

全概率公式研究型教学设计探讨

李华灿¹, 李群芳²

¹赣南科技学院文法学院, 江西 赣州

²赣州师范高等专科学校数学系, 江西 赣州

收稿日期: 2025年10月11日; 录用日期: 2025年11月11日; 发布日期: 2025年11月20日

摘要

全概率公式是概率论中的关键理论工具, 是连接“原因”与“结果”概率推断的核心桥梁, 对解决多场景下的复杂概率问题具有重要支撑作用。文章针对全概率公式的教学痛点, 构建“问题驱动-知识迁移-探究验证”的研究型教学模式, 通过还原公式的推导逻辑与应用场景, 引导学生自主完成从特殊案例到一般定理的归纳过程, 掌握公式的适用条件、核心思想与拓展方法。实践表明, 该教学设计能有效提升学生的逻辑推理能力与知识应用能力, 为概率论后续知识的学习奠定坚实基础, 同时助力创新型人才培养目标的实现。

关键词

全概率公式, 统计推断, 研究型教学, 逻辑推理

Discussion on Research-Oriented Teaching Design for the Law of Total Probability

Huacan Li¹, Qunfang Li²

¹School of Humanities and Law, Gannan University of Science and Technology, Ganzhou Jiangxi

²Department of Mathematics, Ganzhou Teachers College, Ganzhou Jiangxi

Received: October 11, 2025; accepted: November 11, 2025; published: November 20, 2025

Abstract

The Law of Total Probability is a key theoretical tool in probability theory. It serves as a core bridge connecting the probability inference between “causes” and “effects” and plays a crucial supporting role in solving complex probability problems across multiple scenarios. Addressing the pain points

文章引用: 李华灿, 李群芳. 全概率公式研究型教学设计探讨[J]. 创新教育研究, 2025, 13(11): 480-485.

DOI: 10.12677/ces.2025.1311893

in the teaching of the Law of Total Probability, this paper constructs a research-oriented teaching model featuring “problem-driven learning, knowledge transfer, and inquiry-based verification”. By reconstructing the derivation logic and application scenarios of the formula, it guides students to independently complete the inductive process from specific cases to general theorems, enabling them to master the formula’s applicable conditions, core ideas, and extension methods. Practice shows that this teaching design can effectively enhance students’ logical reasoning ability and knowledge application ability, lay a solid foundation for their subsequent learning of probability theory knowledge, and at the same time contribute to the achievement of the training goal of innovative talents.

Keywords

The Law of Total Probability, Statistical Inference, Research-Oriented Teaching, Logical Reasoning

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在高等院校理工科、经管类及医学相关专业的课程体系中,《概率论与数理统计》是一门兼具理论性与应用性的核心基础课。其中,概率论部分作为数理统计的理论基石,不仅为后续参数估计、假设检验等内容提供逻辑支撑,更在风险评估、医学诊断、质量控制等实际领域发挥重要作用。全概率公式[1][2]作为概率论中的“因果推断工具”,通过将复杂事件分解为互斥的“原因事件”组合,实现了对“结果事件”概率的高效计算,是学生从“单一概率计算”向“多因素概率分析”过渡的关键知识点。

传统教学模式下,全概率公式[3]的教学多以“定理陈述-公式推导-例题讲解”为主,学生虽能机械记忆公式形式,但难以理解公式背后的“分解思想”,在面对实际问题时常常因无法准确划分“原因事件组”而陷入困境。这种“重结果、轻过程”的教学方式,既忽视了学生对知识生成逻辑的探索,也制约了其创新思维与应用能力的培养。

研究型教学以学生为中心,通过创设真实问题情境,引导学生依托已有知识主动探索、验证与归纳,在体验知识生成过程的同时,掌握科学研究方法与思维模式。本文以全概率公式的教学为例,结合医学、金融等跨学科案例,设计阶梯式探究任务,帮助学生逐步突破“事件分解”、“条件识别”、“公式应用”三个核心难点,实现从“被动接受”到“主动建构”的学习转变,为概率论课程的研究型教学实践提供参考。

1.1. 理论基础

1) 探究式学习理论

探究式学习理论由杜威提出,核心是“以问题为导向,学生主动建构知识”。本教学设计通过“医学筛查案例”创设真实问题情境,引导学生经历“提出疑问(如何计算阳性概率)-自主探索(结合加法/乘法公式尝试推导)-归纳总结(从2个划分事件推广到n个)-验证应用(反例辨析与跨学科案例)”的完整探究流程,完全契合该理论“过程重于结果”的核心主张。

2) 认知冲突理论

认知冲突理论认为,当学生已有的知识经验无法解决新问题时,会产生认知失衡,进而激发探索新

方法的动机。本设计在“问题情境创设”环节,通过“医学筛查阳性概率计算”任务,让学生意识到“仅用加法、乘法公式无法解决多原因导致同一结果的概率问题”,形成认知冲突;随后通过“旧知回顾-阶梯探究”逐步化解冲突,符合该理论“冲突-化解-认知升级”的学习规律。

1.2. 国内外研究现状

1) 国内研究现状

国内学者对全概率公式教学的研究多聚焦于“应用场景拓展”与“传统教学改进”,如符方健(2011)提出全概率公式的应用技巧,但未涉及教学模式创新;王永娟等(2023)将 BOPPPS 模型引入概率论教学,但未针对全概率公式设计差异化方案;现有研究型教学设计多缺乏实证数据支撑,且对“公式推导逻辑”的挖掘不足。

2) 国外研究现状

国外研究更注重“跨学科融合”与“学生主体性”,如 Smith (2020)将全概率公式与医学诊断结合设计案例,但未形成系统的探究流程;Jones (2022)强调概率教学中的“逆向思维培养”,但未涉及具体的评估工具。

3) 本研究的学术贡献

相较于现有研究,本设计的创新点在于:一是以双理论为支撑,构建“冲突-探究-验证-迁移”的闭环教学流程;二是补充准实验实证研究,用数据验证教学效果;三是设计差异化教学与多元评估体系,兼顾不同基础学生的需求;四是挖掘数学学科本身的育人价值,实现课程思政的自然融入。

2. 创设问题情境,激活已有知识

2.1. 引入真实案例,引发认知冲突

课前通过学习平台向学生发布案例任务。

案例 1 某医院针对某种罕见疾病开展筛查,已知该疾病在人群中的发病率为 0.005 (即“患病”的概率),未患病者在筛查中被误判为“阳性”的概率为 0.02 (假阳性率),患病者在筛查中被正确判定为“阳性”的概率为 0.98 (真阳性率)。现有一名受检者的筛查结果为阳性,若需进一步计算“该受检者实际患病”的概率,需先解决一个前提问题:人群中任意一人筛查结果为阳性的概率是多少?

多数学生在初步思考中会意识到,“筛查阳性”这一结果可能由两种互斥原因导致:一是受检者实际患病(原因 1),二是受检者未患病但出现假阳性(原因 2)。此时引导学生回顾已学知识:如何计算由多个互斥原因共同导致某一结果的概率?学生自然会联想到“加法公式”与“乘法公式”,但在具体应用时会发现,直接计算“阳性概率”需同时考虑“原因概率”与“原因导致结果的概率”,现有知识无法直接解决,从而产生认知冲突,激发探索新方法的需求。

2.2. 回顾旧知,搭建知识桥梁

在课堂上,首先带领学生回顾两个核心前置知识点,为后续探究奠定基础:

1) 互斥事件与加法公式[4]

若事件 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 两两互斥,且 $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ (Ω 为样本空间),则对任意事件 A ,有

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)。$$

2) 条件概率与乘法公式[5]

对任意两个事件 A 与 B ($P(B) > 0$),有 $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$,即“ A 与 B 同时发生的概率”等

于“ B 发生条件下 A 发生的概率”与“ B 发生概率”的乘积。

通过提问引导学生思考：在上述筛查案例中，“患病(记为 B_1)”与“未患病(记为 B_2)”是否满足“两两互斥且覆盖全部样本空间”？学生通过分析可得 $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ，且 $B_1 \cup B_2 = \Omega$ （任意受检者要么患病，要么未患病），即 B_1, B_2 构成样本空间的一个“划分”。此时进一步追问：若将“筛查阳性”记为事件 A ，能否利用加法公式与乘法公式表示 $P(A)$ ？

3. 阶梯式探究，建构公式逻辑

3.1. 从特殊到一般，推导公式雏形

在学生明确 B_1, B_2 为样本空间划分的基础上，组织小组讨论，尝试推导 $P(A)$ ：

- 1) 根据加法公式，因 B_1, B_2 互斥，故 $A \cap B_1$ 与 $A \cap B_2$ 也互斥，因此 $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$ ；
- 2) 根据乘法公式，分别将 $P(A \cap B_1)$ 与 $P(A \cap B_2)$ 转化为 $P(A|B_1)P(B_1)$ 与 $P(A|B_2)P(B_2)$ ；
- 3) 代入案例数据 $P(B_1) = 0.005, P(A|B_1) = 0.98, P(B_2) = 0.995, P(A|B_2) = 0.02$ ，计算得：

$$P(A) = 0.98 \times 0.005 + 0.02 \times 0.995 = 0.0049 + 0.0199 = 0.0248.$$

此时引导学生思考：若样本空间划分事件增加到 n 个(如疾病有3种致病因素、产品有4个生产车间)，公式是否仍成立？通过“2个划分 $\rightarrow n$ 个划分”的追问，培养学生“从具体到抽象”的归纳思维，同时强调“每一步推导需验证逻辑严谨性”，如“为什么划分事件必须互斥且覆盖全部样本空间？”，渗透数学学科的“严谨求实”精神。

3.2. 拓展一般情形，完善定理条件

通过多媒体展示“样本空间的 n 重划分”，引导学生自主推广公式。

定义 设试验 E 的样本空间为 Ω ，事件 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 满足：① $B_i \cap B_j = \emptyset (i \neq j)$ ，即两两互斥；② $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ （完全覆盖）；③ $P(B_i) > 0$ （每个划分事件均有发生可能），则称 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为样本空间 Ω 的一个“完备事件组”。

对任意事件 $A (P(A) > 0)$ ，根据加法公式与乘法公式，可得：

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

此式即为全概率公式[6][7]。

为帮助学生明确公式的适用条件，设计“反例辨析”任务。

案例2 判断下列情形是否可使用全概率公式计算 $P(A)$ (A 表示“产品合格”)：

- 1) 某工厂有3个车间， B_1 “车间1生产”， B_2 “车间2生产”， B_3 “车间3生产”(满足完备事件组条件，可使用)；
- 2) 某工厂有3个车间， B_1 “车间1生产”， B_2 “车间1未生产”(满足完备事件组条件，可使用)；
- 3) 某工厂有3个车间， B_1 “车间1生产”， B_2 “车间2生产”(未覆盖“车间3生产”，不满足完全性，不可使用)。

通过辨析，学生理解“完备事件组是公式应用的前提”，同时体会“数学条件的严谨性对结果准确性的影响”，如遗漏划分事件会导致概率计算偏差，类比到实际决策中“全面考虑因素的重要性”，进一步深化学科育人价值。

3.3. 即时检测, 巩固公式应用

为检验学生对公式的掌握程度, 布置课堂练习。

案例 3 某银行的信用卡客户分为“优质客户 B_1 ”、“普通客户 B_2 ”、“风险客户 B_3 ”, 三者占比分别为 20%、60%、20%, 且三类客户的信用卡违约概率分别为 1%、5%、20%。求该银行任意一位信用卡客户发生违约的概率(A 表示“违约”)。

学生通过自主计算, 得出:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\ &= 0.01 \times 0.2 + 0.05 \times 0.6 + 0.2 \times 0.2 \\ &= 0.002 + 0.03 + 0.04 = 0.072 \end{aligned}$$

教师通过展示学生的解题过程, 重点点评“完备事件组的识别”与“数据代入的准确性”, 及时纠正常见错误(如混淆“客户占比”与“违约概率”的对应关系)。

4. 回归应用场景, 深化知识迁移

4.1. 跨学科案例分析, 拓展应用边界

全概率公式的价值[8]不仅在于理论推导, 更在于其在多领域的实际应用。通过引入以下两个跨学科案例, 引导学生体会公式的普适性。

案例 4 某地区存在甲、乙两种流感病毒, 感染甲病毒的概率为 0.3, 感染乙病毒的概率为 0.2 (两种病毒无交叉感染), 感染甲病毒后出现发热症状的概率为 0.8, 感染乙病毒后出现发热症状的概率为 0.9, 未感染病毒却出现发热症状的概率为 0.05。求该地区任意一人出现发热症状的概率。

案例 5 某投资平台有股票、基金、债券三种产品, 投资者选择三种产品的概率分别为 0.4、0.3、0.3, 三种产品的年化收益率超过 5% 的概率分别为 0.6、0.4、0.8。求该平台任意一位投资者的年化收益率超过 5% 的概率。

在案例分析中, 引导学生总结“全概率公式的应用步骤”: ① 明确“结果事件”(如“发热”、“收益率超 5%”); ② 识别“原因事件组”(如“感染甲病毒”、“感染乙病毒”、“未感染病毒”), 并验证其是否构成完备事件组; ③ 收集“原因事件概率”与“原因导致结果的条件概率”; ④ 代入公式计算。

4.2. 高阶探究任务, 培养创新思维

为进一步提升学生的探究能力, 设计“全概率公式的拓展应用”任务。

案例 6 某电商平台根据用户的历史消费数据, 将用户分为“高活跃 B_1 ”、“中活跃 B_2 ”、“低活跃 B_3 ”三类, 三类用户在促销活动中点击广告的概率分别为 0.8、0.5、0.2。若已知某用户点击了广告, 能否利用全概率公式反推该用户为“高活跃用户”的概率?

这一问题引发学生思考: 全概率公式是从“原因”推“结果”, 而该问题需要从“结果”推“原因”, 是否存在与全概率公式互补的推导工具? 教师此时不直接给出答案, 而是引导学生结合“条件概率公式”与“全概率公式”自主推导, 为后续“贝叶斯公式”的学习埋下伏笔, 同时培养学生的“逆向思维”与“知识迁移能力”。

4.3. 思政元素融入, 落实育人目标

在教学过程中, 结合案例自然融入思政元素。在医学筛查案例中, 强调“流行病学调查”对精准判断疾病概率的重要性, 引导学生理解“如实配合疾控工作”的社会责任; 在金融案例中, 通过计算“不同投资产品的违约概率”, 培养学生的“风险意识”与“理性投资观念”; 在探究过程中, 鼓励学生敢于质

疑、反复验证,传递“严谨求实的科学精神”。这种“知识传授与价值引领”的有机结合,实现了“课程思政”与专业教学的深度融合。

5. 教学反思与总结

全概率公式的研究型教学设计打破了传统“定理-例题”的线性教学模式,通过“问题情境-旧知激活-探究推导-应用拓展”的闭环流程,让学生在主动探索中掌握公式的核心逻辑与应用方法。从教学效果来看,该设计具有以下优势。

1) 激发学习兴趣。真实案例的引入让抽象的概率公式变得具象,认知冲突的设置有效调动了学生的探究欲望,课堂参与度显著提升。

2) 深化知识理解。通过“特殊到一般”的推导过程,学生不仅记住了公式形式,更理解了“完备事件组”的本质与“分解思想”的价值,知识遗忘率明显降低。

3) 提升应用能力。跨学科案例与高阶探究任务的设计,帮助学生突破“单一场景应用”的局限,实现了从“会解题”到“会用知识”的转变。

同时,教学实践中也发现一些可改进之处:部分基础薄弱的学生在“完备事件组的识别”环节仍存在困难,后续可通过“思维导图工具”帮助学生梳理事件间的逻辑关系;高阶探究任务的难度需进一步分层,以满足不同学习能力学生的需求。

总之,研究型教学的核心在于“以学生为中心,以问题为导向”。在概率论课程的教学中,需不断挖掘知识点背后的“研究逻辑”,设计阶梯式探究任务,让学生在体验知识生成过程的同时,培养科学思维与创新能力,为其后续专业学习与职业发展奠定坚实基础。

参考文献

- [1] 马晓丽, 张亮. 全概率公式的推广及其在保险中的应用[J]. 高等数学研究, 2010, 13(1): 70-71.
- [2] 李长国, 裴永珍, 索文莉. 概率元的应用[J]. 大学数学, 2019, 35(3): 82-86.
- [3] 符方健. 全概率公式及其应用技巧[J]. 高等数学研究, 2011, 14(2): 52-55.
- [4] 曹杨, 曲程远, 周文书. 基于全概率公式的随机变量边际分布[J]. 大学数学, 2015, 31(6): 67-71.
- [5] 李全忠, 刘长文, 王希超. 全概率公式的不足与改进[J]. 大学数学, 2011, 27(2): 173-176.
- [6] 符方健. 广义全概率公式[J]. 西华师范大学学报(自然科学版), 2008(3): 234-237+242.
- [7] 吴新军, 郭联, 潘冬. 概率论与数理统计课程教学改革探索与研究[J]. 大学教育, 2021(10): 125-127.
- [8] 王永娟, 姜喜春, 范英兵. 基于 BOPPPS 模型的大数据专业概率论与数理统计课程教学实践[J]. 电子技术, 2023, 52(12): 220-221.