

APOS理论在高中幂函数概念教学中的应用

刘楠, 龙柄菰

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2025年9月30日; 录用日期: 2025年11月11日; 发布日期: 2025年11月19日

摘要

传统的数学教学常因机械的公式记忆而忽视概念本质, 导致学生对幂函数等抽象数学概念理解不足。文章基于APOS理论, 以高中幂函数教学为例设计分层递进的教学活动。通过“活动-过程-对象-图式”四阶段, 从几何实例的具体操作切入, 引导学生在感知幂函数形式的基础上, 逐步抽象归纳出一般定义, 深化对指数参数与定义域的理解, 最终实现跨学科应用与知识整合。从而突破机械学习带来的局限, 为数学概念教学提供可操作的实践路径。

关键词

APOS理论, 幂函数, 概念教学, 教学设计

The Application of APOS Theory in the Concept Teaching of Power Functions in Senior High School

Nan Liu, Bingsong Long

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: September 30, 2025; accepted: November 11, 2025; published: November 19, 2025

Abstract

Traditional mathematics teaching often neglects the essence of concepts due to mechanical memorization of formulas, resulting in students' insufficient understanding of abstract mathematical concepts such as power functions. Based on the APOS theory, this paper designs a hierarchical and progressive teaching activity with the teaching of power functions in high school as an example. Through the four stages of "activity-process-object-schema", starting from the specific operation of geometric examples, it guides students to perceive the form of power functions, gradually abstract and generalize

the general definition, deepen the understanding of the index parameter and the domain, and ultimately achieve cross-disciplinary application and knowledge integration. Thus, it breaks through the limitations brought by mechanical learning and provides an operational, practical path for the teaching of mathematical concepts.

Keywords

APOS Theory, Power Function, Concept Teaching, Instructional Design

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数学概念教学在高中数学教学中处于关键地位, 一直以来都是数学教学研究领域的热点问题, 其中的函数概念教学更是重中之重[1]。在《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》中也明确指出: “函数是现代数学最基本的概念, 是描述客观世界中变量关系和规律的最为基本的数学语言和工具, 在解决实际问题中发挥重要作用。” [2]

函数概念是中学数学教学的核心, 关于学生对于函数概念的理解, 众多学者已经做了大量的实验研究。相关研究表明, 我国高中生函数概念建构普遍处于操作与过程阶段, 仅少数达到对象阶段并形成图式认知[3]。此外, 钟志华等人指出高中函数概念的三要素及多重表示方法等复杂性, 易引发学生认知超载与畏难心理[4]。值得注意的是, 近年来教育研究学者们针对上述问题, 尝试基于 APOS 理论进行函数概念的教学改革, 以期帮助学生更好地理解和掌握函数概念。众多实践表明该理论能有效促进学生对数学概念的建构、提升学生学习数学的兴趣[5][6]。然而值得注意的是, 在现有的研究当中, 大多数研究集中于一般函数概念教学, 针对幂函数等其他初等函数的 APOS 理论应用研究仍较匮乏。

2. 基于 APOS 理论的高中幂函数概念教学设计

2.1. APOS 理论概述

APOS 是一种数学教育理论, 是由四个英文单词的首字母缩写构成, 即 Action (活动)、Process (过程)、Object (对象) 和 Schema (图式) [7]。APOS 理论是由美国数学家埃德·杜宾斯基(Ed Dubinsky)在 20 世纪 80 年代受到皮亚杰建构主义思想的影响, 提出的一个数学概念学习的理论模型。APOS 理论认为学生通过具体操作、内化过程、抽象对象的认知阶段后, 通常能够通过系统化的知识整合与认知重构, 逐步形成图式, 最终实现学生解决复杂数学问题的能力提升[8]。

在传统教学中, 大多数数学教师教学方法相对单一, 缺乏引导学生主动探究和思考, 并侧重于公式记忆与解题训练。这种教学方式不仅导致学生陷入机械学习的困境, 还会使学生缺乏对函数概念的深入思考和讨论, 最终难以实现知识的迁移与应用[9]。

基于此, 本文以幂函数概念教学为例, 系统探讨如何依据 APOS 理论设计分层递进的教学活动[10]。本文采用了实验班与对照班的实验设计, 同时综合运用问卷、课堂观察与访谈等方法, 为教学设计的效果提供数据支撑。在实验中通过引导学生从直观操作逐步过渡到图式整合, 旨在突破传统教学的局限性, 为高中数学概念教学设计构建可操作的实践范式。

2.2. 教材分析

幂函数是高中数学函数体系的重要组成部分，是学生继指数函数和对数函数学习后的又一基本函数，也是学生从初等函数学习向更复杂函数学习过渡的关键节点。掌握幂函数的概念与性质，既是学生深入理解函数单调性、奇偶性等基本属性的关键路径，更是为后续系统学习指数函数、对数函数等复杂函数奠定基础。

2.3. 学情分析

学生已掌握函数的基本概念、图像绘制方法以及函数的单调性与奇偶性等性质的分析基础，但对幂函数的形式化定义及其性质缺乏系统性认知。此外，学生对指数参数 α 的变化如何影响函数性质的理解存在困难，尤其是当 α 为分数或负数时。

2.4. 教学目标

- 1) 理解幂函数的定义($y = x^\alpha$ ， α 为常数)；掌握不同指数 α 对幂函数图像、定义域、单调性等性质的影响规律。
- 2) 能够通过分类讨论分析不同指数的幂函数性质；能够运用幂函数模型解决实际问题。
- 3) 从具体实例中抽象出幂函数的数学本质；通过指数变化推导函数性质；用幂函数刻画现实问题，培养应用意识。

2.5. 教学重难点

重点：

- 1) 理解幂函数一般形式 $y = x^\alpha$ 及其数学本质。
- 2) 不同指数 α 对幂函数定义域、图像特征以及单调性的影响。

难点：

- 1) 分数指数与负数指数幂函数的定义域限制及图像特征的理解。
- 2) 从具体实例到符号抽象的思维转化，结合实际问题培养数学建模能力。

2.6. 教学流程设计(基于 APOS 四阶段)

2.6.1. 活动阶段(Action)——情境导入，感知特征

理论依据：活动阶段教师需要通过相应的教学手段和方法为学习者创设情境。在情境中学习者通过具体的数学活动初步接触和体验数学概念，将抽象的数学概念转化为能够理解的内容[11]。

活动 1：探究正方形面积与边长的关系。

任务：教师提供边长为 x 的正方形纸片， $x = 1、2、3$ cm，学生测量并计算面积 y 。

操作步骤：填写表格(如表 1 所示)。

Table 1. Relationship between the side length x and the area y of a square
表 1. 正方形边长 x 与面积 y 之间的关系

边长 x (cm)	面积 y (cm ²)
1	1
2	4
3	9

问题 1：边长为 x 的正方形，面积 y 如何表示？ y 与 x 的关系能否用一个数学表达式表示？

总结： $y = x^2$ ，强调自变量位于底数的结构特征。

活动 2：分析正方体体积与边长的关系。

任务：学生使用立方积木测量边长不同的立方体， $x = 1、2、3\text{ cm}$ ，量并计算体积 y 。

操作步骤：填写表格(如表 2 所示)。

Table 2. Relationship between the side length x and the volume y of a cube
表 2. 正方形边长 x 与体积 y 之间的关系

边长 x (cm)	体积 y (cm ³)
1	1
2	8
3	27

问题 2：边长为 x 的正方体，体积 y 如何表示？并对比 $y = x^3$ 与 $y = x^2$ 的图像差异(如图 1 所示)。

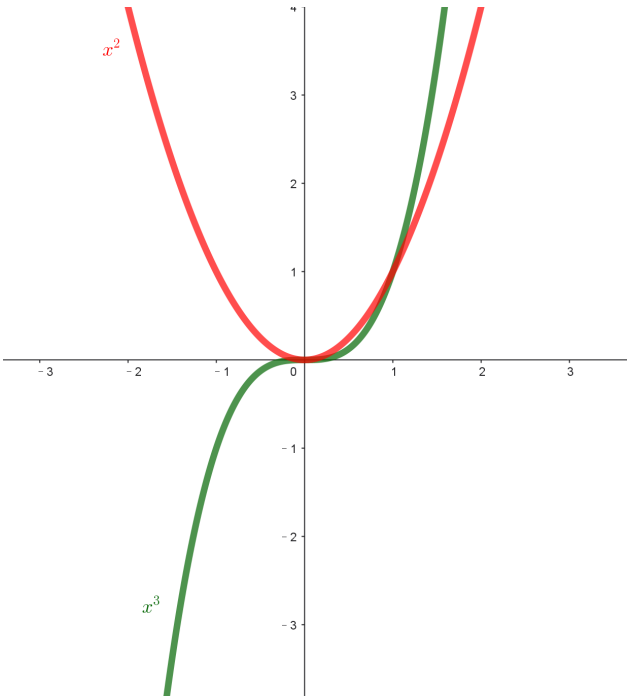


Figure 1. Comparison of the graphs of $y = x^3$ and $y = x^2$
图 1. 函数 $y = x^3$ 与 $y = x^2$ 的图像对比

认知机制分析：这一活动阶段的核心是促进学生对幂函数初步内化，借助测量这一外部活动，将抽象的数学符号转化为具体、可触摸的几何图形，从而在头脑中建构起关于幂函数的心智表象。但在这一阶段部分学生出现了机械的规律推导，未能将表中数据与幂函数之间建立起对应关系。因此，教师需在学生操作后进行提问，以此强化学生进行数学化的思考。

总结：可表示为 $y = x^3$ ，通过图像对比，学生可感知指数越大函数增长越快的规律。

设计意图：利用学生已学的几何实例建立新旧知识之间的联系，学生通过动手操作和直观对比，不仅能感受到“自变量在底数位置”上的特征，还能降低幂函数的抽象性，使学生初步感知幂函数的基本

形式。同时, 学生通过 $y = x^3$ 与 $y = x^2$ 的图像对比还能够直观地看到“指数越大, 函数增长的越快”, 从而为后续幂函数概念的抽象奠定基础。

2.6.2. 过程阶段(Process)——归纳共性, 抽象形式

理论依据: 过程阶段是学习者对上一阶段中的活动进行同化、反思, 是一个心理内部建构的过程。在这一阶段学习者能够脱离对具体形象事物的依赖, 通过自身的内在心理过程来完成任务, 这时学习者开始从具体活动中抽象出数学概念共同的特征, 形成对数学概念的理解[11]。

问题 3: 观察 $y = x^2$ 、 $y = x^3$ 的共同特征, 能否推广到一般形式?

学生讨论: $y = x^2$ 和 $y = x^3$ 的形式均为: 底数为自变量, 指数为固定常数。教师总结: 引导学生总结幂函数的一般形式 $y = x^\alpha$, 其中 α 为常数。

问题 4: 若指数为 $\alpha = 1/2$ 或 $\alpha = -1$, 是否仍为幂函数?

实例验证:

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad (\text{定义域 } x \geq 0)$$

$$y = 1/x = x^{-1} \quad (\text{定义域 } x \neq 0)$$

学生归纳: 幂函数的指数 α 可为任意实数, 但是定义域需要根据 α 调整。

认知机制分析: 此阶段是学生从活动阶段向过程阶段飞跃的关键阶段, 因此这一阶段的核心认知是协调, 学生也需从关系式中抽象出一种可重复的代数运算。通过实验发现协调失败的学生无法脱离具体情境, 并且无法理解 $y = x^\alpha$ 这个一般形式。因此教师需要设计桥梁式的问题“如果我们把幂函数的指数换成另一个实数 a , 这些关系式可以统一写成什么?”并要求学生用自己的话描述“什么是幂函数?”目标是让学生描述出一个变化过程。

设计意图: 通过引导学生从特殊到一般的归纳以及对比不同指数实例, 帮助学生从“整数指数”的局限中解放, 从而突破“幂函数仅限于整数指数”的思维定式, 理解幂函数定义的广泛性, 为后续分析复杂幂函数奠定基础。通过实例验证引导学生从感性操作到符号抽象的转化, 帮助学生内化幂函数的数学本质, 实现“过程阶段”的思维过渡。

2.6.3. 对象阶段(Object)——深化辨析, 探究属性

理论依据: 在此阶段, 学习者能够将先前在过程阶段中形成的初步概念进行整合, 将具体的操作经验升华为具体的数学对象, 这标志着学习者对概念有了更高层次的理解。同时学习者不仅能将抽象的过程内化为具体的数学对象, 还能够进行独立思考和操作这些对象[11]。

分组探究任务:

组 1: 分析 $\alpha = 2$ 时幂函数 $y = x^\alpha$ 。任务: 确定定义域、绘制图像、总结单调性。

组 2: 分析 $\alpha = 1/2$ 时幂函数 $y = x^\alpha$ 。任务: 解释定义域限制($x \geq 0$)的数学依据, 绘制半抛物线图像。

组 3: 分析 $\alpha = -1$ 时的幂函数 $y = x^\alpha$ 。任务: 探讨定义域($x \neq 0$)的合理性, 绘制双曲线图像并分析渐近线。

教师提问: 分数指数和负数指数如何影响函数的定义域与图像?

学生展示: 各组汇报结论。

师生总结: 幂函数的定义域与指数 α 密切相关, 需根据 α 的类型分类讨论。

认知机制分析: 本阶段的目标是完成封装形成对象, 当学生将幂函数作为一个过程来理解时, 它是动态的。而当他们研究其图像, 并将所有性质作为一个整体来把握时, 他们就把这个动态的过程“打包”

成了一个静态的、结构化的数学对象。若在这一阶段学生能画出图像, 但无法系统、准确地用数学语言描述性质。教师则需要设计更加细致的步骤引导学生观察图像经过哪个定点, 定义域和值域是什么? 借助这些任务帮助学生完成封装。

设计意图: 通过具体案例对比, 学生将幂函数视为独立对象并研究其数学属性、深化概念理解。学生分组讨论能够促进合作学习, 培养批判性思维与表达能力。在探究过程中渗透数学严谨性, 强调“形式化定义需结合实际意义”, 帮助学生形成严谨的逻辑思维。

2.6.4. 图式阶段(Schema)——应用迁移, 整合体系

理论依据: 在经历了前三个阶段的学习后, 学习者在图式阶段通过对知识的系统性整合与数学概念的结构化重组, 使其不仅能在多种情境中灵活运用所学数学概念, 还能对所学的概念进行整合, 从而对数学概念形成深刻理解[11]。

问题 5: 判断下列函数是否为幂函数:

- 1) $y = 3x^2$ (否, 系数非 1);
- 2) $y = x^\pi$ (是, 指数为常数);
- 3) $y = x^2 + 1$ (否, 含常数项)。

学生讨论: 总结幂函数的核心特征(形式为 $y = x^\alpha$, 系数为 1)。

问题 6: 解释“行星运动”问题: 行星轨道半长轴 x 与公转周期 y 满足 $y^2 = kx^3$ (开普勒第三定律), 能否表示为幂函数?

学生解答: 变形为 $y = \sqrt{k}x^{\frac{3}{2}}$, 是幂函数, 明确指数 $\alpha = 3/2$ 的实际意义。

问题 7: 对比幂函数与指数函数。

讨论: 比较 $y = x^a$ 与 $y = a^x$ 。

认知机制分析: 在这一阶段中, 学生已将幂函数封装并将其与之前学过的函数类型进行协调、整合, 形成关于函数的更加宏大的认知。但在这一过程中学生可能会将幂函数与其他函数类型割裂, 因此教师需要引导学生以“函数”为中心, 绘制概念图, 将幂函数与其他函数联系起来, 并明确各自的解析式、图像、性质的异同点, 从而将幂函数图式完全融入到函数的知识体系中。

设计意图: 通过辨析练习强化学生对幂函数形式特征的掌握, 区分易混淆形式, 如含系数或常数项。结合物理定律体现跨学科应用价值, 提升数学建模能力。最后整合函数知识体系, 对比幂函数与指数函数($y = a^x$), 明确自变量位置的差异, 帮助学生形成完整的知识网络。

3. 结语

当前高中数学教学的难点之一是函数概念的教学, 本文以 APOS 理论为指导, 聚焦高中幂函数概念教学, 通过“活动 - 过程 - 对象 - 图式”的教学设计, 探索了一条从具体操作到抽象整合的教学路径, 这种分层递进的教学模式能有效帮助学生深化对幂函数本质的认知。

在活动阶段, 学生通过亲身体验测量几何实例, 建立起对幂函数形式的直观感知; 过程阶段引导他们从具体案例中归纳共性, 突破“指数仅为整数”的思维定式; 对象阶段的分组探究则深化了学生对定义域、图像特征等属性的自主辨析能力; 最终在图式阶段, 学生整合知识体系并进行学科迁移。在这一过程中, 学生不仅突破了传统教学导致的机械记忆, 还在分组任务中锻炼了合作学习与解决问题的能力。

综上, 本文为高中数学概念教学提供了可借鉴的实践框架, 但也存在一定局限性。例如, 教学设计集中于幂函数单一主题, 在未来可进一步探讨 APOS 理论在其他数学概念教学中的适用性。此外, 如何在不同学情背景下优化四阶段的教学活动设计, 仍需要实证研究的支持。期待未来研究能够结合技术工

具与跨学科情境, 进一步拓展 APOS 理论的应用边界, 为数学教育创新注入更多活力。

参考文献

- [1] 邵光华, 章建跃. 数学概念的分类、特征及其教学探讨[J]. 课程·教材·教法, 2009, 29(7): 47-51.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018: 7.
- [3] 濮安山, 史宁中. 从 APOS 理论看高中生对函数概念的理解[J]. 数学教育学报, 2007(2): 48-50.
- [4] 钟志华, 黄桂君. 从联系观点看高中函数概念教学难点及成因[J]. 数学通报, 2022, 61(6): 25-29, 48.
- [5] 曾玉祥. APOS 理论在高等数学概念探究式教学中的应用[J]. 教育探索, 2013(5): 42-43.
- [6] 潘小琴, 冯长焕. 基于 APOS 理论的初中数学概念教学设计——以“二次函数的概念”教学为例[J]. 大学, 2021(S2): 34-36.
- [7] Dubinsky, E. and McDonald, M.A. (1993) APOS: One Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In: Holton, D., Artigue, M., Kirchgräber, U., Hillel, J., Niss, M. and Schoenfeld, A., Eds., *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*, Springer, 275-282.
- [8] 乔连全. APOS: 一种建构主义的数学学习理论[J]. 全球教育展望, 2001(3): 16-18.
- [9] 张隆亿. 指向深度学习的高中数学概念课问题链教学探索[J]. 教学与管理, 2024(19): 35-39.
- [10] 李雪梅, 赵思林. 基于 APOS 理论的函数概念“八步”教学设计[J]. 理科考试研究, 2017, 24(23): 22-27.
- [11] 刘可心, 万敏. 基于 APOS 理论的高中地理概念教学研究——以“大气受热过程”为例[J]. 中学地理教学参考, 2023(24): 26-29.