\right) = A^{13}p_1 - \frac{1}{20}A^{13}p_2 \\ &= \lambda_1^{13}p_1 - \frac{1}{20}\lambda_2^{13}p_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{20}\left(\frac{8}{9}\right)^{13} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{20}\left(\frac{8}{9}\right)^{13} + \frac{3}{4} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3.2.3. 课后研学环节

课后发布 2 个研学任务，通过课后延伸实际问题解决项目，实现知识迁移创新。

任务一：拓展学习计算特征值与特征向量的数值方法——幂迭代法(参考书目：徐树方《数值线性代数》，通过任务一，进一步拓展学习广知识。

任务二：对离散动力系统的长期状态分析

给学生相应资料[10]，资料内容主要为两部分，一是解释什么是离散动力系统，并举例说明。例如，某种动物的生命周期分为 2 个阶段：幼年期(1 岁以前)和成年期。假设每只成年雌性一年平均生下 1.6 只幼年雌性，并且每年有 30% 的幼年雌性成活下来进入成年，80% 的成年雌性仍然成活，用向量 $\mathbf{x}_k = (x_1(k), x_2(k))^T$ 表示第 k 年该动物幼年雌性和成年雌性的数量。

显然，该动物雌性数量状态的变化可以用以下模型描述：

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1.6 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}$$

这就是一个离散动力系统。二是阐述如何观察离散动力系统的长期状态规律。让学生课后讨论当 $k \rightarrow \infty$ 时，通过特征值、特征向量的内容分析系统的状态向量会如何变化。

课后整个环节，以知识驱动开展应用探究，助力学生对工程应用、军事应用问题的研究，从而增强学习能力并解决学而少用的问题。

3.3. 教学实践结果分析

为验证教学模式有效性，选取《线性代数》课程平行班开展对照实验，教学实践用时一学期。试点(02 班)采用“导、助、研”混合式教学，对照班(01 班)沿用传统讲授法，两组学生前测成绩无显著差异，采用问卷调查和学习效果测试来进行分析。

3.3.1. 成绩情况分析

依据“导、助、研”混合式教学模式的教学评价体系，参考形成性考核指标及办法，以及终结性考核，经过一学期的对比教学，2024 年秋两个班的工程数学期末考试成绩，如图 2。

从图 2 可以看出，02 班的平均成绩高于 01 班，02 班的优秀率、良好率均高于 01 班，且 02 班无不及格情况，说明 02 班学生的后测成绩相比于 01 班更优，表明“导、助、研”混合式教学模式进一步提升了学习能力。

3.3.2. 问卷调查分析

为了调查 02 班(试点班)学生在“导、助、研”混合式教学模式下的学习体会，从学生的视角评判基于“导、助、研”混合式教学模式的实践效果，了解学生在学习兴趣、学习信心、学习态度上是否存在变

化,设计了一份调查问卷《基于“导、助、研”混合式教学模式应用效果调查问卷》,将得到的数据进行统计分析,如图3所示。

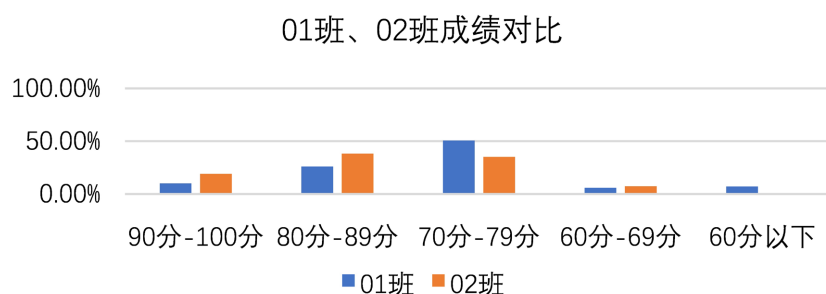


Figure 2. Horizontal comparison of academic performance between Class 01 and Class 02

图2. 01、02 班次成绩横向对比情况

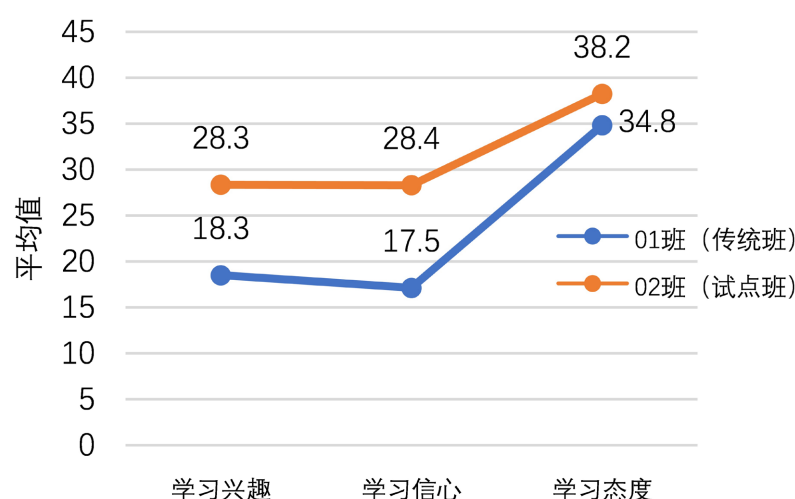


Figure 3. Mean scores of Class 01 and Class 02 in learning interest, confidence, and attitude

图3. 01 班、02 班在学习兴趣、信心、态度上的均值

经过一个学期的实践,通过问卷后测结果进行分析比较后发现,两个班学生在工数学习兴趣、信心、态度三个方面均存在着显著差异;且从均值上来看,01 班(传统班)的学生,因一直沿用传统教学,在工数学习兴趣、信心、态度三个方面变化不大;而02 班(试点班)的学生,采用“导、助、研”混合式教学模式,学生在工数学习兴趣、信心、态度三个方面变化较大,02 班(试点班)在工数学习兴趣、信心、态度三个方面相比01 班(传统班)有非常明显的提升。

综上,依据成绩基本情况分析以及两种不同的教学模式对学习效果的影响分析,说明了02 班比01 班成绩更优,“导、助、研”混合式教学模式对于提高学生《工程数学》课程的成绩有积极作用,增加了学习兴趣、提升了学习信心,能有效改善学生的学习效果。

4. 结语

结合“线性代数”课程内容抽象性高、理论性强、应用性广等特点,紧扣学生学习主动意识不强、学习能力不足及学而少用等现状,构建了“导、助、研”三位一体的线上线下混合式教学模式,实现了线性代数教学由“教”“学”融合式向“学”为主,“导”为辅的模式转变,形成了“学-练-用”循环的线上线下混合式教学,增强了学习动机和学习兴趣,提升了解决实际问题的能力。

参考文献

- [1] 刘红霞. “线上线下混合式学习”模式下线性代数课程思政建设的新探索[J]. 济南职业学院学报, 2021(1): 45-47.
- [2] 杨文霞, 王卫华, 何朗, 等. 知识图谱赋能智慧教育的研究与实践——以武汉理工大学“线性代数”课程为例[J]. 高等工程教育研究, 2023(6): 111-117.
- [3] 吉峰, 李新春, 罗驱波. 多元学习理论融合视角下的业界专家协同教学模式构建研究[J]. 教育理论与实践, 2023, 43(9): 54-57.
- [4] 王竹立, 卢遥. 网络时代学习理论构建十年回顾、反思与展望——从新建构主义到重构主义[J]. 电化教育研究, 2022, 43(12): 61-69.
- [5] 白倩, 冯友梅, 沈书生, 等. 重识与重估: 皮亚杰发生建构论及其视野中的学习理论[J]. 华东师范大学学报(教育科学版), 2020, 38(3): 106-116.
- [6] Vygotsky, L.S. (1978) *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.
- [7] Bruner, J.S. (1960) *The Process of Education*. Harvard University Press. <https://doi.org/10.4159/9780674028999>
- [8] 同济大学数学科学院. 线性代数(第七版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2023.
- [9] 李继根. 线性代数及其 MATLAB 实验[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020.
- [10] 杨萍, 等, 编著. 工程应用案例及分析[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2022.