Creative Education Studies 创新教育研究, 2025, 13(9), 672-678
Published Online September 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2025.139745

互补咖啡杯问题与Pappus定理

——微积分课堂的趣味案例剖析

刘青青

华南理工大学数学学院，广东 广州

收稿日期：2025年8月11日；录用日期：2025年9月12日；发布日期：2025年9月22日

摘 要

在微积分的教学过程中，如何将抽象的数学概念与实际生活相结合，激发学生的学习兴趣和解决问题的能力，是教育工作者不断探索的课题。本文以“互补咖啡杯容积比较”这一有趣的问题为切入点，探讨其在微积分教学中的应用，旨在为微积分教学提供与生活相贴近的教学案例。

关键词

互补咖啡杯，旋转体体积，微积分教学

The Problem of Complementary Coffee Cups and Pappus's Theorem

—An Analysis of Interesting Cases in Calculus Classes

Qingqing Liu

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: Aug. 11th, 2025; accepted: Sep. 12th, 2025; published: Sep. 22nd, 2025

Abstract

In the teaching process of calculus, how to combine abstract mathematical concepts with real life, and stimulate students' learning interest and problem-solving ability is a subject that educators continue to explore. This paper takes the interesting problem of "comparison of volumes of complementary coffee cups" as the starting point and discusses its application in calculus teaching, aiming to provide teaching cases close to life for calculus teaching.

文章引用: 刘青青. 互补咖啡杯问题与 Pappus 定理——微积分课堂的趣味案例剖析[J]. 创新教育研究, 2025, 13(9): 672-678. DOI: 10.12677/ces.2025.139745

Keywords

Complementary Coffee Cups, Volume of Rotational Solids, Calculus Teaching

1. 引言

微积分作为高校理工科的核心基础课程，其教学质量直接影响学生逻辑思维、创新能力的培养及后续专业课程的学习。近年来，许多教育工作者围绕微积分教学展开了多维度探讨，在教学现状与核心问题方面，研究普遍指出，微积分课程因抽象性强、逻辑严密，易使学生产生畏难情绪和学习兴趣不足的问题。莫兰英(2011)提到，为了培养学生学习微积分的学习兴趣，在教学中，应有意识地收集与教学内容有关的实例[1]。胡风(2010)指出，微积分的不及格率在各课程中一直“名列前茅”，两极分化比较严重[2]，“微积分难、枯燥、无用”是学生反馈的主要痛点，这凸显了激发学习兴趣与建立学习信心的紧迫性。

微积分作为数学的基石之一，不仅在理论研究中占有重要地位，更在计算机领域的实际应用中展现出深远的影响[3]。然而，笔者常年在计算机学院教授微积分的经验表明，即使面对逻辑思维能力较强的学生，微积分的教学效果仍不尽如人意。高白莲在文献[3]中指出，通过引入真实问题，不仅能帮助学生突破课本知识的局限，还能促进其对微积分原理的深入理解，培养学科交叉思维和独立解决问题的能力，为其未来在计算机领域的工作做好准备。在教学实践中，案例的选择至关重要。过于抽象的问题难以激发学生兴趣，与教学目标相去甚远；而过于简单的问题又无法体现微积分的重要性。因此，在每个章节设计既能检验学习效果，又能激发好奇心的恰当案例，成为教学中的关键。针对这一问题，笔者搜集了一系列贴近生活的教学案例。这些案例具有以下特点：1. 浅显易懂，能帮助学生理解抽象的微积分概念；2. 在教学过程中有效引导学生构建逻辑思维框架，培养严谨的推理能力；3. 融入适度延伸思考，在夯实基础的同时提升知识运用与拓展能力，实现从理解到运用、从基础到提升的递进式学习。

本文以文献[4]中“互补咖啡杯容积比较”这一经典趣味性问题为例，提供了两种解法：第一种是利用微积分中标准的旋转体体积积分公式直接计算和比较；第二种是引入并应用 Pappus 定理，通过计算区域面积和重心位置来求解体积。一方面系统性地对比了两种解法在认知层面上的差异，另一方面深入探讨了如何利用这种对比来构建学生的知识体系。

2. 问题的提出

在日常生活中，我们会遇到这样一种情况：有两个咖啡杯，一个杯身向外弯曲(Cup A)，一个杯身向内弯曲(Cup B)，它们具有相同的高度，并且形状能够紧密地契合在一起。见图 1。此时，一个自然的疑问便会产生：这两个咖啡杯哪一个能容纳更多的咖啡？

对于这个问题，最直接的想法是通过实际操作，即将溶液装满一个杯子再倒入另一个杯子来比较。但作为学习微积分的学生，我们可以运用所学的数学知识，从更理论化的角度去解决这个问题。

3. 问题的分析

题目中明确指出，忽略杯柄后，这两个咖啡杯都是旋转体的表面。旋转体是微积分中一个重要的概念，它是由平面曲线绕着一条固定的直线旋转一周所形成的立体图形。在这个问题中，Cup A 和 Cup B

的旋转可以将咖啡杯的形状看作是由特定的曲线绕着竖直方向的轴旋转而成。因此为了解决问题，我们需要建立坐标系，以 Cup A 的旋转轴为 y 轴，底部圆心为原点建立直角坐标系。见图 2。

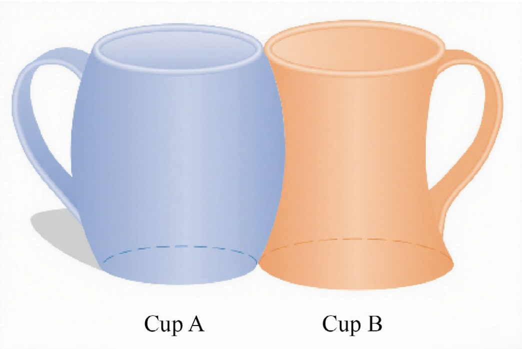

Figure 1. Complementary coffee cups
图 1. 互补咖啡杯

假设咖啡杯的高度为 h，我们对于 Cup A，我们可以用函数 $x = f(y)$ 来表示形成它的曲线，那么，Cup A 的形成是曲线 $x = f(y)$ 绕着 y 轴旋转一周得到，其中 y 的取值范围是从 0 到 h。对于 Cup B 而言，由于其与 Cup A 形状互补且高度相同，因此我们将 Cup B 与 Cup A 紧密贴合，假设其底面圆心到原点的距离为 k，那么 Cup B 的形成是曲线 $x = f(y)$ 绕着 $x = k$ 旋转而成。见图 2。

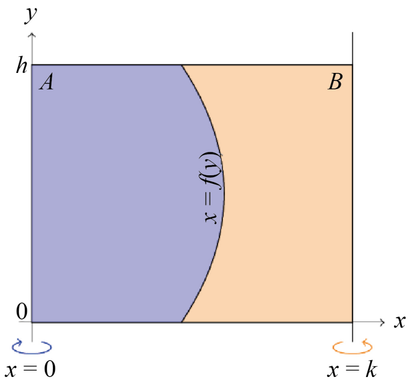

Figure 2. The rectangular coordinate system established with the rotation axis of Cup A as the y-axis and the center of the bottom circle as the origin
图 2. 以 Cup A 的旋转轴为 y 轴，底部圆心为原点建立的直角坐标系

4. 利用旋转体体积公式解决问题

结论：当 $kh > 2\int_0^h f(y)\mathrm{d}y$ 时，$V_B > V_A$；当 $kh < 2\int_0^h f(y)\mathrm{d}y$ 时，$V_B < V_A$；当 $kh = 2\int_0^h f(y)\mathrm{d}y$ 时，$V_B = V_A$。

证明：由曲线 $x = g(y)$，直线 $y = a, y = b$ 以及 y 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体[4] [5]，其体积 V 的计算公式为：

$$V = \pi\int_a^b \left[g(y)\right]^2 \mathrm{d}y.$$

在互补咖啡杯问题中，两个咖啡杯的容积实际上就是它们各自所对应的旋转体的体积。我们设 Cup

A 对应的曲线函数为 $x=f(y)$，那么它的容积 V_A 为：

$$V_A=\pi\int_0^h\left[f(y)\right]^2\mathrm{d}y.$$

由于 Cup B 的形成可以看成是曲线 $x=f(y)$ 绕着 $x=k$ 旋转而成。那么 Cup B 的容积 V_B 为：

$$V_B=\pi\int_0^h\left[k-f(y)\right]^2\mathrm{d}y$$

将上式展开可得：

$$V_B=\pi\int_0^h k^2-2kf(y)+\left(f(y)\right)^2\mathrm{d}y$$

此时，计算 V_B-V_A：

$$\begin{aligned}V_B-V_A&=k^2\pi h-2k\pi\int_0^h f(y)\mathrm{d}y\\&=k\pi\left(kh-2\int_0^h f(y)\mathrm{d}y\right).\end{aligned}$$。

从这个结果可以看出，V_B 与 V_A 的大小关系取决于 $k\pi h$ 和 $2\int_0^h f(y)\mathrm{d}y$ 的大小关系。
这意味着，当 $kh>2\int_0^h f(y)\mathrm{d}y$ 时，$V_B>V_A$；当 $kh<2\int_0^h f(y)\mathrm{d}y$ 时，$V_B<V_A$ 当 $kh=2\int_0^h f(y)\mathrm{d}y$ 时，$V_B=V_A$。

5. 互补咖啡杯问题与 Pappus 定理

Pappus 定理，也称为帕普斯——古尔丁定理，是几何中的一个重要定理，其内容为：平面图形绕与其不相交的轴旋转一周所得到的旋转体的体积，等于该平面图形的面积乘以图形的重心所经过的圆周长度。

在利用 Pappus 定理解释第三部分所得的结论之前，我们先利用 Pappus 定理重新推导课堂上讲过的旋转轴平行于坐标轴的旋转体的体积公式，以此让学生来加深对 Pappus 定理的理解。

情形一，由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a,\ x=b$ 与 x 轴所围成的区域 R 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

按照微元法，这个旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x.$$

按照 Pappus 定理，由于重心所经过的圆周的半径为重心的纵坐标，记重心的坐标为 $(\overline{x},\overline{y})$，由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a,\ x=b$ 与 x 轴所围成的区域的面积为 S，因此这个旋转体的体积为

$$V=2\pi\overline{y}S.$$

为了验证上述两个体积公式的一致性，我们需要计算出 $(\overline{x},\overline{y})$，利用微元法，可得区域 R 的重心坐标公式如下：

$$\overline{x}=\frac{\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^h xf(x)\mathrm{d}x}{S},\quad \overline{y}=\frac{\int_a^b\frac{1}{2}\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^h\frac{1}{2}\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x}{S}.\tag{1.1}$$

因此，

$$V=2\pi\overline{y}S=2\pi\frac{\int_a^b\frac{1}{2}\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x}{S}S=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x.$$

情形二，由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a,\ x=b$ 与 y 轴所围成的区域 R 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

DOI: 10.12677/ces.2025.139745

按照微元法，这个旋转体的体积为

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

按照 Pappus 定理，以及公式(1.1)可得，这个旋转体的体积为

$$V = 2\pi\bar{x}S = 2\pi\frac{\int_0^h xf(x)\mathrm{d}x}{S}S = 2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

这里可以引导同学们下课后去验证其他情形，比如由曲线 $x = f(y)$、直线 $y = c, y = d$ 与 y 轴所围成的区域绕 y 轴旋转等等。

由于在互补咖啡杯问题中，为了应用 Pappus 定理说明第三部分的结论，我们从形成 Cup A 的平面图形与形成 Cup B 的平面图形两个图形重心之间的关系出发。由于这两个图形恰好组成一个由 $x = 0, x = k, y = 0, y = h$ 围成的矩形，记矩形区域的质量为 m_C，重心坐标 $(\bar{x}_C, \bar{y}_C) = \left(\frac{1}{2}k, \frac{1}{2}h\right)$、形成 Cup A 的平面图形的质量记为 m_A，重心坐标记为 $(\bar{x}_A, \bar{y}_A)$，形成 Cup B 的平面图形的质量记为 m_B，重心坐标记为 $(\bar{x}_B, \bar{y}_B)$，如图 3。

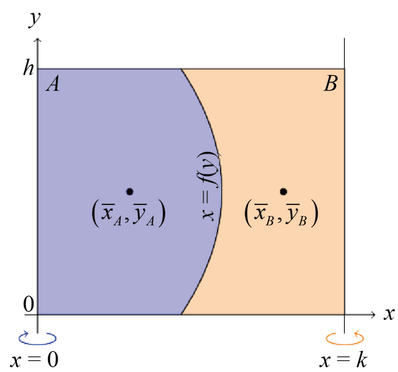

Figure 3. The center of mass
图 3. 质心

则它们具有如下关系，

$$m_C\bar{x}_C = m_A\bar{x}_A + m_B\bar{x}_B,\ m_C\bar{y}_C = m_A\bar{y}_A + m_B\bar{y}_B.$$

两边约去常密度 ρ，则有

$$kh\cdot\frac{k}{2} = S_A\bar{x}_A + S_B\bar{x}_B,\ kh\cdot\frac{h}{2} = S_A\bar{y}_A + S_B\bar{y}_B,$$

再根据 Pappus 定理，Cup A 与 Cup B 的容积分别为：

$$V_A = 2\pi\bar{x}_A S_A,\ V_B = 2\pi(k - \bar{x}_B)S_B,$$

因此

$$\begin{aligned} V_B - V_A &= 2\pi k S_B - 2\pi(S_A\bar{x}_A + S_B\bar{x}_B) \\ &= 2\pi k\left(S_B - \frac{kh}{2}\right) \\ &= 2\pi k\left(kh - S_A - \frac{kh}{2}\right) \\ &= 2\pi k\left(\frac{kh}{2} - \int_0^h [f(y)]^2\,\mathrm{d}y\right). \end{aligned}$$

DOI: 10.12677/ces.2025.139745

通过与前面得到的结论进行对比分析，可以发现两种方法得出的结果是一致的，这不仅验证了利用旋转体体积公式解决该问题的正确性，也让学生对 Pappus 定理有了更直观的认识和理解，体会到不同数学方法之间的内在联系。

6. 该问题在微积分教学中的价值

笔者为计算机学院 2024 级学生讲授《工科数学分析(一)》“定积分在几何中的应用”这一章节时，将该案例融入教学后，改善了传统公式推导课的沉闷氛围，构建起“案例引入 − 理论探究 − 知识拓展”逐步递进的三个教学场景。

在案例引入环节，当笔者展示两个形状互补(一个杯身外凸、一个杯身内凹)的咖啡杯模型，并提出“如何证明这两个杯子的容积相等”的问题时，激发了学生的探究欲。起初有学生提出“用排水法测量”，但很快意识到这是物理方法，而非数学证明。此时笔者引导学生回归微积分知识框架，当学生发现可通过旋转体体积公式解决这一生活问题时，课堂讨论氛围达到第一个高潮——他们普遍表示“没想到微积分能用来算咖啡杯容积”，原本认为“抽象、枯燥”的定积分公式，通过与日常物品的关联变得具象可感，实现了“从课本到生活”的认知迁移。

在理论探究阶段，笔者并未直接给出解题步骤，而是通过提问引导学生回溯知识本源：“旋转体体积公式的本质是什么？为什么能用来计算不规则容器的容积？”学生以小组为单位展开探究，逐步梳理出微元法的核心逻辑：首先将咖啡杯的旋转生成过程理解为“曲线绕轴旋转”的数学模型，确定旋转区间为$[0,h]$，建立的是关于变量 y 的定积分，体积微元的半径分别是 $f(y)$ 与 $k-f(y)$。摆脱了“死记硬背公式”的学习模式，真正理解了“分割 − 近似 − 求和 − 取极限”的微元法思想。

为进一步拓展知识，笔者引入多数中文教材未涉及的 Pappus 定理。作为替代解法，这一知识点的补充，不仅为学生提供了“用几何性质解决体积问题”的新视角，更激发了他们的主动探索欲：有学生通过查阅文献，整理出多个版本的 Pappus 定理以及它们的应用场景；还有学生提出“如何用微元法推导平面区域质心坐标”的问题，并将自己推导曲边梯形质心公式的过程分享在了班级群，实现了从“被动接受知识”到“主动构建知识体系”的转变。

值得关注的是，在案例探究的延伸环节，有学生联想到高中阶段接触的祖暅原理，并提出“祖暅原理与微积分有什么内在联系”的深度疑问。笔者抓住这一教学契机，组织学生通过互联网检索、古籍文献查阅(如《九章算术注》)，准确阐述祖暅原理的内涵——无论是文言文“幂势既同，则积不容异”，还是现代数学语言“夹在两个平行平面间的两个几何体，若被平行于这两个平面的任意平面所截得的截面面积都相等，则这两个几何体的体积相等”；学生自主发现：祖暅原理中“任意截面面积相等则体积相等”的核心思想，与微积分中“微元累加”的逻辑高度契合，可以用这一章节学过的“已知截面面积来求体积”来解释，即若截面面积 $A_1(x)=A_2(x)$，则 $\int_a^b A_1(x)\mathrm{d}x=\int_a^b A_2(x)\mathrm{d}x$。这一发现让学生深刻体会到“数学知识的传承与演进”，增强了文化自信与学科认同感。

为客观评估教学效果，笔者在期末对该年级 100 名学生进行了访谈。结果显示，80%的学生明确表示该案例帮助他们深化了对旋转体体积的理解，其中 32%的学生能完整复述微元法推导过程，另有 15%的学生因该案例对“数学建模”产生兴趣，不仅主动了解相关知识，还希望能够参与数学建模比赛。这一数据充分证明，将生活案例与多维度知识延伸相结合的教学模式，能有效提升学生的学科素养与学习主动性。

总之，学生在“互补咖啡杯问题”的解决过程中，并没有被动记忆或套用各类旋转体体积公式，而是在问题探究中逐步搭建起对微元法的认知框架，最终可以掌握“举一反三”的迁移能力与“深度思考”的学习习惯。这与布鲁纳的“结构主义”与“发现式学习”理论(强调的是学科基本结构的掌握与学生主

动发现过程的重要性)高度契合。因此，在微积分教学中广泛收集趣味性案例，是非常有价值的教学策略。

参考文献

[1] 莫兰英. 论微积分课程教学中学生学习兴趣的培养[J]. 高等函授学报(自然科学版), 2011, 24(1): 45-46.

[2] 胡凤. 如何上好第一节微积分课[J]. 内江科技, 2010, 31(5): 55-55+15.

[3] 高白莲. 微积分在计算机类专业中的应用与教学优化策略研究[J]. 才智, 2024(17): 73-76.

[4] Stewart, J. (2014) Calculus. Seventh Edition, Cengage Learning.

[5] 华东师范大学数学系编. 数学分析(上册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 1980, 200-300.