

课赛融合下的《数学建模》教学案例 ——以回归分析为例

温立书*, 闻良辰, 田万福

沈阳航空航天大学理学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2025年8月6日; 录用日期: 2025年9月11日; 发布日期: 2025年9月22日

摘 要

《数学建模》课程是大学生进行数学训练的重要环节, 数学建模竞赛在提高学生的创新实践能力、提升人才素质中发挥着重要作用。文章分析了数学建模的课程特点, 提出了课赛融合下的教学案例法, 以回归分析教学内容为例, 讨论了在教学资源、课程设置、学生素质能力拓展等方面的建设情况。本校将授课结合了竞赛资源, 优化课程设计, 并组织学生创新竞赛等实践举措下, 全面提升学生的创新意识和科学素养。其具体实践过程与应用成效, 可为其他高校教学提供实践案例参考。

关键词

数学建模, 赛课融合, 教学案例, 回归分析

Teaching Case of “Mathematical Modeling” under the Integration of Class and Competition

—Taking Regression Analysis as an Example

Lishu Wen*, Liangchen Wen, Wanfu Tian

School of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: Aug. 6th, 2025; accepted: Sep. 11th, 2025; published: Sep. 22nd, 2025

Abstract

The course of “Mathematical Modeling” is an important part of mathematical training for college

*通讯作者。

students, and mathematical modeling competitions play an important role in improving students' innovative practical abilities and enhancing talent quality. The article analyzes the characteristics of mathematical modeling courses and proposes a teaching case method under the integration of course and competition. Taking regression analysis teaching content as an example, it discusses the construction of teaching resources, curriculum design, and student quality and ability expansion. Our school combines teaching with competition resources, optimizing curriculum design, and organizing practical measures such as student innovation competitions to comprehensively enhance students' innovation awareness and scientific literacy. The specific practical process and application effectiveness can provide practical case references for teaching in other universities.

Keywords

Mathematical Modeling, Integration of Class and Competition, Teaching Cases, Regression Analysis

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数学建模竞赛,为促进数学应用而产生;数学建模竞赛的发展又促进了数学建模课程的建设。2020年教育部发布的《普通高中数学课程标准(2017年版,2020年修订)》给出了学科核心素养的概念,并将“数学建模”列为数学学科的“六大核心素养”之一将数学建模竞赛与数学建模课程建设深度融合才能实现相互促进。刘杰、李金华[1]构建了慕课、翻转课堂、课程思政和创新实践耦合的“三课一实”课程教学体系,并对其进行了详细探讨;尧雪莉[2]以所在学校为例,分析基于数学建模竞赛的高校创新创业教学改革的重要性、实现路径、实践成效及推广价值;由守科、俞芳[3]深入分析了高校大学生数学建模竞赛的意义以及竞赛与数学教育教学方面存在的问题,同时结合存在的问题对高校数学教育教学改革提出建议;万龙、李德生、徐创宇[4]提出了第一课堂与第二课堂联动发展及双主体互动教学的实施方法,该方法是培养“数模竞赛+案例教学”导向下应用型创新人才的有效途径;王淑娟,张晓威,沈继红[5]围绕竞赛的3个重要环节,探索创新人才培养的基本原则和积极路径;黄华,王飞,宋艳萍[6]探索构建以“项目驱动”为教法,以“以赛促学”为手段的“项目驱动+以赛促学”教学模式;丁为建,曾才斌,刘深泉等[7]介绍了以赛促教的数学建模课程的改革与实践经验。晁增福,邢小宁[8]回顾了数学建模的起源与发展,分析了数学建模课程建设中存在的问题,探索了基于“赛课一体”的数学建模教学改革模式。这些文献都充分肯定了数学建模的重要地位和作用,也给出很多改革经验。但没有给出具体实施细节。本文,以回归分析为例,从课前准备到课堂授课及课后实践,给出了具体实施细节和方法。

在我校,数学建模课程一直是学生选修的热门学科之一。尽管数学建模课程的设置得到了一定的优化,但仍存在一些问题。如:选修课的学生以大一居多,他们数学知识储备相对较少,课程开设规模不足,加上受到开课班型和教学学时所限,未能发挥数学建模在创新型人才培养中的作用。

教学中,案例教学是我们一直采取的教学方式。以问题为导向、以能力培养为目标,对数学建模课程的课堂教学改革,实施“案例教学、课上课下贯通、以赛促学、融入思政”的全要素教学改革,打造“赛课融合”课堂。教学中,选取实际问题或历年竞赛试题作为出发点,在问题分析及合理假设的基础上建立数学模型,并进行求解和相应的讨论,在向学生展示数学建模基本过程的同时,让学生逐渐了解

数学建模的本质并掌握基本方法[6][7]；除了常规教学，我们还不定期开设赛前培训，并通过组织学生参加各类建模竞赛、创新大赛、申请大创项目等，达到学以致用，旨在增强数学知识的应用能力，提升学生的创新能力。

2. 教学要求

以一元线性回归模型内容为例，从建模角度，了解一元线性回归模型的背景和概念；让学生知道一元线性回归模型中参数的最小二乘估计原理；能够应用数学模型软件解决数学建模问题；知道回归方程的显著性检验；了解回归系数的区间估计；了解回归模型的主要应用背景(预测、控制等)。

3. 教学内容

数学建模中的回归分析，其教学目的重点是教授学生如何利用回归的方法来解决实际问题。回归分析，是研究多个变量间的非确定性关系的一种统计分析方法，它在自然科学、工程领域和经济学等领域的定量分析中有着广泛的应用。在具体教学中，对于作为回归分析基础的内容，我们由今年竞赛试题引入教学内容，以案例的形式，在分析过程中介绍了它的理论，包括定理证明、公式推导。这样加深了对线性回归的理解，训练了学生的数学思维，也提高了实践应用的能力。受课堂教学课时所限，对于多元线性回归，逐步回归、多重共线性、非线性拟合等内容，我们安排在学生的课外拓展学习上。

具体教学内容设计，结合数学建模竞赛的论文思路，设计中体现各个具体知识点。力求在学习数学方法过程中，让学生体会到数学建模的过程，以及科技论文的写作构思和专业术语表达方式。本次课的具体内容，如表 1。我们在教学中发现，将这些内容与实际问题相结合，以案例分析的方法，结合今年赛题的热度，更能加深学生的理解，而且有助于激发学生的学习热情[8]。

Table 1. Design of teaching content integrated with the competition process

表 1. 与竞赛过程融合的授课内容设计

建模过程	一级知识点	二级知识点	教学方法
① 问题分析	① 数据预处理	什么是数据预处理 预处理的方法	复习，课前小组讨论
	② 一元线性回归的概念	线性回归的发展史 适用回归分析的问题背景	课前预习
② 模型假设	③ 提出合理假设	假设和符号说明	课上讨论
③ 模型建立	④ 回归方程的建立	模型一般形式	课堂讲授
④ 模型求解	⑤ 回归方程的参数估计	最小二乘法 最大似然估计	课堂讲授，解答难点
		F 检验	
⑤ 模型检验	⑥ 回归方程的显著性检验	回归系数的显著性检验 置信区间	课堂讲授，强调重点
⑥ 模型改进	⑦ 结论分析，方法改进	多元回归分析	课后拓展
		非线性回归分析	

4. 教学实施过程

4.1. 课前学习和小组讨论

通过超星平台发布自主学习任务，让学生了解近几年利用回归分析的建模比赛试题，贴近实际问题，

了解问题广泛的应用背景，和在比赛中的应用热度，增加学生的学习兴趣(表 2)。

Table 2. Typical competition questions using regression analysis
表 2. 应用回归分析的典型赛题

时间	赛事	题目
2022 年	全国大学生数学建模大赛	C 题：古代玻璃制品的成分分析与鉴别
2023 年	华为杯数学建模大赛	E 题：出血性脑卒中临床智能诊疗建模
2023 年	辽宁省数学建模大赛	A 题：铁路车站的安全标线
2024 年	数维杯数学建模大赛	B 题：生物质和煤共热解问题的研究

4.2. 课堂讲授 - 采取案例分析法

按照“赛题引入→案例分析→学习新知→实践应用”流程，来组织线上线下再线上的混合式教学。以赛题为背景，适当简化案例，引出一元回归分析的基本概念及参数估计方法。案例的分析和解答，按照建模竞赛的科技写作风格。具体如下：

案例：表 3 中的数据是七大名牌饮料的广告支出与箱销售量的数据，试分析广告支出与箱销售量的关系。

Table 3. Advertising expenditure and box sales volume
表 3. 广告支出与箱销售量

品牌	广告支出(百万美元)	箱销售量(百万)
Coca-Cola	131.3	1929.2
Classic	92.4	1384.6
Pepsi-Cola	60.4	811.4
Diet Coke	55.7	541.5
Sprite	40.2	536.9
Dr. Pepper	29	535.6
Mountain Dew	11.6	219.5

知识点引入

一般地，当随机变量 Y 与普通变量 x 之间有线性关系时，可设 $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ 式中： $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ ； β_0, β_1 为待定系数。

一元线性回归模型的经典假设：

- (1) ε 满足“正态性”的假设，误差项是服从正态分布的随机变量。
- (2) ε 满足“无偏性”的假设， ε 的均值为零，即 $E(\varepsilon) = 0$ 。
- (3) ε 满足“共方差性”的假设， ε 的方差对于所有的 x 的取值都相等。这就是说，所有的 ε 分布的方差都为 σ^2 。
- (4) ε 满足“独立性”的假设，各自 ε 间相互独立，无自相关性。
- (5) ε 与 x 之间是不相关的，即 $\text{cov}(x, \varepsilon) = 0$ 。

对于模型，易知， $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ ，当 x 取固定值时， Y 服从正态分布 $N(\beta_0 + \beta_1 x, \sigma^2)$ 。

通过最小二乘估计，求得回归参数 β_0, β_1 的最小二乘估计。推导过程及检验计算此处略去。

案例解答

① 问题分析

引导学生,要想初步了解厂商要研究投入的广告支出与箱销售量之间的关系,则可以先绘制散点图观察数据分布特点,再建立回归模型来探讨它们之间的关系。利用数学软件,输入数据,作出 x, y 的散点图(图 1),从图 1 中可看出, y 随 x 增大有明显的线性增长趋势。

```
x=[131.3; 92.4; 60.4; 55.7; 40.2; 29; 11.6];
y=[1929.2; 1384.6; 811.4; 541.5; 536.9; 535.6; 219.5];
plot(x,y,'o')
```

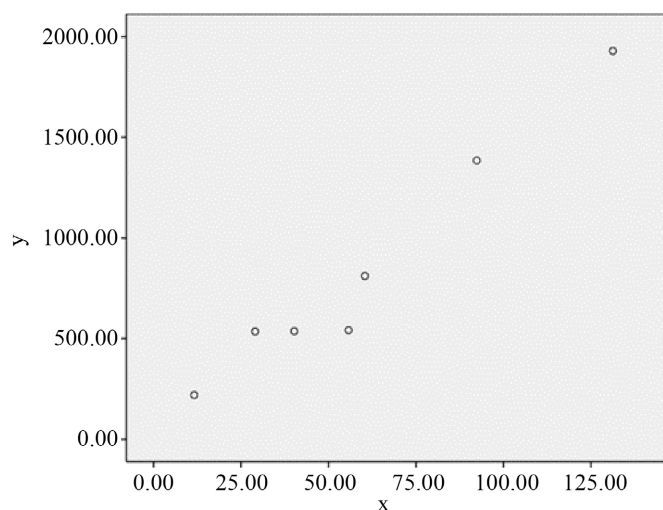


Figure 1. Scatter plot of advertising expenditure and box sales volume
图 1. 广告支出与箱销售量的散点图

② 符号说明

Y : 箱销售量; X : 广告支出。

③ 模型建立

对样本的一组观察值 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 对每个 x_i , 由线性回归方程 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ 可以确定一个回归值 $\hat{y}_i$, 即 $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ 。

其中, 回归值与实际观察值之差, 即 $y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$ 刻画了实际观察值与回归直线 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ 的偏离程度。这里, 可以引导学生思考, 一个自然的想法就是: 对所有的 x_i 若 y_i 与 $\hat{y}_i$ 的偏离越小, 则认为直线与所有试验点拟合得越好? 得到肯定后, 令 $Q(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$, 上式表示所有观察值 y_i 与回归直线 $\hat{y}_i$ 的偏离平方和, 刻画了所有观察值与回归直线的偏离程度。最小二乘法就是寻求 β_0, β_1 的估计 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$, 使 $Q(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \min Q(\beta_0, \beta_1)$ 。利用微分的方法求最小值, 求 Q 关于 β_0, β_1 的偏导数, 并令其为零, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) x_i = 0 \end{cases}$$

解出参数的估计值:

$$\begin{cases} \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \bar{x}\hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_1 = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} \right) / \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) \end{cases}$$

此方法称为最小二乘估计法。而 $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ 为 Y 关于 X 的一元回归方程。

④ 模型求解

利用数学软件 Matlab 求解：

```
X=[ones(size(x));x];  
[b,bint,r,rint,stats]=regress(y,X,0.05)
```

```
b = 14.424  
    -15.420  
bint = -265.3476    234.5067  
        10.8953    17.9523  
r = 略  
rint = 略  
stats = 0.9567    110.4198    0.0001
```

其中，回归系数 $\hat{\beta}_0 = -15.420$ ， $\hat{\beta}_1 = 14.424$ ，故回归方程为： $y = -15.420 + 14.424x$ 。

⑤ 回归模型的检验

统计量： $R^2 = 0.9567$ ， $F = 110.4198$ ， $P = 0.0001$ ，由此看出， R^2 和 F 都明显大，表明直线对样本的拟合程度很高。有 F 分布表查得 $F_{0.05}(1,7) = 5.59$ ，满足 $F > F_{0.05}(1,7)$ ， P 远远小于 $\alpha = 0.05$ ，说明回归方程的线性效果显著。

Table 4. Analysis of variance for simple linear regression model
表 4. 一元线性回归模型的方差分析

时间	平方和	DF	均方	F	Sig.
回归	2048759.078	1	2048759.078	110.420	0.000
残差	92771.339	5	18554.268		
总计	2141530.417	6			

表 4 是对一元线性回归模型进行方差分析的检验结果，主要用于分析模型整体的显著性。 F 检验统计量的值为 110.420，检验的 P 值为 0.000，小于显著性水平 $\alpha = 0.05$ ，所以拒绝原假设 $H_0: \beta_1 = 0$ ，而采纳备择假设 $H_1: \beta_1 \neq 0$ ，该回归模型是有统计学意义的，即广告支出和箱销售量之间的线性关系是显著的。

下面对残差结果进行分析。图 2 是回归模型标准化残差的直方图，且同时绘制了正态分布曲线，可以看到残差基本符合正态分布，且无异常值。图 3 给出的是回归模型标准化残差的正态概率图(P-P 图)，将标准化残差与正态分布进行比较可知，残差基本符合正态分布。从以上的残差分析来看回归模型的正态性假设成立。

再者，对模型进行显著性检验，强调检验的必要性，对待结果要严谨客观。让学生清楚，回归分析原理，是指通过样本估计的参数代替总体的真实参数。从统计性质上已知参数的预估值与其整体参数真值的期望值相当。但在一次抽样中，预估值并不必然与此真值相当，那么，参数的估计值和真值在一次抽样中究竟有多大的差别，有没有显著性，还有待进一步检验。所以，我们的回归模型的测试，包括了

理论意义测试，拟合优度测试，回归方程和变量的显著性测试，残差测试等[9]。

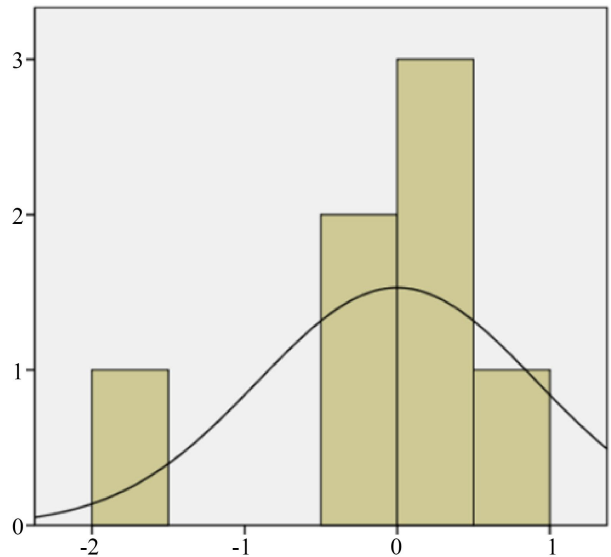


Figure 2. Standardized residual histogram
图 2. 标准化残差的直方图

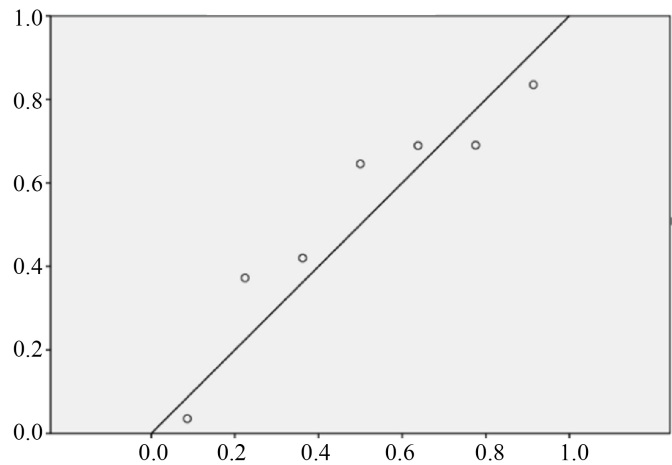


Figure 3. Normal P-P plot of standardized residuals
图 3. 标准化残差的正态概率图(P-P)

整个案例的分析和处理，完全按照数学模型的步骤。学生在比赛中，可以用类似的思路步骤，写成参赛作品。由此，将课赛融合一体。通过对模型的最后结果的分析，并掌握实际中的应用，引发学生对模型改进的思考，激发学生课后继续深入学习的兴趣。同时，挖掘思政元素并巧妙融入课堂教学。如在模型检验，渗透了对事物严谨、客观的评判思维；对模型的改进，也体现了精益求精的工匠精神。

4.3. 课后分层拓展学习

发布基础作业：考虑学生知识体系基础不同，根据历年试题，简化为案例；要求学生按照数学建模过程，完成作业案例。

提供优秀案例参考：对于预习中给出的历年赛题，并提供优秀参赛论文，供学生研磨学习。

通过泛课堂的拓展，适应不同层次的学生：由于课堂教学的学时有限，除了线上教学外，还定期举行系列课下赛前培训讲座、线上慕课学习、提倡传帮带即老生带新生……多项措施，辅助学生拓展数学建模方法的学习和积累。总体来说，就是一切以学生为中心，给学生提供各种机会和渠道不断储备和实践，既满足继续学习的需求，又满足参加竞赛和其他创新活动的能力和兴趣的支撑。

教学与竞赛直接融合：教学过程中，融合数学模型的实践演练。每年教学期间，正逢“校数学建模大赛”，教师宣传并鼓励学生积极参与，将竞赛获奖情况纳入平时分，作为课程成绩参考之一(学生预习、研读教学线上视频课、课堂讨论参与度、平台随堂测试、课后案例作业的提交等等也是纳入平时成绩的重要组成部分)。

5. 实施效果

5.1. 近两年数学建模大赛获奖情况

近年，学生在各项数学建模竞赛获奖颇多，学生亦积极参加与其相近的创新大赛，数据大赛，大创项目等。近两年，组织学生参加各类数学建模大赛，获奖率逐步提升，其中，2024 年取得全国大学生数学建模竞赛国家一等奖，以及各类国家级省级获奖百余项。提升了学生创新意识和探索尝试的积极性。

5.2. 《数学建模》评为省一流资源课

本校《数学建模》课程，近年被评为省一流课程，并以线上资源课的模式，已上线辽宁省的“酷学辽宁”平台。近几年，一直作为省内其他高校的跨校的选课资源。同时，资源课也与时俱进，不断更新中，教学内容和案例库，并于今年 8 月完成课程建设内容大幅度更新。课程教授结合比赛案例，紧连比赛实践。案例库，汇集了历年数学建模竞赛的题目。案例按题目来源、解题思路、典型算法及其如何改进等，整理归纳为若干知识点，可以融入到日常建模课程的教学内容。

5.3. 赛课结合的授课方式，具有很强的应用性

数学建模的学习和竞赛经历可以与“挑战杯”“大数据”等大学生课外学术科技作品竞赛及创新创业大赛等结合，完全可以应用到其它科技竞赛中[10]。每次赛后，指导教师组织竞赛优秀团队进一步研究赛题，申报了多项相关研究课题或大学生创新项目等。比如：2024 年《基于抽样检测的生产流程成本与质量控制研究》(项目编号 D202410231720080995)获得国家级大创项目，并于 2025 年 7 月顺利结题，本项目的思路来源就是 2024 年全国大学生数学建模 B 题。还有很多优秀建模论文，整理发表，如才宇鑫、张席、吴丁杰等[11]-[17]，这仅仅是近三年的一部分作品。学生也普遍认为数学建模的学习提升创造性思维能力、扎实了数学技能、熟练了动手能力。

综上所述，数学建模比赛，从分析问题、建立数学模型、编写计算机程序、撰写科技论文的能力，到学生的团队协作精神都会得到全方位的训练和提升。随着科技发展，数学应用的领域不断拓广，我们也将不断收集整理与各行业中的应用案例，充实赛课结合的教学。

基金项目

2022 年度辽宁省普通高等教育本科教学改革研究项目“基于跨校修读学分的移动学习在工科数学课程教学改革与实践”(辽教办[2022]160 号)。

参考文献

- [1] 刘杰, 李金华. 新时代工科高校数学建模课程教学改革与实践——以西安科技大学为例[J]. 教师, 2022(24): 102-

104.

- [2] 尧雪莉. 基于数学建模竞赛的创新教学案例分析[J]. 电子技术, 2021, 50(4): 52-54.
- [3] 由守科, 俞芳. 基于核心素养下的数学建模竞赛与高校数学教育教学改革的探讨[J]. 数学学习与研究, 2023(1): 119-121.
- [4] 万龙, 李德生, 徐创宇. “数模竞赛 + 案例教学”导向下的应用型创新人才培养模式研究[J]. 科技风, 2021(27): 73-76.
- [5] 王淑娟, 张晓威, 沈继红, 等. 基于数学建模竞赛的学生创新能力培养的思考[J]. 科教文汇, 2020(15): 60-61.
- [6] 黄华, 王飞, 宋艳萍, 等. 基于“项目驱动 + 以赛促学”教学模式的数学建模教学探索与实践[J]. 高教学刊, 2022, 8(17): 108-111.
- [7] 丁为建, 曾才斌, 刘深泉, 等. 以赛促教的数学建模课程的改革与实践[J]. 高等数学研究, 2023, 26(4): 70-72, 80.
- [8] 晁增福, 邢小宁. “赛课一体”模式下数学建模课程群的构建与实践[J]. 湖北开放职业学院学报, 2024, 37(10): 171-173.
- [9] 王化琨, 李春艳, 陈莉莉, 等. 《应用回归分析》课程教学内容与教学方法的改革与实践[J]. 黑龙江教育(理论与实践), 2015(Z1): 81-82.
- [10] 左海静, 张智广, 霍洪田. 浅谈“以赛带管、以赛促学、以赛育人”的学风建设——以数学建模竞赛为例[J]. 新西部, 2019(33): 161-162.
- [11] 才宇鑫, 吕思强, 汪志博, 温立书. 带钢产品机械性能检测及影响因素研究[J]. 建模与仿真, 2025, 14(4): 350-358.
- [12] 张席, 王迪, 温立书. 基于 BP 神经网络与粒子群优化算法的乙醇偶合制备 C4 烯烃的研究[J]. 辽宁化工, 2023, 52(7): 1072-1074.
- [13] 张席, 勾海斌, 温立书. 城市收缩的识别及其影响因素[J]. 高师理科学刊, 2023, 43(4): 14-18.
- [14] 吴丁杰, 温立书. 基于狮群算法优化的 KELM 及分类诊断[J]. 网络安全技术与应用, 2022(2): 34-35.
- [15] 郭欣哲, 杨森, 岳晨阳, 等. 基于神经网络的碳排放与吸收预测分析方法[J]. 中国科技信息, 2021(23): 88-90.
- [16] 吴丁杰, 温立书. 一种基于哈里斯鹰算法优化的核极限学习机[J]. 长江信息通信, 2021, 34(11): 45-46, 51.
- [17] 吴丁杰, 周庆兴, 温立书. 基于 Logistic 混沌映射的改进麻雀算法[J]. 高师理科学刊, 2021, 41(6): 10-15.