Creative Education Studies 创新教育研究, 2025, 13(10), 45-51
Published Online October 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2025.1310760

Hans汉斯

基于波利亚解题理论的解题教学研究

——以一道空间立体几何习题为例

王俊霞，代欣雅，王文静

太原师范学院数学与统计学院，山西 晋中

收稿日期：2025年7月22日；录用日期：2025年9月22日；发布日期：2025年9月30日

摘　要

文章以乔治·波利亚解题理论为核心框架，以一道空间立体几何习题为例，探索其在高中空间立体几何解题教学中的理论指导与实践应用价值。波利亚四阶段解题理论为数学问题解决提供了结构化路径，也为一线教师进行问题解决教学提供有力的理论支撑。在波利亚解题理论引领下，运用所提教学策略开展解题教学，有助于提升学生的解题能力，思维灵活性与创新性，提高教师的教学效率与质量。

关键词

高中立体几何，波利亚解题理论，解题教学

Research on Problem-Solving Teaching Based on Polya's Problem-Solving Theory

—Taking a Spatial Solid Geometry Exercise as an Example

Junxia Wang, Xinya Dai, Wenjing Wang

School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: July 22, 2025; accepted: September 22, 2025; published: September 30, 2025

Abstract

The article centers around George Polya's problem-solving theory as its core framework, using a spatial solid geometry exercise as an example to explore its theoretical guidance and practical application value in the teaching of spatial solid geometry problem-solving in high school. Polya's four-stage problem-solving theory provides a structured approach for solving mathematical problems and offers robust theoretical support for frontline teachers in problem-solving instruction. Guided

文章引用: 王俊霞, 代欣雅, 王文静. 基于波利亚解题理论的解题教学研究[J]. 创新教育研究, 2025, 13(10): 45-51.
DOI: 10.12677/ces.2025.1310760

by Polya's problem-solving theory, employing the proposed teaching strategies in problem-solving instruction can enhance students' problem-solving abilities, flexibility, and innovativeness of thinking, and improve teachers' teaching efficiency and quality.

Keywords

High School Solid Geometry, Polya's Problem-Solving Theory, Problem-Solving Teaching

1. 引言

空间立体几何是高中数学的重要内容，也是高考数学的重要考点。在高考中，这部分知识对学生空间想象能力要求较高，需要学生综合利用多重知识进行解题。选择适当的解题方法有助于提升学生分析问题、解决问题的能力。波利亚解题理论以其系统化的解题步骤和启发式教学方法，为数学教育提供了新的视角，该理论不仅能够帮助学生厘清解题思路，还能激发学生的探究兴趣和创新思维。将波利亚解题理论与空间立体几何问题教学相结合，不仅能够为教师提供更具针对性的教学指导，也有助于学生构建更为系统和清晰的解题思路，从而提高解题效率和准确率[1]。故本文以一道空间立体几何习题为例，探析波利亚解题表在空间立体几何解题中的应用。

波利亚在《怎样解题：数学思维的新方法》[2]一书中围绕“数学解题”这一中心任务提出了解题四阶段：理解题目、拟订方案、执行方案和回顾反思。第一阶段是理解题目，清楚题目的要求是什么；第二阶段了解各个项目是如何相关的，未知量和数据之间关系如何，从而获得解题思路；第三阶段执行已制定的方案；第四阶段回顾解答过程，并进行检查和讨论。“怎样解题表”为学生解题提供了思路过程，通过四阶段不同问题的启发，学生一步步观察、理解、分析题目，从而找到解题思路。《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》指出要发展学生“发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力”(以下简称“四能”)。我们发现：“四能”的提法与“怎样解题表”天然契合[3]，“怎样解题表”给出的不仅是问题解决的一般过程，而且是符合学生面对问题时的思维基本规律，能够提高学生的数学思维能力[4]。

自波利亚解题理论提出以来，其生命力在当代教育研究中持续彰显。国内外学者通过不同的教学案例和实证研究，验证了波利亚解题理论在不同数学领域，如导数、数列、圆锥曲线、平面向量等方面的应用效果。本文在前人研究的基础上，进一步探索波利亚解题理论在空间立体几何中的应用。

2. 问题呈现

题目：如图 1，三棱锥 $A\text{-}BCD$ 中，$DA=DB=DC$，$BD\perp CD$，$\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$，$E$ 为 BC 的中点。

(1) 证明：$BC\perp DA$。

(2) 点 F 满足 $\overline{EF}=\overline{DA}$，求二面角 $D\text{-}AB\text{-}F$ 的正弦值。

思路分析：本题考查学生对空间几何知识的综合运用能力。题目第(1)问涉及的知识点有线面垂直的判定、线线垂直的判定；第(2)问涉及的知识点有平面法向量的求解、同角三角形的转化等。从题目的已知条件出发，第(1)问学生很容易得到要从线面垂直入手，但如何找到合适的线面垂直关系是本问难点；第(2)问学生需要建立适当的空间直角坐标系并假设坐标。

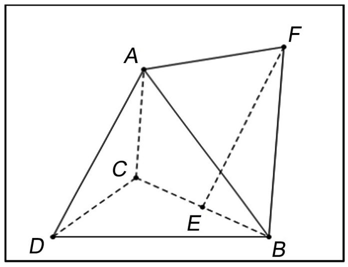

Figure 1. Example diagram 1
图 1. 例图图示 1

3. 利用“怎样解题表”进行解题分析

3.1. 理解题目

波利亚认为：“必须理解该题目的语言陈述，对所不理解的问题做出答复是愚蠢的，对所不希望的目标工作是悲哀的[1]”。解题前学生应该认真地从各个方面思考题目的主要部分，对题目进行合理的猜测，思考已知条件和未知条件。教师在学生理解题目上要进行检查，以问答的方式请学生复述题目，理解题目，为后面拟定解决方案做准备。

问题 1：这是一个什么问题？

第(1)问：这是立体几何中证明线线垂直的问题。

第(2)问：这是利用空间向量求二面角正弦值的问题。

问题 2：已知数据是什么？

第(1)问：$DA = DB = DC$，$\angle ADB = \angle ADC$，E 为 BC 的中点。

第(2)问：$DA = DB = DC$，$\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$，$BD \perp CD$，$\overline{EF} = \overline{DA}$，及从第(1)问中得出的 $BC \perp DA$。

追问 1：从已知数据中能推导出什么？

第(1)问：$DC = DB$，$\angle ADC = \angle ADB$，$DA = DA \longrightarrow \Delta ADC \cong \Delta ADB \longrightarrow AC = AB$。

E 是 BC 中点，$AC = AB$，$DC = DB \longrightarrow AE \perp BC$，$DE \perp BC$。

第(2)问：$DA = DB = DC$，$\angle ADC = \angle ADB = 60^\circ \longrightarrow \Delta ADC$ 和 ΔADB 为等边三角形。

问题 3：未知量是什么？

第(1)问：BC 垂直于包含 DA 的哪一个平面或者 DA 垂直于包含 BC 的哪一个平面。

第(2)问：平面 DAB 和平面 FAB 的法向量。

追问 2：如何解决未知量问题？

第(1)问：通过分析题中条件，推导出 BC、DA 的线线垂直关系。

第(2)问：通过建立空间直角坐标系，假设相关向量的坐标，求出平面 DAB 和平面 FAB 的法向量坐标。

追问 3：证明线线垂直的定理有哪些？

第(1)问：等腰三角形底边垂直于底边上的高；线线所成角为 90°；若一条直线垂直于两条平行直线中的一条，则该直线也垂直于另一条直线等。

3.2. 拟订方案

波利亚认为：“解答一个题目的主要成就在于构思一个解题方案的思路[1]”。从理解题目到构思一个解题方案是漫长而曲折的过程。在这个过程中，教师应尽力引导和唤起学生得到一个好的解题思路。好的思路来源于学生过去的知识经验，观察未知量并利用已知条件是获得好的解题思路的关键。

问题 4：你以前解答过和本题有相同或相似未知量的题目吗？

第(1)问：以前做过证明线面垂直、线线垂直的题目。

第(2)问：以前做过求二面角余弦值的题目。

问题 5：解决这次问题的常用方法有什么？

第(1)问：可以采用线面垂直的判定定理，从两条直线异面可判定线线垂直。

第(2)问：通过求两个平面分别的法向量，利用公式求出二面角余弦值，再根据同角三角形关系式求出二面角的正弦值。

问题 6：你能否拟定计划，探究数学问题？

第(1)问：

你将选择哪对直线与平面的垂直关系？——证明 $BC\perp$ 平面 ADE。

如何能得出 $BC\perp$ 平面 ADE？——利用等腰 ΔABC 和等腰 ΔBCD 底边上的高垂直于底的性质。

如何证明 ΔABC 是等腰三角形？——利用 $\Delta ADC\cong\Delta ADB$，得到 $AC=AB$。

如何证明 $\Delta ADC\cong\Delta ADB$？——利用 $DC=DB$，$\angle ADC=\angle ADC$，$DA=DA$，得出。

如何证明 $BC\perp DA$？——从 $BC\perp$ 平面 ADE，$AD\subset$平面 ADE 可得出。

第(2)问：

目前未知任何线段的长度，你可以怎么做？——可以假设某些线段的长度。

你可以假设什么线段长度？——选择相等关系最多的线段，如 $DA=DB=DC$，假设 $DA=DB=DC=\sqrt{2}$。

根据这一假设可以推导出别的线段长度吗？——由 $BD\perp DC$，可得 $BC=\sqrt{DC^2+DB^2}=2$，由 $DA=DB=DC$，$\angle ADC=\angle ADB$，可得 ΔADC 和 ΔADB 为等边三角形，$AC=AB=\sqrt{2}$，E 为 BC 中点，可得 $DE=AE=1$，$DE^2+AE^2=AD^2$，所以 $DE\perp AE$。

如何求出二面角的三角函数值？——建立空间直角坐标系，假设所需点或者向量的坐标，求出两个平面的法向量，再利用二面角公式求出二面角余弦值，最后利用同角三角形关系得出二面角正弦值。

3.3. 执行方案

波利亚认为：“执行一个方案所需要的主要就是耐心[1]”。解题方案给出了一个总体的框架，执行方案要确保细节都符合这个框架。在学生构思了一个方案后，教师应提醒学生检查执行方案中每一步骤，排除每一个可能存在错误的地方。

第(1)问：

证明：如图 2，连接 AE、DE，因为 $DC=DB$，$\angle ADC=\angle ADB$，$DA=DA$，所以 $\Delta ADC\cong\Delta ADB$，$AC=AB$，又因为 E 是 BC 的中点，所以 $BC\perp AE$，$BC\perp DE$，而 $AE\cap DE=E$，AE、$DE\subset$ 平面 ADE，所以 $BC\perp$ 平面 ADE，又因为 $AD\subset$平面 ADE，所以 $BC\perp DA$。

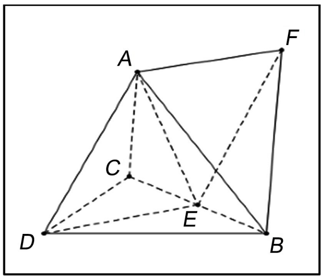

Figure 2. Example diagram 2

图 2. 例图图示 2

第(2)问：

解：设 $DA=DB=DC=\sqrt{2}$，因为$\angle ADC=\angle ADB=60^\circ$，所以 ΔADC 和 ΔADB 为等边三角形，$AC=AB=\sqrt{2}$，又因为 $BD\perp DC$，所以 $BC=\sqrt{DC^2+DB^2}=2$，又因为 E 为 BC 的中点，$BE=CE=1$，$AE\perp BC$，$DE\perp BC$，所以 $AE=DE=1$，可得 $DE^2+AE^2=DA^2$，从而可得 $DE\perp AE$，建立如图 3 所示空间直角坐标系。

所以可得 $D(1,0,0)$，$A(0,0,1)$，$B(0,1,0)$，$E(0,0,0)$，$\overrightarrow{AB}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{DA}=(-1,0,1)$，因为 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，所以 $\overrightarrow{EF}=(-1,0,1)$，$F=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AF}=(-1,0,0)$，设平面 DAB 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

得到 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x_1+z_1=0\\ y_1-z_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=1\Rightarrow\boldsymbol{m}=(1,1,1)$，设平面 ABF 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，得到 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x_2=0\\ y_2-z_2=0\end{cases}$，

令 $y_1=1\Rightarrow\boldsymbol{n}=(0,1,1)$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，设二面角 D-AB-F 的夹角为 θ，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以二面角 D-AB-F 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

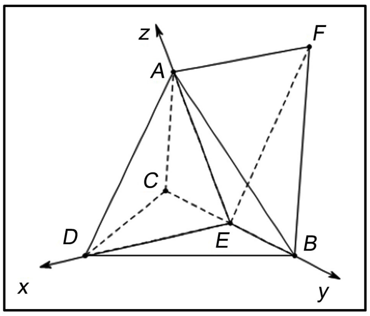

Figure 3. Example diagram 3
图 3. 例图图示 3

问题 7：上述解题过程和思路是正确的吗？

是正确的。

第(1)问：首先根据 $\Delta ADC\cong\Delta ADB$，$E$ 是 BC 的中点，证明出 $AC=AB$，$BC\perp AE$，$BC\perp DE$，从而得出 $BC\perp$ 平面 ADE，又因为 $DA\subset$ 平面 ADE，得出 $BC\perp DA$。

第(2)问：建立空间直角坐标系，假设所需向量的空间坐标，求出平面 DAB 和平面 ABF 的法向量，得出二面角 D-AB-F 的余弦值，从而得到二面角 D-AB-F 的正弦值。

3.4. 回顾反思

波利亚认为：“通过回顾，他们能够巩固知识，并培养他们的解题能力[2]”。教师应使学生认识到任何解题方法都可以改进，因此需要验证解题步骤。此外，迁移本题所使用的方法，并在别的题目中利用是教师应重点向学生强调的。

问题 8：你能检验本题的结论吗？

可以，因为证明过程严谨且有据。

问题 9：本题主要考察了什么知识点？

第(1)问：全等三角形的判定定理，等边三角形的判定定理，线面垂直的判定定理，线线垂直的判定定理。

第(2)问：空间直角坐标系的建立，空间向量的坐标求解，平面法向量的求解，二面角的向量公式，同角三角形函数关系式。

问题 10：本题的关键在于什么？

第(1)问：关键在于找到适当的线面垂直关系，从而得到线线垂直关系。

第(2)问：关键在于建立合理的空间直角坐标系，假设出需要的点、向量的坐标，利用公式求出平面的法向量，得出二面角的正弦值。

问题 11：你能总结出解答类似立体几何题目的解题思路吗？

第(1)问：证明线线垂直关系的题目。

第一步：明确题目要求，是要证明什么线线的垂直关系？

第二步：题目中已知条件是什么？已知条件可以分析出什么线或面的垂直或平行关系？

第三步：回顾学过的线或面的垂直或平行关系的判定定理与性质定理。

第四步：选择适当的线面垂直或面面垂直关系逐步证明得到解答。

第(2)问：计算二面角的正弦值、余弦值或正切值的题目。

第一步：分析题目图象中含有的线面垂直关系，建立合适的空间直角坐标系。

第二步：题中是否给出线段长度，若无，则可自行假设长度，通过证明和计算，求出所需要的点和向量的坐标。

第三步：求出两个平面的法向量坐标，根据平面法向量垂直于平面向量列出方程式，求出平面的法向量。

第四步：明确题目要求的二面角三角函数值，运用同角三角函数关系式求解。

4. 教学启示

4.1. 题目评析

文章所讨论的空间立体几何的习题，考查学生对立体几何知识的综合应用，涉及直观想象、逻辑推理等核心素养。本题第(1)问考查学生找到合适的线面垂直关系，从而得出题目要求的线线垂直关系。第(2)问需要建立合适的空间直角坐标系，确定未知点和未知向量的坐标，通过建立方程组得出二面角的法向量坐标．如何得出法向量是本题难点。这道空间立体几何题目经典且灵活，证明线线垂直考查学生的空间想象意识，需找准思路进行分析。

4.2. “怎样解题”表对解题教学的启示

波利亚的解题思想重视学生自我提问能力的培养。这种能力非短期能形成，需要在日常解题教学过程中，教师有意识通过一系列启发式问题养成学生“以问题解决问题”的思维。在进行具体数学解题教学中教师需重视以下三个方面。

4.2.1. 重视审题过程

波利亚重视解题前的有效审题。教师应培养学生的审题意识。高效解题的关键在于充分挖掘出题干所给的信息，学生要明确题目涉及的数学知识点，从题干中获得条件、推导知识。高考卷中的几何题目

具有“重思考，轻运算”的特征，这就要求学生具有较强的试题信息加工能力，以灵活的解题思维深挖题目中的隐含条件，通过严谨地推断，达到快速、准确地解答问题。

4.2.2. 常态化波利亚提示语

解决数学问题的学习是一种心理活动，是高级形式的学习活动。数学的解题认知结构由解题知识结构，思维结构和解题元认知结构组成。而解题元认知能力的提高有赖于学习者善于运用波利亚的提示语[5]。因此在解题教学中，教师应有意识地常态化使用波利亚提示语。良好的解题习惯需要教师对学生长期引导而成，波利亚解题提示语不仅能帮助学生有意识审题，还能养成学生良好的反思习惯。教师可以引导学生个性化精炼出属于自己的提示语[6]，培养学生在解题过程中自然而然利用提示语作为解题指导。

4.2.3. 解题反思中构建解题模型

解题后的反思与回顾既能回顾解题时采用的知识点、解题方法和产生的错误等，又能通过一道题目发现相关的一类题型特征，从中揭示该类题型的一般解题模型。文中的立体几何题目题型较为经典，但对学生的空间想象能力要求较高，这就需要教师引导学生从经典题目中构建解题模型，实现特殊问题一般化，从一道题目到一类题目，减轻学生的记忆负荷。

5. 研究不足及研究展望

解题教学策略的构建与验证需要长期实践积累，本研究对波利亚解题理论的系统性把握及空间立体几何问题的复杂性认知仍处于探索阶段。由于客观条件限制，文章提出的教学设计主要通过模拟课堂形式呈现，只在学生实习期间短期课堂观察评估教学效果，但未能对学生解题能力的长期发展进行追踪。

在今后的教学中将不断尝试奖波利亚解题理论应用于现实课堂，从长期去观察学生解题能力的成长与变化，以便验证波利亚解题理论的时效性。

基金项目

山西省教育科学“十四五”规划基础教育提升计划专项课题“基于核心素养的高中数学教师教学反思现状及其对策研究”(GH-230129)；太原师范学院研究生教育教学改革项目“研究生教育教学实践环节融入思政元素的设计路径研究与实践(SYYJSJG-2401)”。

参考文献

[1] 汪燕铭, 曹絮. 波利亚解题理论在结构不良问题中的应用——以高考数学北京卷为例的探究[J]. 数学通报, 2023, 62(1): 36-39+58.

[2] (美) 乔治·波利亚. 怎样解题: 数学思维的新方法[M]. 冯承天, 译. 上海: 上海科技教育出版社, 2011, 11.

[3] 陈莉红, 李卓, 吴小芳, 等. 基于波利亚“怎样解题表”的数学问题解决课例研究——以“应用一元一次方程——打折销售”为例[J]. 中国数学教育, 2023(23): 41-44.

[4] 郭蕾. 基于波利亚解题理论提高学生数学思维能力的解题教学策略研究[D]: [硕士学位论文]. 济南: 济南大学, 2023.

[5] 黄红梅. 提升初三学生数学问题解决元认知水平的研究[D]: [硕士学位论文]. 桂林: 广西师范大学, 2015.

[6] 涂荣豹. 数学解题学习中的元认知[J]. 数学教育学报, 2002(4): 6-11.